Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Zahradník

O souvislosti kriterií konvergence nekonečných řad

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 7 (1878), No. 2, 91--102

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122538`

kterýž pro $m = \infty$ přejde v nullu, a tudíž

$$(1 + 2^m \alpha)^{\frac{1}{2^m}} = 1.$$

Jest-li v rovnici (10) $n = \infty$, takže hra jde do nekonečna, jest tento případ pro osobu B nejpříznivější.

Pro dané ε dá se snadně logarithmickým spůsobem S určiti, zvolíme-li dostatečný počet činitelů.

Pro $J' = 100$ zl., tedy $\varepsilon = 0{\cdot}01$, vypočítal *Laplace* *) $J = 107{\cdot}89$ zl., proto $S = 7{\cdot}89$ zl., t. j. když jmění osoby B na začátku hry obnáší 107·89 zl., vsadí s rozvahou na tuto hru jen 7·89 zl., kterážto suma dle mathematické naděje byla nekonečnou.**)

O souvislosti kriterií konvergence nekonečných řad.†)

Napsal

Dr. K. **Zahradník** v Záhřebě.

1. Dříve než upotřebíme řady nekonečné, musíme se přesvědčiti o její konvergenci; nebo divergentním řadám nepřísluší určitá hodnota a tím se samy vylučují od upotřebení.

Tím je patrná vážnost a důležitost, jaká znakům o konvergenci a divergenci nekonečných řad rozhodujícím v analysi připadá. Právě tato jejich důležitost měla za následek, že nyní celou řadou takových kriterií vládneme, které odpovídají jednotlivým tvarům řad nekonečných.

Účelem tohoto pojednání je, vyložiti vnitřní souvislost těchto znaků.

2. Známo, že řada nekonečná

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \ldots$$

konverguje, když od určitého místa počínaje, jest

---

*) Théorie analitique des probabilités. pag. 441. Paris, 1820.

**) Srovnej §. 2. případ III.

†) Uveřejněno v „Radu jugoslovenské akademije“ kniha 40. v Záhřebu.

$$lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \tag{1}$$

kdežto v opačném případu diverguje; je-li pak

$$lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

je konvergence nebo divergence řady nerozhodnutá, a tím vyskytuje se nám potřeba, ohlídnouti se po jiných znacích, máme-li platně rozhodnouti.

Kriterium Cauchy-ho.

3. Takové kriterium podal *Cauchy*,*) jež právě jako tvar (1) z principu porovnání řad původ svůj vzalo. Kriterium Cauchyho zní:

Obě řady

$$\begin{aligned} &u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots \\ &u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

konvergují nebo divergují současně.

Důkaz je znám. Budiž daná řada konvergentní

$$R = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots;$$

poněvadž z pojmu konvergence plyne

$$u_{n+1} < u_n,$$

platí tedy patrně

$$\begin{aligned} u_1 &= 2u_1 - u_1 \\ 2u_2 &= 2u_2 \\ 4u_4 &< 2u_3 + 2u_4 \\ 8u_8 &< 2u_5 + 2u_6 + 2u_7 + 2u_8 \,. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Sečítáním na obou stranách obdržíme

$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \ldots < 2(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots) - u_1.$$

Konverguje-li nyní řada v závorkách obsažená, musí tím více i řada na levé straně konvergovati. Podobně platí, je-li R řada divergentní a zároveň

$$u_{n+1} > u_n,$$

jak snadno se pozná,

*) *Cauchy*, A. L. „Cours d' analyse de l' école politechnique," Paris, 1821.

$$u_1 = 2u_1 - u_1$$
$$2u_2 = 2u_2$$
$$4u_4 > 2u_3 + 2u_4$$
$$8u_8 > 2u_5 + 2u_6 + 2u_7 + 2u_8 .$$
$$\ldots, \ldots\ldots\ldots$$

Sčítáním obdržíme

$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \ldots > 2(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots) - u_1 .$$

Jmenujeme-li řadu

$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \ldots$$

řadou odvozenou, vidíme, že odvozená tato řada současně s danou řadou a k tomu rychleji buď konverguje nebo diverguje.

4. Pomocí této věty odvodíme si podmínku konvergence řady

$$1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \ldots,$$

což bude základem dalšího našeho vývoje.

Odvozená řada je

$$1 + 2\frac{1}{2^r} + 4\frac{1}{4^r} + 8\frac{1}{8^r} + \ldots$$

aneb po malé proměně

$$1 + \frac{1}{2^{r-1}} + \frac{1}{2^{2(r-1)}} + \frac{1}{2^{3(r-1)}} + \ldots$$

Řada tato je řadou geometrickou, kteráž konverguje, je-li

$$\frac{1}{2^{r-1}} < 1,$$

tedy za podmínkou

$$r > 1.$$

V jiném případu, tedy za podmínkou

$$r \leqq 1$$

diverguje daná řada, která za $r = 1$ *harmonickou* se zove.

5. Z principu porovnání řad plyne, že řada

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots \qquad (2)$$

konverguje, jsou-li její členy potažmo menší než členy řady

$$1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \ldots$$

která za $r > 1$ konverguje, což takto se vyjadřuje: Řada (2) konverguje, platí-li podmínka, počínajíc od určitého místa,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(\frac{n}{1+n}\right)^r, \quad r > 1. \qquad (4)$$

To je vztah, od něhož vyjdeme při dalším vyšetřování. Za podmínku divergence měli bychom

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \left(\frac{n}{1+n}\right)^r, \quad r < 1.$$

Odvození v tomto případu je docela podobné tomu, které jsme pro konvergenci provedli.

Kriterium Raabe-ho.

6. Podmínce konvergence

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(\frac{n}{1+n}\right)^r, \quad r > 1$$

můžeme dáti příhodnější tvar. Odečteme-li nerovnost (4) od jedničky, obdržíme

$$1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 - \left(\frac{n}{1+n}\right)^r.$$

Znásobíme obě strany číslem n, obdržíme pak

$$n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > n\left[1 - \left(\frac{n}{1+n}\right)^r\right],$$

$$\lim n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > \lim n\left[1 - \left(\frac{n}{1+n}\right)^r\right],$$

Poněvadž však je

$$\lim n\left[1 - \left(\frac{n}{1+n}\right)^r\right] = r,$$

je též

$$\lim n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > r > 1,$$

nový tvar podmínky (4), jejž pod jmenem *Raabeho* kriterium konvergence známe.

---

*) Uveřejněno ve „Zeitschrift für Phys. und Mathem. von Baumgartner und Ettingshausen Bd. X pag. 63 a v Crellově Journal f. d. r. u. a. Math. 11, díl, pag. 309, kde jej J. Raabe ve obecnějším tvaru

$$\lim n\left[1 - \frac{f(U_n+1)}{f(U_n)}\right] < r < 1$$

podává.

Předložena-li na příklad řada:

$$tg\,1 + \tfrac{1}{2}\,tg\,\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\,tg\,\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\,tg\,\tfrac{1}{4} + \ldots,$$

bude

$$n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = n\left(1 - \frac{n}{n+1}\,\frac{tg\,\frac{1}{n+1}}{tg\,\frac{1}{n}}\right)$$

$$= n\,\frac{n\,tg\,\frac{1}{n} + tg\,\frac{1}{n} - (n+1)\,tg\,\frac{1}{n+1} + tg\,\frac{1}{n+1}}{n\,tg\,\frac{1}{n} + tg\,\frac{1}{n}}.$$

Poněvadž však, jak známo,

$$lim\left(\omega\,tg\,\frac{1}{\omega}\right) = 1 \text{ pro } \omega = \infty,$$

tedy bude

$$lim\,n\left[1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right] = lim\,\frac{n\left(tg\,\frac{1}{n} + tg\,\frac{1}{n+1}\right)}{n\,tg\,\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} = 2,$$

z čehož patrno, že konverguje daná řada.

Kriterium Gaussovo.

7. Z téhož kriteria konvergence

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^r,\quad r > 1.$$

plyne v tom případu, kdy se podíl $\frac{u_{n+1}}{n_n}$ vyjádřiti dá algebraickou racionálnou lomenou funkcí tvaru:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^s + A_1\,n^{s-1} + A_2\,n^{s-2} + \ldots}{n^s + a_1\,n^{s-1} + a_2\,n^{s-2} + \ldots},$$

$$1 - \frac{n^s + A_1\,n^{s-1} + A_2\,n^{s-2} + \ldots}{n^s + a_1\,n^{s-1} + a_2\,n^{s-2} + \ldots} > 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^r$$

anebo

$$\frac{(a_1 - A_1)\,n^{s-1} + (a_2 - A_2)\,n^{s-2} + \ldots}{n^s + a_1\,n^{s-1} + a_2\,n^{s-2} + \ldots} > 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^r$$

Znásobíme-li obě strany číslem n, obdržíme pak

$$\frac{(a_1 - A_1)\, n^s + (a_2 - A_2)\, n^{s-1} + \dots}{n^s + a_1\, n^{s-1} + \dots} > n\left[1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^r\right].$$

Jest však, jak známo,

$$lim \frac{(a_1 - A_1)\, n^s + (a_1 - A_2)\, n^{s-1} + \dots}{n^s + a_1\, n^{s-1} + \dots} = a_1 - A_1 \text{ pro } n = \infty$$

a

$$lim\, n\left[1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^r\right] = r,$$

tedy je též

$$a_1 - A_1 > r > 1 \tag{6}$$

nový tvar znaku (4), který sluje *kriterium Gaussovo.*

Je-li na př. dána řada

$$1 + \frac{2}{5} + \frac{2\,.\,3}{5\,.\,6} + \frac{2\,.\,3\,.\,4}{5\,.\,6\,.\,7} + \frac{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}{5\,.\,6\,.\,7\,.\,8} + \dots,$$

tu je

$$u_{n+1} = u_n \frac{n+1}{n+4}, \text{ tedy } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n+4}$$

a podlé toho

$$a_1 - A_1 = 4 - 1 = 3,$$

pročež konverguje daná řada.

Kriterium Schlömilchovo.

Místo podmínky konvergence

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^r \text{ za } r > 1$$

můžeme též psáti

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^r$$

anebo

$$\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nr};$$

logarithmujeme-li na obou stranách, obdržíme

*) Disquisitiones gen. circa seriem infinit. Sec. III. Coment. soc. reg. Gotting. T. 2. an. 1812.

$$n\,l\frac{u_n}{u_{n+1}} > r\,l\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Jest však

$$lim\,l\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 \text{ pro } n=\infty,$$

tudíž je též

$$lim\left(n\,l\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) > r > 1, \tag{7}$$

což představuje kriterium *Schlömilchovo.**)

Budiž na příklad daná řada nekonečná

$$1+\frac{1}{(1+2\,tg\,x)^{\frac{1}{tg\,x}}}+\frac{1}{(1+2\,tg\,x)^{\frac{1}{tg\,x}}\left(1+2\,tg\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2\,tg\frac{x}{2}}}}$$

$$+\frac{1}{(1+2\,tg\,x)^{\frac{1}{tg\,x}}\left(1+2\,tg\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2\,tg\frac{x}{2}}}\left(1+2\,tg\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3\,tg\frac{x}{3}}}}+\ldots$$

Patrně zde máme

$$u_{n+1}=u_n\frac{1}{\left(1+2\,tg\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{n\,tg\frac{x}{n}}}},$$

z čehož plyne

$$n\,l\frac{u_n}{u_{n+1}}=l\left(1+2\,tg\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{tg\frac{x}{n}}}$$

tudíž bude

$$lim\,n\,l\frac{u_n}{u_{n+1}}=2\,lim\left(1+2\,tg\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{2\,tg\frac{x}{n}}}=2,$$

z čehož soudíme, že daná řada konverguje.

Kriterium Sternovo.

9. Obraťme se opět na podmínku konvergence

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\left(\frac{n}{n+1}\right)^r,\ r>1.$$

---

*) Viz „Handbuch d. algebraischen Analysis von Dr. Oskar Schlömilch". 5. Aufl. Jena 1873. pag. 108.

Má-li daná řada

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\ldots,$$

konvergovati, musí býti v podílu

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\alpha}$$

α povždy veličinou positivní. Je-li α konečná veličina, tu máme případ čl. 2. Třeba jen, abychom zde vyšetřili případ, když α je nekonečně malá veličina, t. j. když α konverguje k nulle. Vzhledem k rovnici (8) můžeme dřívější podmínku konvergence psáti

$$\frac{1}{1+\alpha}<\left(\frac{n}{n+1}\right)^r,\ r>1,$$

z čehož jde, převrátíme-li zlomky,

$$1+\alpha>\left(\frac{n+1}{n}\right)^r,$$

$$\alpha>\left(1+\frac{1}{n}\right)^r-1.$$

Znásobíme-li obě strany číslem n, a přejdeme-li k mezím, obdržíme

$$\lim\,(n\alpha)>\lim n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^r-1\right],$$

a poněvadž jest, jak známo,

$$\lim n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^r-1\right]=r.$$

bude tedy

$$\lim\,(n\alpha)>r>1. \tag{9}$$

Tím dobyli jsme transformací kriteria konvergence (4) opět nový tvar, jejž *Sternovým**) znakem jmenujeme.

Budiž na př. dána řada

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{11}+\ldots;$$

tu máme

$$u_{n+1}=u_n\,\frac{4n+1}{4n+4}\ \text{nebo}\ \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{4n+1}{4n+4}$$

*) M. A. *Stern* „Lehrbuch der algebraischen Analysis," Leipzig 1860. pag. 100.

pročež

$$\frac{1}{1+\alpha}=\frac{1}{1+\frac{2}{4n+1}},$$

z čehož

$$lim\,(n\alpha)=lim\,\frac{2n}{4n+1}=\frac{1}{2},$$

z čehož se poznává, že daná řada diverguje.

10. Dříve než se obrátíme k odvození obecnějších kriterií, pomocí nichž bychom mohli rozhodovati o konvergenci nebo divergenci nekonečných řad v těch případech, kde uvedená dosud kriteria nestačí, odvodíme ještě dva znaky, kteréž se taktéž zakládají na principu porovnání dané řady

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\dots$$

se řadou

$$1+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\frac{1}{4^r}+\dots$$

Řada tato je totiž konvergentní pro $r>1$, a tudíž i daná řada, je-li

$$u_n<\frac{1}{n^r} \text{ pro } r>1,$$

z čehož plyne

$$\frac{1}{u_n}>n^r,$$

tudíž

$$l\frac{1}{u_n}>r\,l\,n,$$

pročež je

$$lim\,\frac{l\frac{1}{n}}{ln}>r>1, \tag{10}$$

další to kriterium konvergence řad nekonečných, jež též můžeme psáti tvarem

$$lim\,\frac{l\,u_n}{l\frac{1}{n}}>r>1.$$

Budiž na příklad daná řada

$$2+\frac{3^2}{2^4}+\frac{4^3}{3^5}+\frac{5^4}{4^6}+\ldots;$$

tu jest

$$u_n=\frac{(n+1)^n}{n^{n+2}}$$

tudíž

$$\frac{l\,u_n}{l\frac{1}{n}}=\frac{l\frac{(n+1)^n}{n^{n+2}}}{l\frac{1}{n}}=\frac{l\left(\frac{n+1}{n}\right)^n-2\,ln}{-ln},$$

z čehož dále plyne

$$lim\,\frac{l\,u_n}{l\frac{1}{n}}=2,$$

takže daná řada tedy konverguje.

Kriterium Olivierovo.

11. Budiž zde připomenuto, že z článku (4) přímo můžeme odvoditi kriterium divergence Oliviera,*) poněvadž řada (2) tím rychleji se sbíhá, konverguje-li rada (3), tudíž je-li

$$u_n>\frac{1}{n^r}.$$

Řada (3) však diverguje pro $r \lesseqgtr 1$, tudíž diverguje tím více řada (2), je-li

$$u_n>\frac{1}{n^r},\ r\lesseqgtr 1,$$

což též můžeme nahraditi podmínkou

$$n\,u_n>\frac{1}{n^{r-1}},\ r\lesseqgtr 1.$$

Má-li se na zřeteli, že předpokládáme $r \lesseqgtr 1$, obdrží se

$$lim\,nu_n>0. \qquad (11)$$

*) *L. Olivier* uvedl v Crelle „Journal f. d. r. u. angw. Math. II díl pag. 31, $lim\,n\,u_n=0$ za obecné kriterium konvergence. Že není obecně platno, dokázal *Abel* v témž časopisu III. díl pag. 79, poukázav na řadu $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nln}$, u níž je $lim\,(n\,u_n)=0$, ana předce diverguje. Jest sice pravda, že řada diverguje, je-li $lim\,n\,n_n>0$, avšak neplatí obráceně to povždy. Co se tkne upotřebení tohoto kriteria viz pojednání *Kummera* u Crelle'-s Jour. svaz. XIII.

Kriterium toto nedá se však obrátiti, nesmíme praviti, že řada konverguje, je-li

$$lim\, nu_n = 0,$$

nebo již řada

$$\frac{1}{2l2} + \frac{1}{3l3} + \frac{2}{4l4} + \dots$$

dává nám příklad řady divergentní, ač tu platí $lim\, nu_n = 0$. Známo, že zde za kriterium konvergence $lim\, n^h u_n = a$ třeba staviti.

Kriteria uvedená ve článcích 4.—10. naznačují nám konvergenci nekonečné řady, když mezní hodnota r je větší než jednička. Je-li naproti tomu mezní hodnota r menší než jednička, diverguje daná řada, a případ je nerozhodnut, rovná-li se mezní hodnota jedničce. V tomto případě musíme se poohlédnouti po obecnějších kriteriích, z nichž jedno zde uvedeme.

12. Předpokládejme, že pro nekonečnou řadu danou jest

$$lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1, \quad lim\, n\left[1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right] = 1;$$

tu musíme poznova upotřebiti principu porovnání řad, máme-li platně rozhodnouti o konvergenci nebo divergenci řady. Místo řady (3) vezmeme nyní řadu

$$\frac{1}{2\,(l2)^r} + \frac{1}{3\,(l3)^r} + \frac{1}{4\,(l4)^r} + \frac{1}{5\,(l5)^r} + \dots \qquad (12)$$

kteráž konverguje *) pro $r > 1$.

V tomto případě je

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1}\left[\frac{l\,n}{l\,(n+1)}\right]^r,$$

tudíž konverguje daná řada, je-li

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{n}{n+1}\,\frac{l\,n}{l\,(n+1)},$$

aneb je-li

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\,(n+1)\,l\,(n+1) < nln,$$

tudíž je-li

*) Viz *Stern* l. c. pag. 119.

$$n\,l\,n - \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)\,l\,(n+1) > 0.$$

Daná řada nekonečná

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$$

tedy konverguje, je-li rozdíl

$$n\,l\,n - \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)\,l\,(n+1)$$

positivní, v případě opačném diverguje.

Rovná-li se však rozdíl tento nulle, je konvergence i divergence nerozhodnuta, a závisí na označení rozdílu

$$n\,l\,n\,ll\,n - \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)\,l\,(n+1)\,ll\,(n+1);$$

je-li výraz tento positivní, konverguje, v případě opačném diverguje. Vyhledávání dalších kriterií v nerozhodných případech je tím patrno.

Tím je souvislost jednoduchých kriterií dovozená, a co se tkne složitých kriterií, z nichž jedno zde uvedeno, o tom pojednáme budoucně.

Nový spůsob, jak se mohou vypočítati kořeny číselných rovnic druhého stupně.

Sepsal

Dr. J. Odstrčil, gymn. prof. v Těšíně.

Spůsob, kterým se odmocnina druhá a třetí vypočítati dá, může taktéž sloužiti k vypočítání kořenů rovnic druhého a třetího stupně.

A. Rovnice druhého stupně.

Tvar rovnic kvadratických jest

$$x^2 + Ax = B.$$

1. Jsou-li součinitelé A a B čísla positivní, snadno se pozná, že rovnice má positivní kořen.

Rovnici tu možná vyjádřiti tvarem

$$B : (x + A) = x,$$