ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ČÁST MATEMATICKÁ

Über differenzierbare Kurven und Bögen.

Peter Scherk, Praha.

(Eingegangen am 4. Dezember 1936.)

Die vorliegenden ersten beiden Arbeiten dieser Reihe sind meinem Lehrer, Herrn Professor Dr. Edmund Landau, in dankbarer Verehrung zu seinem 60. Geburtstage am 14. Februar 1937 gewidmet.

I.

Zum Begriff der Charakteristik.

Einleitung.

Diese Note ist die erste einer Reihe von Arbeiten, in denen in Anlehnung an die Theorie der algebraischen Kurven allgemeinere reelle Kurven untersucht werden sollen. Dabei erweist es sich als nützlich, auch gewisse einfache Bögen zu behandeln. Die Aufgabe sei durch ein klassisch einfaches Beispiel aus der älteren Literatur erläutert: Juel [1][1]) betrachtet geschlossene Kurven mit stetiger Tangente in der projektiven Ebene, die von jeder Geraden in höchstens drei, von jeweils passenden Geraden in genau drei Punkten getroffen werden, und zeigt, daß die wohlbekannte Einteilung der irreduziblen ebenen algebraischen Kurven dritter Ordnung nach ihrem Verhalten im Reellen für diese allgemeinere Klasse von Kurven ungeändert gültig bleibt. Offensichtlich gibt es Kurven dieser Art, die nicht algebraisch, nicht einmal analytisch sind.

Die Natur der Fragestellung bringt es mit sich, daß die betrachteten Kurven und Bögen gewissen, möglichst schwach gewählten Differenzierbarkeitsforderungen unterworfen werden. Es wird aber häufig nützlich sein, auf die reiche Literatur über

[1]) Die Angaben beziehen sich auf das am Schluß der zweiten Arbeit befindliche Literaturverzeichnis.

allgemeinere Bögen und Kurven Bezug zu nehmen (vergl. etwa: HAUPT [3]), eine Literatur, die ihre Hilfsmittel der geometrischen Mengenlehre und der Theorie der reellen Funktionen entnimmt. Beide Richtungen haben den grundlegenden allgemeinen Ordnungsbegriff gemeinsam. Die Ordnung einer Mannigfaltigkeit mißt die obere Grenze der Mächtigkeiten des Durchschnitts der Mannigfaltigkeit mit anderen Mannigfaltigkeiten, die einer ausgezeichneten Schar angehören (vergl. HAUPT [4]). Besonders wichtig ist der lineare Ordnungsbegriff; hier besteht die ausgezeichnete Schar aus linearen Mannigfaltigkeiten. So gelangen wir etwa bei einem im Sinne von **1.7** differenzierbaren Bogen im dreidimensionalen projektiven Raum u. a. zu drei verschiedenen Definitionen der linearen Ordnung, indem wir ihn als die Mannigfaltigkeit bezw. seiner Punkte, Tangenten, Schmiegebenen auffassen und als seine Ordnung die obere Grenze der Anzahl der Schnittpunkte dieser Mannigfaltigkeit mit bezw. den Ebenen, Geraden, Punkten des Raumes definieren.

Die Übertragung von Ergebnissen der algebraischen Geometrie auf allgemeinere reelle Gebilde ist systematisch zuerst von JUEL unternommen worden. Eine schöne Übersicht über seine wichtigsten Arbeiten und über die Literatur bis zum Jahre 1924 findet sich bei MONTEL [1], weitere Literaturnachweise bei HAUPT [4]. Es sei noch darauf hingewiesen, daß Herr v. NAGY in seinen Untersuchungen über die sog. Kurven und Flächen vom Maximalindex algebraisch-geometrische Ergebnisse und Gedankengänge auf ausgedehnte Klassen reeller Kurven und Flächen zu übertragen vermochte; vergl. die bei v. NAGY [1] angegebene Literatur.

In der folgenden Note betrachten wir einen Bogen, der in einem seiner Punkte im Sinne von **1.6** differenzierbar ist. Dann gestattet ein einfaches Lemma die Einführung eines Zahlensystems, der Charakteristik des Punktes, die das Verhalten des Bogens in seiner Nähe beschreibt. Die systematische Untersuchung der Charakteristik sei auf spätere Arbeiten verschoben. Hier gebe nur der letzte Paragraph Beispiele seiner Anwendbarkeit.

Eine der Charakteristik im wesentlichen gleichwertige Folge von Vorzeichen wurde von Herrn DENK [1] eingeführt, um die Ordnung eines differenzierbaren elementaren Punktes (vergl. **1**) zu bestimmen. Einige einfache Eigenschaften der Projektion eines Bogens (**3.3** — **3.5**) findet der Leser ausführlicher nachgewiesen von Fräulein SAUTER [2]. An dieser Stelle möchte ich noch Herrn Prof. Dr. HAUPT für sein Interesse und seine Verbesserungsvorschläge danken.

1. Definitionen.

1.1 Wir betrachten (reelle) Bögen in einem n-dimensionalen projektiven Raume R_n. Hierbei werde unter einem Bogen das eindeutige und stetige Bild der Strecke verstanden; er kann also eindeutig und stetig auf einen Parameter s bezogen werden. Der zum Parameter s gehörige Punkt werde gleichfalls mit s bezeichnet.

1.2 Eine Umgebung des Parameters s auf der Parameterstrecke hat zum Bild eine Umgebung des Punktes s auf dem Bogen. Konvergiert eine Folge von Parameterwerten gegen den Parameter s, so nennen wir auch die zugehörige Folge von Punkten des Bogens konvergent gegen den Punkt s.

1.3 Die obere Grenze der Anzahl der in einer Hyperebene gelegenen Punkte eines Bogens heißt seine Ordnung. Die Ordnung eines Punktes s des Bogens ist die Ordnung einer hinreichend kleinen Umgebung von s. Offensichtlich ist die Ordnung eines Bogens im R_n mindestens gleich n.

1.4 Ein Elementarbogen ist ein Bogen n-ter Ordnung im R_n; ein elementarer Punkt des Bogens zerlegt passende Umgebungen in zwei Elementarbögen.

1.5 Der Punkt s heiße Stützpunkt bezw. Schnittpunkt bezüglich einer Hyperebene, wenn eine passende Umgebung von s keinen weiteren Punkt mit der Hyperebene gemein hat, und wenn die beiden Teilbögen, in die die Umgebung durch s zerlegt wird, auf derselben bezw. auf verschiedenen Seiten der Hyperebene liegen. Entsprechend werde die Hyperebene selbst als Stütz- oder Schnitthyperebene des Bogens in s bezeichnet. Eine nicht durch s gehende Hyperebene ist also Stützhyperebene.

1.6 Der Punkt s heiße differenzierbar, wenn sämtliche linearen Schmiegmannigfaltigkeiten $L_k^n = L_k^n(s)$ existieren ($k = -1, 0, 1, \ldots, n$): L_{-1}^n sei der leere Raum. L_{k-1}^n $(0 \leqq k < n)$ sei bereits definiert und seine Existenz gefordert. Dann soll die k-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit durch L_{k-1}^n und einen irgendwie gegen s rückenden Punkt des Bogens konvergieren; ihre Grenzlage wird dann gerade als k-dimensionale lineare Schmiegmannigfaltigkeit L_k^n bezeichnet. Es ist also L_0^n der Punkt s selbst, L_n^n der volle Raum R_n.[2])

Enthält eine Hyperebene L_k^n, aber nicht L_{k+1}^n $(-1 \leqq k < n)$, so sagen wir, sie enthalte „genau“ L_k^n.

1.7 Ein Bogen heiße differenzierbar, wenn jeder seiner Punkte differenzierbar ist.

---

[2]) Vergl. SAUTER [2].

2. Ein Lemma.

Der Punkt s sei differenzierbar. Dann ist jede Hyperebene Stütz- oder Schnitthyperebene in s, ausgenommen höchstens die Schmieghyperebene $L_{n-1}^n(s)$; ist s Schnitt- bezw. Stützpunkt bezüglich einer *Hyperebene, die genau $L_k^n(s)$ enthält, so bezüglich einer jeden solchen Hyperebene ($0 \leqq k \leqq n-2$).*

Die erste Behauptung ist klar: s sei weder Schnitt- noch Stützpunkt bezüglich der durch ihn gehenden Hyperebene E; dann wird E also von jeder Umgebung von s außerhalb von s getroffen, und es gibt eine Folge von Punkten $s_1, s_2 \ldots$ des Bogens, die in E gelegen sind und gegen s konvergieren. Es sei schon gezeigt, daß $L_{k-1}^n(s)$ in E liegt ($0 \leqq k \leqq n-1$). Die k-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten durch $L_{k-1}^n(s)$ und die s_i liegen in E und konvergieren definitionsgemäß gegen $L_k^n(s)$, das somit gleichfalls in E liegt. Nach $n-1$ Schritten ergibt sich die Behauptung.

Die zweite Behauptung kann etwa so eingesehen werden: Es sei $0 \leqq k < n-1$. Zwei Hyperebenen, von denen jede genau $L_k^n(s)$ enthält, lassen sich durch eine stetig von einem Parameter λ ($0 \leqq \lambda \leqq 1$) abhängige Schar von Hyperebenen $E(\lambda)$ verbinden, deren jede die gleiche Eigenschaft hat.

Konvergiert die Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ gegen λ_0 und sind alle $E(\lambda_i)$ Schnitt- bezw. Stützhyperebenen in s, so ist auch $E(\lambda_0)$ Schnitt- bezw. Stützhyperebene. Diese Bemerkung ist klar, wenn es eine Umgebung von s gibt, die von allen $E(\lambda_i)$ nur in s selbst getroffen wird; gäbe es aber keine solche Umgebung, so gäbe es eine Teilfolge der λ, sodaß die zugehörigen Hyperebenen den Bogen in Punkten träfen, die gegen s konvergierten; $E(\lambda_0)$ enthielte also $L_{k+1}^n(s)$. Daher ist für alle λ, die irgend einem λ_0 mit $0 \leqq \lambda_0 \leqq 1$ hinreichend nahe liegen, $E(\lambda)$ zugleich mit $E(\lambda_0)$ Schnitt- bezw. Stützhyperebene. Von hier aus läßt sich die Annahme, daß $E(0)$ Schnitt-, $E(1)$ aber Stützhyperebene ist, leicht zum Widerspruch führen.

3. Einführung der Charakteristik.

3.1 Der Punkt s sei differenzierbar. Dann kann ihm auf Grund des Lemmas 2 folgendermaßen eine Charakteristik zugeordnet werden: Es sei $0 \leqq k < n$; ist s Stütz- bezw. Schnittpunkt bezüglich einer Hyperebene, die genau L_{k-1}^n enthält, so werde L_k^n die Zahl 1 oder 2 zugeordnet, je nachdem eine Hyperebene, die genau L_k^n enthält, Schnitt- bezw. Stützhyperebene bezüglich s ist oder nicht. Ist die Schmieghyperebene L_{n-1}^n weder

Stütz- noch Schnitthyperebene, so werde ihr ∞ zugeordnet. Hiermit ist der Folge $L_0^n, \ldots, L_{n-1}^n$ eine Zahlenfolge

$$(a_0, \ldots, a_{n-1})$$

zugeordnet, die Charakteristik von s.

3.2 Herr DENK ordnet der Folge $L_{-1}^n L_0^n, \ldots, L_{n-1}^n$ eine Folge von Vorzeichen zu, und zwar der k-dimensionalen linearen Schmiegmannigfaltigkeit L_k^n $(-1 \leqq k \leqq n-1)$ das Zeichen $+$ oder das Zeichen $-$, je nachdem eine Hyperebene, die genau L_k^n enthält, Stütz- oder Schnitthyperebene ist.[3]) Es ist also a_k gleich 1 oder gleich 2, je nachdem L_k^n und L_{k-1}^n entgegengesetzte oder gleiche Vorzeichen haben.

Es werde noch die Charakteristik einer Projektion angegeben.[4])

3.3 Das Projektionszentrum liege auf $L_{k_0+1}^n$, aber nicht auf $L_{k_0}^n$ $(-1 \leqq k_0 < n)$. Die Projektion von s ist gleichfalls differenzierbar; sie habe die linearen Schmiegmannigfaltigkeiten $L_k^{n-1} = L_k^{n-1}(s)$ $(k = -1, 0, 1, \ldots, n-1)$. Dann ist L_k^{n-1} die Projektion von L_k^n bezw. von L_{k+1}^n für $-1 \leqq k < k_0$ bezw. $k_0 \leqq k \leqq n$.

3.4 Wird zum Projektionszentrum der Punkt s selbst gewählt, ist also $k_0 = -1$, so haben L_k^{n-1} und L_{k+1}^n $(k = -1, \ldots, n-2)$ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen, je nachdem eine Hyperebene, die genau L_0^n enthält, den Bogen stützt oder schneidet. Die Projektion aus s hat somit die Charakteristik $(a_1, \ldots, a_{n-1})$.

3.5 Es sei $0 \leqq k_0 < n$. Das Projektionszentrum liege auf $L_{k_0+1}^n$ aber nicht auf $L_{k_0}^n$. Dann gehören zu den Folgen $L_{-1}^{n-1}, L_0^{n-1}, \ldots, L_{n-2}^{n-1}$ und $L_{-1}^n, L_0^n, \ldots, L_{k_0-1}^n, L_{k_0+1}^n, \ldots, L_{n-1}^n$ die gleichen Vorzeichenfolgen. Die Projektion hat somit die Charakteristik $(a_0, \ldots, a_{k_0-1}, a'_{k_0}, a_{k_0+2}, \ldots, a_{n-1})$ mit $a'_{k_0} \equiv a_{k_0} + a_{k_0+1} \pmod 2$ für $k_0 < n-1$; für $k_0 = n-1$ hat die Projektion einfach die Charakteristik $(a_0, \ldots, a_{n-2})$.

4. Ordnung und Charakteristik eines differenzierbaren Punktes.

4.1 *Der Punkt s sei differenzierbar. Er habe die Charakteristik $(a_0, \ldots, a_{n-1})$. Es werde $A = a_0 + \ldots + a_{n-1}$ gesetzt. Dann hat s mindestens die Ordnung A* (vergl. **1.3**).

[3]) DENK [1]. Um der Schmieghyperebene ein Vorzeichen zuordnen zu können, muß man natürlich verlangen, daß sie wirklich Stütz- oder Schnitthyperebene ist.

[4]) Vergl. SAUTER [2].

4.2 Vorbemerkungen:

4.21 Wir können beim Beweise voraussetzen, daß a_{n-1} endlich ist, und daß die Schmieghyperebene von s den Bogen nur in s selbst trifft.

4.22 Man beweist leicht: Die Schmieghyperebene ist Stütz- oder Schnitthyperebene, je nachdem A gerade oder ungerade ist.

4.3 Zur Erleichterung der Induktion behaupten wir etwas mehr:

Es gibt eine gegen die Schmieghyperebene konvergente Folge von Hyperebenen, von denen jede den Bogen in wenigstens A gegen s rückenden Punkten schneidet (d. h. durchsetzt, nicht stützt).

Die Behauptung erledigt sich für $n = 2$ durch Diskussion der vier möglichen Fälle. Sie sei bis $n - 1$ bewiesen.

Die Folge von Punkten $s_1, s_2, \ldots$ strebe gegen s. Die Projektion des Bogens aus einem s_i hat nach **3.5** die Charakteristik $(a_0, \ldots, a_{n-2})$ in s. Daher ergibt sich aus der Induktionsannahme: Zu jedem s_i gibt es eine gegen die Hyperebene durch s_i und die Hypertangente von s strebende Folge von Hyperebenen E_{ik} durch s_i ($k = 1, 2, \ldots$), so daß jede Hyperebene E_{ik} den Bogen in wenigstens $A - a_{n-1}$ mit wachsendem k gegen s konvergenten Punkten schneidet. Für hinreichend große k sind diese Schnittpunkte sicher von s_i verschieden. Hieraus läßt sich sofort entnehmen, daß aus dem System der E_{ik} eine neue Folge von Hyperebenen $E_i = E_{ik_i}$ mit folgenden Eigenschaften ausgewählt werden kann: Sie konvergiert gegen die Schmieghyperebene von s und jede Hyperebene E_i trifft den Bogen in s_i und schneidet ihn außerdem in wenigstens $A - a_{n-1}$ Punkten, die für hinreichend hohen Index i dem Punkte s beliebig nahe liegen. Indem die E_i und die s_i passenden kleinen Änderungen unterworfen werden, läßt sich erreichen, daß die E_i den Bogen in den s_i schneiden und sonst alle obigen Eigenschaften behalten.

Ist $a_{n-1} = 1$, so leistet die neue Folge schon das Verlangte.

Es sei $a_{n-1} = 2$. Ich grenze eine beliebige Umgebung um s ab. Ist i groß genug, so schneidet E_i diese Umgebung in wenigstens $A - 1$ Punkten. Wir nehmen an, unendlich viele E_i schneiden die Umgebung in nicht mehr als $A - 1$ Punkten. Diese Hyperebenen bilden eine neue Folge. Die Endpunkte der Umgebung lägen auf derselben oder auf verschiedenen Seiten einer jeden Hyperebene der Folge, also auch der Schmieghyperebene, je nachdem $A - 1$ gerade oder ungerade ist. Die Schmieghyperebene wäre also Stütz- oder Schnitthyperebene, je nachdem A ungerade oder gerade ist. Dies widerspricht der Bemerkung **4.22**; aus der Falschheit der obigen Annahme folgt unmittelbar die Behauptung.

4.4 *Die Ordnung von s kann*, wie Beispiele zeigen, *größer als A sein*; *kommt aber zu den Voraussetzungen von* 4.1 *hinzu, daß s elementar ist, so hat s* nach einem Satze von Herrn DENK *genau die Ordnung A.*[5])

*

O derivovatelných křivkách a obloucích.

I. K pojmu charakteristiky.

(Obsah předešlého článku.)

Tento článek je první v řadě prací, v nichž budou vyšetřovány — s hlediska obdobného tomu, jež se uplatňuje v teorii algebraických křivek — obecnější reálné oblouky a uzavřené křivky. Objasněme problém klasicky jednoduchým příkladem ze starší literatury: Juel vyšetřoval v projektivní rovině uzavřené křivky, jejichž tečna se spojitě mění a jež jsou každou přímkou proťaty nejvýše ve třech bodech a aspoň jednou přímkou právě ve třech bodech; ukázal pak, že známé rozdělení ireducibilních rovinných algebraických křivek třetího řádu podle jejich průběhu v reálném oboru zůstává beze změny v platnosti pro tuto obecnější třídu křivek. Samozřejmě existují křivky tohoto druhu, jež nejsou algebraické, ba ani analytické.

V tomto článku vyšetřuji oblouk, který v jednom svém bodě je v jistém smyslu derivovatelný. Potom dovoluje nám jednoduchá pomocná věta zavésti systém čísel, t. zv. charakteristiku bodu, která charakterisuje průběh oblouku v blízkosti tohoto bodu. Dokazuji, že řád derivovatelného bodu má dolní hranici, závisící pouze na jeho charakteristice. Při tom „řád oblouku“ znamená maximální počet jeho průsečíků s libovolnou nadrovinou; „řád bodu“ znamená pak řád dostatečně malého okolí tohoto bodu.

---

5) DENK [1].