Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Machovec

Některé věty geometrie polohy v planimetrii a geometrii deskriptivní

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 7 (1878), No. 2, 121--130

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122534

Spojíme-li tyto po dvou, protíná přímka $\overline{a_1 a'_1}$ křivku v bodu a''_1, přímka $\overline{a_2 a'_2}$ v a''_2 a konečně $a_3 a'_3$ v bodu a''_3. Lze dokázati, že i a''_1 a''_2 a a''_3 na přímce P'' leží.

Neboť jsou-li u''_1, u''_2, u''_3, parametry bodu a''_1 a''_2 a''_3, bude

$$u_1 u'_1 u''_1 = -1,\ u_2 u'_2 u''_2 = -1,\ u_3 u'_3 u''_3 = -1\,. \quad (\beta)$$

Znásobíme-li rovnice β, obdržíme

$$u_1 u'_1 u''_1 \,.\, u_2 u'_2 u''_2 \,.\, u_3 u'_3 u''_3 = -1$$

a vzhledem k rovnicím (α):

$u''_1 u''_2 u''_3 = -1$, což jest důkazem, že body $u''_1 u''_2 u''_3$ na přímce leží.

(Dokončení.)

Některé věty geometrie polohy v planimetrii a geometrii deskriptivní.

Podává

F. Machovec.

Pokusím se co možná jednoduše dokázati některé věty geom. polohy vzhledem ku křivkám II stupně nejprvé o kružnici a ty pak užitím zákonů promítání zevšeobecním.

Způsobu toho užito sice již k důkazu mnohých vět geometrie polohy, jak patrno ku př. ze slovníku Klüglova v článku „Viereck", kde vyvinuty jsou věty o čtyrúhelnících vepsaných a opsaných a dle Laplace věta Pascalova, než nejsou výsledky tam obdržené všeobecné, nýbrž platicí jen pro jisté polohy útvarů v nich se vyskytujících.

1.) V čtyrúhelníku vepsaném křivce II stupně jsou čtyry body určeny protilehlými stranami a tečnami v protilehlých vrcholech na jediné přímce. Kružnici vepsaný rovnoběžník může býti jen pravoúhelník, neb dle vlastnosti rovnoběžníků musí býti protilehlé úhly stejné a v čtyrúhelnicích vepsaných kružnici vyplňovati se do dvou pravých.

Je-li kružnici vepsán pravoúhelník *abcd*, určují protilehlé strany jeho dva body přímky nekonečně vzdálené, poněvadž dále úhlopříčny toho pravoúhelníka jsou průměry kružnice neb úhly obvodové nad nimi jsou pravé, jsou i tečny v protilehlých vrcholech stejnosměrné a určují tedy též dva body přímky nekonečně vzdálené, čímž dokázána platnost věty nadepsané o každém kružnici vepsaném pravoúhelníku.

Platí-li ale věta ta o pravoúhelníku vepsaném kružnici, platí i o každém rovnoběžníku, který jest vepsán libovolné ellipse neb každou tu ellipsu s vepsaným rovnoběžníkem možno považovati co průmět pravoty kružnice, jíž vepsán pravouhelník.

Je-li nyní libovolné křivce II stupně, tedy kružnici, ellipse, hyberbole neb parabole vepsán čtyrúhelník, jehož protilehlé strany určují dva body přímky P, která onu křivku neprotíná, možno považovati křivku s vepsaným čtyrúhelníkem toho druhu, co průmět středmoty ellipsy, jíž vepsán rovnoběžník, k čemuž třeba jen by ellipsa ta, byla v rovině, jejíž průmět středmoty přímky nekonečně vzdálené jest přímka P. Poněvadž o ellipse vepsaném rovnoběžníku nadepsaná věta dokázána, platí i o průmětu jejím, jemuž vepsán čtyrúhelník zmíněného druhu.

U výsledku tohoto přestává se v slovníku Klügl̈ovu, jest však patrno, že není všeobecný, an dosud nedokázána věta ta pro čtyrúhelníky, u nichž přímka P má s křivkou, jíž ten čtyrúhelník vepsán, společné body, an v případě tomto nemohli bychom křivku tu s vepsaným čtyrúhelníkem považovati co průmět ellipsy, jíž vepsán rovnob., nýbrž co průmět hyperboly s vepsaným čtyrúhelníkem, o níž ale věta nadepsaná dosud dokázána nebyla. Abychom i pro rovnoběžník hyperbole vepsaný větu tu dokázali, považujme čtyry body $a\, b\, c\, d$ v obr. 5. v pořádku $acbd$ co čtyrúhelník. Protilehlými stranami jsou pak ad a bc a druhý pár ab a dc. Body těmi páry určené jsou na přímce P', která jest stejnosměrná s $ad \,||\, bc$. Protilehlými vrcholy jsou pak a a b a druhý pár c a d, tečny v každém páru protilehlých vrcholů jsou souměrné ku P' a tedy na se ní protínají. Má tedy věta dokázaná platnost i o takovém čtyrúhelníku, který jest vepsán kružnici.

Považujeme-li P' co obraz průmětu středmoty přímky nekonečně vzdálené jisté roviny, jest pak ona kružnice obrazem průmětu středmoty hyperboly, jíž vepsán rovnoběžník, a poněvadž věta nadepsaná platí o obrazu, musí platiti i o originálu t. j. o rovnoběžníku vepsaném hyperbole.

Je-li nyní libovolné křivce II. stupně vepsán libovolný čtyrúhelník, můžeme tuto považovat co průmět středmoty ellipsy neb hyperboly, jíž vepsán rovnoběžník, dle toho nemá-li neb má-li přímka P s křivkou společné body. Dokázána tím tedy věta nadepsaná všeobecně.

2. Přímky určené protilehlými vrcholy křivce II. stupně opsaného čtyrúhelníka a body dotyčnými protilehlých stran procházejí bodem jediným.

Hledíme-li v obraze 5. k čtyrúhelníku $ABCD$, jest patrno, že o něm platí věta tato, an protilehlé vrcholy určeny jsou stranami AB a DC a druhý pár stranami AD a BC, body dotyčné protilehlých stran určují pak přímky ac a bd, a platnost věty té plyne v tomto případě ze středové souměrnosti ohledně bodu 0. Platí tedy věta ta o každé ellipse, jíž opsán rovnoběžník.

Beřeme-li ale čtyrúhelník ten co $ACBD$, jsou protilehlé vrcholy určeny stranami AC a BD a druhý pár stranami CB a DA. Přímka určena vrcholy prvního páru jest tedy nekonečně vzdálena a přímka určená vrcholy druhého jest Q.

Body dotyčné protilehlých stran jsou pak a a b a druhý pár c a d a přímky nimi určené jsou stejnosměrné s Q, z čehož plyne, že přímka nekonečně vzdálená, přímky ab, cd a Q procházejí jediným bodem, platí tedy věta nadepsaná i o tomto čtyrúhelníku.

Považujeme-li však P' co obraz průmětu středmoty přímky nekonečně vzdálené jisté roviny, jest ona kružnice obrazem hyperboly v takové rovině se nacházející, jíž opsán rovnoběžník, neb v obrazu protínají se strany A a B, které jsou protilehlé, též C a D (hledě k čtyrúhelníku $ACBD$) na obrazu přímky nekonečně vzdálené, originály jejich budou tedy stejnosměrné. Rozšířena tím tedy platnost věty té i na rovnoběžník hyperbole opsaný.

Je-li libovolné křivce druhého stupně opsán libovolný čtyrúhelník, možno považovati křivku tuto s oním opsaným čtyrúhelníkem co průmět středmoty ellipse neb hyperbole vepsaného rovnoběžníku, dle toho, jestli přímka určena body, které jsou společné protilehlým stranám toho čtyrúhelníku, s danou křivkou nemá neb má společných bodů. A poněvadž o hyperbole neb ellipse opsaném rovnoběžníku platí věta nadepsaná, má i platnost o čtyrúhelnících opsaných křivkám druhého stupně vůbec.

Z obr. 5. možno vyvoditi též všeobecný spůsob sestrojení tečen ku křivkám druhého stupně bodem mimo tuto křivku.

Hledíme-li totiž k tomu, že $T_m \parallel T_n \parallel ad \parallel bc$ a že $ab \parallel Q \parallel cd$, jest patrno, že i v libovolném čtyrúhelníku vepsaném procházejí přímky T_m, ad, bc, T_n bodem jediným a též přímky ab, Qa, cd, jedná se tedy vždy jen o sestrojení přímky Q, k tomu cíli vedou se bodem daným libovolné dvě přímky, které mají s křivkou společné body. Čtyry ty body určují čtyrúhelník (odpovídající čtyrúhelníku $abcd$) a dva body společné zbývajícím protilehlým přímkám určeným oněmi čtyrmi body určují přímku Q a tato body m a n co body dotýčné.

Věta Pascalova:

„V šestiúhelníku vepsaném křivce druhého stupně určují protilehlé strany tři body, které jsou na jediné přímce."

Budiž $abcdef$ (obr. 6.) obrazem kruhu vepsaného šestiúhelníka, o němž víme, že strany protilehlé dvou párů jsou stejnosměrné t. j. $ab \parallel de$ a $bc \parallel ef$. Možno pak dokázati, že i strany třetího páru jsou stejnosměrné.

Měří se totiž úhel a obloukem $arc\, bc + arc\, ef$ a úhel d obloukem $\pi - arc\, cd - arc\, de$, poněvadž ale

$$arc\, cd = arc\, ef - arc\, df = arc\, be - arc\, df$$

a

$$arc\, de = arc\, df + arc\, ef,$$

možno místo oblouku, nímž se měří úhel d, psáti

$$\pi - [arc\, bc + arc\, ef],$$

z čehož plyne, že $\sphericalangle d = 180^0 - a$ a poněvadž $ab \parallel de$, musí býti $cd \parallel af$, máme tedy větu:

„Jsou-li protilehlé strany dvou párů kruhu vepsaného šestiúhelníku stejnosměrné, jsou i strany párů třetího stejnosměrné.

Ze známých důvodů platí věta tato i o každém ellipse vepsaném šestiúhelníku, jehož dva páry protilehlých stran jsou stejnosměrné.

Je-li libovolné křivce stupně druhého vepsán šestiúhelník takový, že dva body, které protilehlé strany dvou párů určují, určují přímku (P,) která s onou křivkou nemá společných bodů, možno považovati křivku tu co průmět ellipse vepsaného šestiúhelníku, v němž protilehlé strany dvou páru, tedy i třetího páru jsou stejnosměrné. Třeba jen přímku P považovati co průmět středmoty přímky nekonečně vzdálené jisté roviny, v níž ona ellipsa se nachází; poněvadž i strany třetího párů oné ellipse vepsaného šestiúhelníku jsou stejnosměrné, musí i bod určený třetím párem stran průmětu toho šestiúhelníku býti na přímce P, takže na ní jsou všechny tři body určené protilehlými stranami toho šestiúhelníka.

U tohoto výsledku přestává Laplace, jest však patrno, že není všeobecný, neb dokázán přesně jen potud, pokud přímka P nemá s křivkou společných bodů.

Ke všeobecnému důkazu věty Pascalovy nutno dokázati větu o šestiúhelníku tvaru všeobecnějšího vepsaného kružnici než onoho, o kterém jedná věta a.

Budiž v obr. 7. zobrazen šestiúhelník $abcdef$ vepsaný kružnici, jehož protilehlé strany jsou stejnosměrné a mysleme si, jakoby vrchol a probíhal kružnici a zobrazme si jednu jeho polohu na př. a' a hleďme k šestiúhelníku $a'bcdef$, v němž jest jen $bc \parallel ef$. Protilehlé strany $a'b$ a de určují bod h a strany $a'f$ a cd bod g; o přímce P určené body g a h snadno lze dokázati, že $P \parallel bc \parallel ef$.

Jest totiž

$$\sphericalangle a'fa = \sphericalangle a'ba = \sphericalangle dga' = \sphericalangle a'hd;$$

hledíce jen k rovnosti $\sphericalangle dga' = \sphericalangle a'hd$ jest patrné, že čtyrúhelník $a'ghd$ jest vepsán kruhu, tedy

$$\begin{aligned} \sphericalangle a'hg &= \sphericalangle a'dg = 180 - \sphericalangle a'bc \quad \text{a připočteme-li} \\ \sphericalangle a'hd &= \sphericalangle a'ba \\ \hline \sphericalangle dhg &= 180 - \sphericalangle abc \end{aligned}$$

a poněvadž $ba \parallel dh$ jest patrné že hg t. j. $P \parallel bc$.

Dokázána tím tedy věta Pascalova i pro šestiúhelník tohoto tvaru, neb tři body g, h a bod určený stejnosměrnými bc a ef jsou na přímce P.

Již tento výsledek dostačí k úplnému a přesnému důkazu věty Pascalovy.

Neb myslíme-li si, že bod a pohybuje se dále na př. do a_1', bude přímka P_1 míti s kruhem společné body, a myslíme-li si tuto co obraz průmětu středmoty přímky nekonečně vzdálené jisté roviny, jest kruh ten obrazem průmětu středmoty hyperboly v oné rovině, jíž vepsán šestiúhelník, v němž strany všech tří párů jsou stejnosměrné a sice plyne z vyvinutí, že jakmile protilehlé strany dvou párů jsou stejnosměrné, že to platí nutně i o páru třetím.

Je-li libovolné křivce vepsán libovolný šestiúhelník, v němž protilehlé strany dvou párů určují dva body, které opět určují přímku P, možno považovati křivku s vepsaným šestiúhelníkem co průmět středmoty hyperboly neb ellipsy, jíž vepsán šestiúhelník, v němž protilehlé strany všech tří párů jsou stejnosměrné a sice hyperboly neb ellipsy dle toho, jest-li přímka P s křivkou má neb nemá společných bodů, a poněvadž o šestiúhelníku, v němž strany protilehlých párů jsou stejnosměrné, platí i o průmětu jejich — o libovolném šestiúhelníku, který vepsán libovolné křivce druhého stupně, čímž věta Pascalova všeobecně dokázána.

K vůli úplnosti důkazu o šestiúhelníku kruhu vepsaném provedu důkaz o všeobecném šestiúhelníku kruhu vepsaném pomocí planimetrie dále.

Mysleme si, v obr. 7. že bod e probíhá kružnici a zobrazme si jednu jeho polohu e'. Hleďme k šestiúhelníku $a'bcde'f$, který jest tvaru obecného. Protilehlé strany jeho určují body i, h', g, o nich snadno lze dokázati, že leží na jedné přímce.

Hledíme-li k šestiúhelníku $abcde'f$, jsou $af \parallel cd$ a proto jest přímka P' určena průsečníky i a k dvou párů protilehlých stran stejnosměrná s $af \parallel dc$. Poněvadž $\triangle hh'd \sim bh'k$, jest $bk : bh' = dh : hh'$, poněvadž dále $\triangle dgh, ibk \sim \triangle$ jest $bk : bi = dh : gh$; z obou těch srovnalostí plyne $bh' : hh' = bi : gh$, z níž a z rovnosti úhlů $\sphericalangle ibh = \sphericalangle bhg$ soudíme, že $\triangle ih'b \sim \triangle hh'g$, z čehož opět plyne, že všechny úhly jejich jsou stejné tedy i $\sphericalangle ih'b = \sphericalangle hh'g$ a poněvadž ramena $h'b$ a $h'h$ jsou na jedné přímce, musí i ramena ih' a $h'g$ jedinou přímkou tvořena býti, t. j. tři body i, h' g jsou na jedné přímce.

„Jsou-li A, B, C, D čtyry tečny křivky druhého stupně a body a b c d jimi na libovolné tečně páté T určené, jest pro jakou koli T poměr $\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$ stálý.“

Nazveme-li onen poměr dvou poměrů *dvojpoměrem*, můžeme větu tu vysloviti.:

„Dvojpoměr čtyr bodů, které na určitých čtyrech tečnách křivky druhého stupně libovolnou tečnou pátou určeny jsou, jest stálý.“

Dokažme platnost věty té pro kružnici.

V obrazci 8. zobrazena budiž křivka kruhová a čtyry tečny její A B C D, které na libovolné tečně páté T stanoví čtyry body a b c d. Středem kruhu a každým z těchto dvou bodů určen jest trojúhelník, všecky ty trojúhelníky, beřeme-li strany jejich na T co půdice, mají stejné výšky, pročež plochy jejich mají se k sobě jako půdice jejich. Tak že jest

$$\frac{\text{pl.} \triangle aco}{\text{pl.} \triangle bco} = \frac{ac}{bc} \text{ a tedy } \frac{\text{pl.} \triangle aco}{\text{pl.} \triangle bco} : \frac{\text{pl.} \triangle ado}{\text{pl.} \triangle bdo} = \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$$

$$\frac{\text{pl.} \triangle ado}{\text{pl.} \triangle bdo} = \frac{ad}{bd}.$$

Jinak dá se vyjádřiti plocha každého z těchto trojúhelníků takto: pl. $\triangle aco = oc \,.\, ae$, kde $ae \perp oc$; spustíme-li nyní s bodu f kolmici na oc, t. j. $fg \perp oc$, jest z podobných trojúhelníků $ofg \sim oae$

$$ae : ao = fg : fo, \text{ tedy } ae = ao \frac{fg}{fo}$$

a jest tedy

$$\text{pl.} \triangle aco = oc \,.\, oa \,.\, \frac{fg}{fo}$$

a podobně

$$\text{pl.} \triangle bco = oc \,.\, ob \,.\, \frac{hi}{ho}$$

$$\text{pl.} \triangle ado = ad \,.\, oa \,.\, \frac{fk}{fo}$$

$$\text{pl.} \triangle bdo = od \,.\, ob \,.\, \frac{hl}{ho}$$

tedy po náležitém zkrácení

$$\frac{\text{pl.} \triangle aco}{\text{pl.} \triangle bco} : \frac{\text{pl.} \triangle ado}{\text{pl.} \triangle bdo} = \frac{fg}{hi} : \frac{fk}{hl} \qquad (2)$$

Porovnáním srovnalostí 1 a 2 plyne nová

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{fg}{hi} : \frac{fk}{hl}.$$

Kdybychom místo tečny T byli zvolili jinou T', určovaly by na ní tečny A B C D čtyry body a' b' c' d', ale délky $a'c'$, $b'c'$, $a'd'$, $b'd'$ promítaly by se ze středu o stejnými úhly jako po sobě délky *ac, bc, ad, bd*, což plyne ze známé věty o kružnici: „Úsečka libovolné tečny, obsažená mezi dvěma *určitými* tečnami, promítá se ze středu kruhu úhlem stálé velikosti.“

Jsou-li ale tyto úhly stejné, jest i

$$f'g' = fg,\ h'i' = hi,\ f'k' = fk,\ h'l' = hl,$$

mají-li $f'g'$, $h'i'$, $f'k'$, $h'l'$ pro body $a'b'c'd'$ ten význam co fg, hi, fk, hl pro body $abcd$. Z toho plyne, že

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'd'}{b'd'},$$

čímž věta nadepsaná pro kružnici dokázána.

Kdybychom si myslili nyní čtyry paprsky určené středem o a body $abcd$ protnuty libovolnou přímkou Q, určovala by tato s oněmi čtyrmi přímkami čtyry body, jejichž dvojpoměr by se rovnal poměru $\frac{fg}{hi} : \frac{fk}{hl}$ a tedy dvojpoměru bodů a, b, c, d, tak že možno tvrditi: „Dvojpoměr čtyř bodů se promítáním nemění.“ (Neb myslíme-li si libovolné čtyry body na přímce P promítnuty z libovolného bodu o na libovolnou rovinu, jsou průměty jejich na přímce Q, která jest průmětem přímky P. Myslíme-li si pak to zobrazené, co se vyskytne v rovině určené bodem o a přímkou P, máme právě náš případ.)

Na základě toho, že dvojpoměr čtyř bodů promítáním se nemění, platí věta nadepsaná o každé křivce druhého stupně, an tyto vždy co průměty kružnice považovati možno a průmět tečny originálu jest tečnou průmětu a naopak.

Věta Brianchonova.

Přímky určené protilehlými vrcholy křivce stupně druhého opsaného šestiúhelníka procházejí bodem jediným.

Budiž kružnici opsán šestiúhelník zobrazený v *agbhik* (obr. 9), jehož protilehlé strany jsou stejnosměrné, přímky určené protilehlými vrcholy jeho budou, jak z jednoduchých důvodů patrno, procházeti středem kružnice K, tedy bodem jediným.

Mysleme si, jakoby se strana *gh* pohybovala, zůstávajíc ke kružnici tečnou a vyznačme si jednu její polohu *cd* a přihledněme k šestiúhelníku *acdbik*, v němž jen protilehlé strany dvou párů jsou stejnosměrné.

Bodem c a středem O, taktéž bodem d a středem o určeny jsou přímky, které na stranách ak a bi stanoví body e a f a poněvadž $od = oe$ a $oc = of$, jest $ef \parallel cd$ a tečnou kružnice.

Hledíme-li ke čtyrem tečnám $A\ B\ C\ D$, určují tyto na každé z tečen P a Q čtyry body a sice na P body a, e, k, u_∞, a na Q body v_∞, f, i, b, dle věty předešlé jest pak

$$\frac{ak}{ek} : \frac{au_\infty}{cu_\infty} = \frac{v_\infty i}{fi} : \frac{v_\infty}{fb}$$

nebo

$$= \frac{fb}{fi} : \frac{v_\infty b}{v_\infty i}$$

ale

$$\frac{au_\infty}{eu_\infty} = \frac{ae + eu_\infty}{eu_\infty} = \frac{ae}{eu_\infty} + 1 = 1$$

a podobně $\frac{bv_\infty}{iv_\infty} = 1$, tak že z předešlé srovnalosti plyne

$$\frac{ak}{ek} = \frac{fb}{fi} \text{ aneb } \frac{ak}{ak - ek} = \frac{fb}{fb - fi}$$

tedy

$$\frac{ak}{ae} = \frac{bf}{bi}$$

poněvadž ale $ae = bd$ a $bf = ac$

$$\frac{ak}{ac} = \frac{bd}{bi}.$$

Z této srovnalosti a z rovnosti uhlů

$$\sphericalangle kac = \sphericalangle ibd$$

plyne, že

$$\triangle akc \sim \triangle ibd$$

a tedy

$$\sphericalangle dib = \sphericalangle ack,$$

tedy jest

$$kc \parallel id.$$

Strany obou trojúhelníků akc a ibd jsou tedy stejnoměrné, pročež přímky určené příslušnými vrcholy jejich procházejí bodem jediným t. j. o'.

Tím dokázána věta Brianchonova o šestiúhelníku, který jest opsán kružnici, v němž protilehlé strany dvou párů jsou stejnosměrné. Dokázána tím tedy i o šestiúhelnících zmíněného tvaru, které jsou vepsány ellipsám — co průmětům pravoty kružnic.

Mysleme si nyní stranu *cd* tak dlouho pohybovanou, až průsečník její se stranou protilehlou *ki* má tu vlastnost, že přímka *M* ním procházející a stejnosměrná k jednomu z párů stran stejnosměrných má s kružnicí společné body.

Považujme pak *M* (obr. 9.) co obraz průmětu středmoty přímky nekonečně vzdálené jisté roviny. *K* jest pak obrazem jisté v oné rovině se nacházející hyperboly, jíž vepsán šestiúhelník, jehož dva páry protilehlých stran jsou stejnosměrné a o němž platí věta Brianchonova, poněvadž platí o obrazu jeho.

Je-li nyní libovolné křivce stupně druhého opsán libovolný šestiúhelník, možno jej považovati co průmět ellipse neb hyperbole vepsaného šestiúhelníku dle toho, jest-li přímka určená dvěma body, které jsou určeny protilehlými stranami dvou párů, danou křivku neprotíná nebo protíná. A poněvadž o šestiúhelníku, v němž dva páry protilehlých stran jsou stejnosměrné, platí věta Brianchonova, platí i o libovolném šestiúhelníku, který vepsán jest jakékoliv křivce II st.

Výklad k některým strojům fysikálním.

Píše

prof. Dr. **Fr. Houdek.**

8. Elektromotor P. Martina Eggera.

Jest to nejnovější stroj tohoto druhu.

Stroj ten má před ostatními takovými modely školními tyto přednosti:

1) sestrojení jeho jest velmi jednoduché a lze ho snadno vysvětliti,

2) jest účinnější, než všecky posavadní školní modely, a

3) jest pro přenášení pohybu zařízen, tak že jím možno podobně, jako v modelu parního stroje, závaží do výše zdvihati a tak pojem mechanické práce pokusem žákům vpraviti — dále