Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Zahradník

Příspěvek k theorii kuželoseček

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 28 (1899), No. 1, 37--45

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122510`

Příspěvek k theorii kuželoseček.

Podává

Dr. Karel Zahradník,

ř. professor mathematiky při universitě v Záhřebě.

Sestrojení tečny.

1. Souřadnice x, y kteréhokoliv bodu M kuželosečky

$$y^2 = 2px - xq^2 \tag{1}$$

můžeme vyjádřiti pomocí racionálného parametru u rovnicemi

$$x = \frac{2p}{u^2 + q}, \quad y = \frac{2pu}{u^2 + q}, \tag{2}$$

kdež značí, jak známo,

$$u = \operatorname{tg} MOX.$$

Tečna bodu M kuželosečky jest

$$2uy - (u^2 - q)\, x = 2p.$$

Táž protíná tečnu vrcholu A, jenž jest diametrálným bodem počátku souřadnic O v bodě M_1. Souřadnice bodu M_1 jsou

$$x_1 = 2\frac{p}{q}, \quad y = \frac{p}{q}. \tag{3}$$

Průvodič OM bodu M protíná tečnu vrcholu A v bodě B, jehož souřadnice jsou

$$x' = \frac{2p}{q}, \quad y' = \frac{2p}{q} u. \tag{4}$$

Bod M_1 půlí tudíž délku AB, z kteréžto vlastnosti vychází následující konstrukce tečny kuželosečky se středem v konečnu. *Ze středu S kuželosečky veďme rovnoběžku s průvodičem OM; tato rovnoběžka protíná tečnu bodu diametralného počátku souřadnic v bodě M_1. Spojnice MM_1 jest hledaná tečna.*

2. Kdybychom jiný bod O′ kuželosečky pokládali za počátek souřaduic, průměr toho bodu za X, tečnu jeho za osu Y, nemění se tvar rovnice kuželosečky; parametr u je v případě

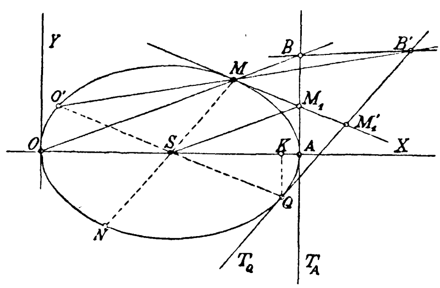
tomto dělící poměr paprsku OM vzhledem k osám souřadnic, totiž

$$u = \frac{\sin(\mathrm{XOM})}{\sin(\mathrm{MOY})}.$$

Jelikož rovnice (3) i (4) nemění svůj tvar, vychází následující sestrojení tečny bodu M kuželosečky:

Průvodič $\overline{O'M}$ protíná tečnu bodu Q diametralného bodu O′ v B′. Spojnice středu M_1' délky QB′ s bodem M stanoví tečnu bodu M.

Souřadnice bodů B a M_1 dané rovnicemi (3) a (4) závisejí pouze na velikosti hlavní osy kuželosečky a na parametru *u*. Můžeme tudíž říci: Dán budiž svazek kuželoseček o společné hlavní ose OA. Krajním bodem O této osy veďme paprsek, jenž



Obr. 1.

jednotlivé kuželosečky svazku v bodech $M^{(r)}$ protíná a tečnu společného vrcholu A v bodě B. Spojnice $M_1M^{(r)}$ středu M_1 délky AB s body $M^{(r)}$ jsou tečnami na jednotlivé kuželosečky svazku.

3. Budiž opět OA hlavní osa, T_A tečna vrcholu A, O počátek souřadnic, OA osou X pravoúhelné soustavy souřadnic. Dále budiž O′Q určitý průměr kuželosečky, T_Q tečna bodu Q. Promítněme bod M kuželosečky dané s bodu O, O′ na tečnu T_A resp. T_Q. Buďtež B, B′ dotýčné projekce. Dle předcházejícího odstavce leží středy M_1' délek QB′ příslušných bodům O′ (při proměnlivém O′ na kuželosečce) na přímce, jež se dotýká dané kuželosečky v bodě M.

Buďtež naopak nyní body O, O′ pevné na kuželosečce a bod M proměnlivý. Za každý bod M obdržíme dva body B, B′ prvý na T_A, druhý na T_Q. Při proměnlivém M obalují spojnice $\overline{BB'}$ kuželosečku, jež se dotýká tečen T_A, T_Q.

Důkaz synthetický jest jednoduchý. Promítneme-li s vrcholu O kuželosečky body její na tečnu T_A, obdržíme řadu bodů (B). Podobně jest řada bodů (B′) projekcí bodů kuželosečky na tečnu T_Q bodu Q, jenž je diametrálným bodu O′, vzatému za střed projekce. Tyto dvě řady bodové jsou projektivné. Vyjdeme-li od bodu B na T_A, veďme OB, čímž obdržíme bod M na kuželosečce a $\overline{O'M}$ určuje na T_Q sdružený bod B′. Naopak vracíme se od bodu B′ jednoznačně k bodu B. Body B, B′ přímek T_A, T_Q jsou tím ve vztahu jednoznačném, t. j. projektivném; spojnice jejich obaluje tudíž kuželosečku, jež se dotýká spojnic řad bodových T_A, T_Q. Že ty dvě řady bodové nejsou v perspektivné poloze, vychází z toho, že se nenacházejí v jejich průseku dva body sdružené.

4. Analytický důkaz je též jednoduchý. Budiž t parametr bodu O′ dané kuželosečky a x, y jeho souřadnice. Parametr v bodu Q diametrálného bodu O′ vychází z relace

$$tv = -q,$$

je tudíž

$$v = -\frac{q}{t}.$$

Označíme-li x', y' souřadnice bodu Q, najdeme

$$x' = \frac{2pt^2}{q(t^2+q)}, \quad y' = -\frac{2pt}{t^2+q}. \tag{5}$$

Totéž plyne i geometricky, neboť

$$x' = \text{OA} - \text{KA} = 2\frac{p}{q} - x, \quad y' = \text{QK} = -y.$$

Z posledních rovnic plyne opět

$$\frac{y'}{x'} = v = \frac{2\frac{p}{q} - x}{-y} = -\frac{q}{t}.$$

Rovnice tečny T_Q jest

$$(6) \qquad 2qty + q(q - t^2)x = -2pt^2$$

a rovnice spojnice*) $\overline{OM}$ jest

$$(7) \qquad (t + u)y - (tu - q)x = 2p.$$

Tečna T_Q protíná spojnici $\overline{OM}$ v bodě B′, jehož souřadnice jsou

$$(8) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{2pt(2q + t^2 + tu)}{q(t^2 + q)(t - u)} \\ y &= \frac{2p(-q^2 + t^3u)}{q(t^2 + q)(t - u)}. \end{aligned}$$

Souřadnice ξ, η spojnice $\overline{BB'}$ nabudeme

$$(9) \qquad \begin{aligned} \xi &= \frac{-q^3 + q(t^2 + q)u - q^2tu}{2p(q + tu)^2} \\ \eta &= \frac{-q[q(u + t) + 2ut^2]}{2p(q + tu)^2}. \end{aligned}$$

Budiž nyní u proměnlivo, t. j. bod M mění svoji polohu na dané kuželosečce, tu obaluje spojnice $\overline{BB'}$ křivku, která jest, jak již z rovnice (9) patrno, druhé třídy. Rovnice (9) ji vyjadřují v souřadnicích tangenciálních.

V pravoúhlých souřadnicích bodových jest rovnice této kuželosečky

$$(10) \qquad [qtx + (q + 2t^2)y - 4pt]^2 + 4[q(t^2 + q)x + 2pt^2][qx + ty - 2p] = 0.$$

Z rovnice této poznáváme, že nezávisle na poloze bodu O′ na kuželosečce obálka vždy prochází počátkem souřadnic (vrcholem O) a že se dotýká průvodiče OA′ bodu A′, jenž jest diametrálný bodu O′, v počátku souřadnic O. Bodem O′ t. j. parametrem t, jest již kuželosečka (10) určená. Čtyřem bodům t_1, t_2, t_3, t_4 na základní kuželosečce příslušejí čtyři kuželosečky

*) Z rovnice (7) plyne souměrnost bodů t a u k ose X, je-li $t + u = 0$, souměrnost k ose Y, platí-li $tu = q$. Z obou podmínek souměrnosti k osám obdržíme podmínku souměrnosti vzhledem k středu kuželosečky, t. j. podmínku diametrálnosti dvou bodů kuželosečky.

(10), jež se protínají v bodě O pod týmž dvojpoměrem, jenž oněm bodům přísluší a jest roven (t_1, t_2, t_3, t_4).

5. Všem bodům základní kuželosečky přísluší řada kuželoseček, jejichž obálka jest křivka dvanáctého stupně.

Každým bodem roviny probíhají čtyři kuželosečky (10), příslušné parametrům t_1, t_2, t_3, t_4, tudíž čtyřem bodům na základní kuželosečce. Hledáme-li geom. místo bodů (x, y), jichž kuželosečky příslušejí čtveřinám bodů na základní kuželosečce té vlastnosti, že se v harmonických svazcích paprskových promítají aneb což totéž, že se ty čtyři kuželosečky v počátku souřadnic harmonicky protínají, srovnejme rovnici (10) dle klesajících mocnin parametru t, totiž

$$A_0t^4 + A_1t^3 + A_2t^2 + A_3t + A_4 = 0. \tag{11}$$

Podmínka harmoničnosti*) jest

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_7 \end{vmatrix} = 0.$$

Jelikož jsou A_h funkce druhého stupně vzhledem k x, y, je hledané geometrické místo křivka stupně šestého.

Kdyby koeficienty rovnice (11) vyhovovaly podmínce **)

$$A_0A_4 + 3A_2^2 = 4A_1A_3, \tag{12}$$

činily by kuželosečky jdoucí bodem (x, y) skupiny aequianharmonické. Z rovnice (12) bezprostředně vychází, že geometrické místo takových bodů (x, y) jest křivka stupně čtvrtého.

7. Z rovnice (8) plyne opět, že je geom. místo bodů B′, je-li M bod pevný, O′ proměnlivý, racionalná křivka třetího stupně, mající tři asymptoty reálné v případě, že je základní kuželosečka hyperbola; jedna reálná a dvě imaginárné asymptoty, je-li základní kuželosečka ellipsa. Úběžné body uvedené racionální křivky třetího stupně odpovídají bodu M a úběžným bodům základní kuželosečky.

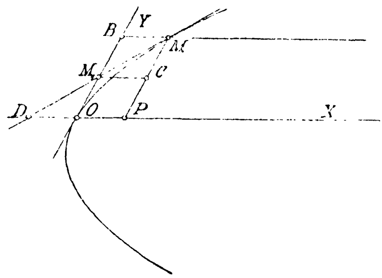
---

*) *Dr. H. Durège: „Ebene Curven dritter Ordnung"*. 1871, Leipzig, pg. 25. nebo *Cremona-Weyr*: „Úvod do geometrické theorie křivek rovinných". Praha, 1873, pg. 32.

**) L. c. pg. 25. a 33.

8. Pro parabolu platí táž konstrukce tečny; třeba pouze uvážiti, že je střed paraboly v nekonečné vzdálenosti a tudíž všecky průměry paraboly rovnoběžny.

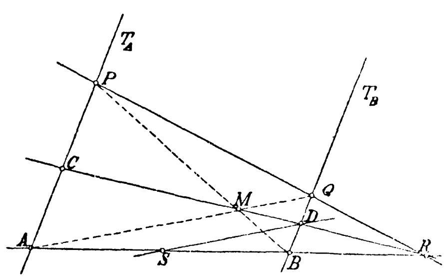
Je-li dán bod O paraboly, její průměr tím bodem jdoucí a tečna téhož bodu, mimo to bod M paraboly, veďme, chceme-li tečnu bodu M sestrojiti, bodem tímto rovnoběžku s průměrem OX,



Obr. 2.

jenž tečnu OY bodu O protíná v bodě B. Spojnice M_1M středu M_1 délky OB s bodem M jest hledaná tečna. Jelikož DO $=$ OP, neboť $OM_1 = PC = CM$, shledáváme souvislost této koustrukce tangenty s konstrukcí pomocí subtangenty.

9. Mohli bychom obdržeti vzpomenutou konstrukci tečny bodu M kuželosečky z Pascalovy věty, předpokládajíce, že známe



Obr. 3.

bod kuželosečky a dvě rovnoběžné tečny a zároveň body dotyčnosti A, B. Máme tu Pascalův šestiúhelník AABBMM, kdež je na příklad AA daná tečna T s dotyčným bodem A. Dle schematu

$$\left.\begin{array}{l} T_A \;.\,.\; \overline{BM} \cdot - \cdot P \\ AB \;.\,.\,.\; \overline{MM} \\ T_B \;.\,.\,.\; \overline{AM} \cdot - \cdot Q \end{array}\right\} \Pi$$

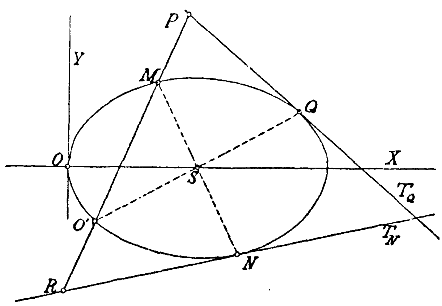
najdeme bod $T_A . \overline{BM} \equiv P$, $T_B . \overline{MA} \equiv Q$. Spojnice $\overline{PQ}$ jest Pascalova přímka šestiúhelníka AABBMM vepsaného kuželosečce. Spojnice bodu $R \equiv \overline{AB} . \overline{PQ}$ s bodem M jest hledaná tečna, Jelikož je $T_A \parallel T_B$, půlí $\overline{MR}$ délku $\overline{AP}$ v bodě C, délku BQ v bodě D. Střed S průměru AB je střed kuželosečky i platí jako dříve $SD \parallel AM$, $DM \equiv T_M$.

Nová vlastnost kuželosečky.

10. *Nechť jsou $O'Q$, MN dva průměry kuželosečky; spojnice $\overline{O'M}$ nechť protíná tečny diametrálných bodů Q, N v bodech P, R tak, že*

$$RO' = MP.$$

Tuto vlastnost dokážeme tím, že dokážeme rovnost pravoúhlých projekcí těchto úsečí na ose X.



Obr. 4.

Buďtež u, t parametry bodu M, O; parametr bodu P diametrálného bodu O′ jest $-\frac{q}{t}$, proto souřadnice bodu P [viz odst. 4., rovnice (6), (7), (8)] jsou

$$(8') \quad \begin{aligned} x &= \frac{2pt\,(2q + t^2 + tu)}{q\,(t^2 + q)\,(t - u)} \\ y &= \frac{2p\,(-q^2 + t^3u)}{q\,(t^2 + q)\,(t - u)} \end{aligned}$$

a souřadnice bodu R obdržíme, píšeme-li u místo t v rovnicích (8′)

$$(13)\qquad \begin{aligned} x &= \frac{2pu\,(2q + u^2 + tu)}{q\,(u^2 + q)\,(u - t)} \\ y &= \frac{2p\,(-q^2 + u^3 t)}{q\,(u^2 + q)\,(u - t)}. \end{aligned}$$

Průmět úsečky MP na ose X rovná se rozdílu úseček bodů P a M; je tudíž jednak

$$\frac{2pt\,(2q + t^2 + tu)}{q\,(t^2 + q)\,(t - u)} - \frac{2p}{u^2 + q}$$

aneb

$$\frac{2pt}{q\,(t - u)} + \frac{2pt\,(tu + q)}{q\,(t^2 + q)\,(t - u)} - \frac{2p}{u^2 + q}.$$

Týmž způsobem obdržíme průmět úsečky RO′ na ose X

$$\frac{2p}{t^2 + q} - \frac{2pu}{q\,(u - t)} - \frac{2pu\,(tu + q)}{q\,(u^2 + q)\,(u - t)}.$$

Tyto průměty jsou rovny, neboť platí

$$\frac{2pt}{q\,(t - u)} + \frac{2pt\,(tu + q)}{q\,(t^2 + q)\,(t - u)} - \frac{2p}{u^2 + q} \equiv \frac{2p}{t^2 + q} + \frac{2pu}{q\,(t - u)} + \frac{2pu\,(tu + q)}{q\,(u^2 + q)\,(t - u)}.$$

Převedeme-li totiž všechny členy na levou stranu a zkrátíme-li činitelem $\frac{2p}{q}$, obdržíme po krátké redukci

$$1 - \frac{t^2u^2 - q^2}{(t^2 + q)\,(u^2 + q)} - q\,\frac{t^2 + u^2 + 2q}{(t^2 + q)\,(u^2 + q)} \equiv 0$$

aneb

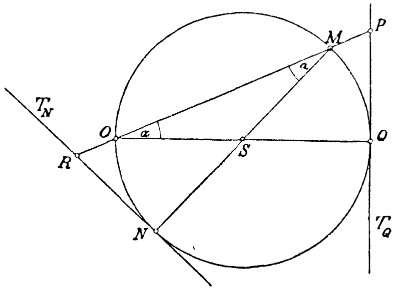
$$(t^2 + q)\,(u^2 + q) + q^2 \equiv t^2u^2 + q\,(t^2 + u^2 + 2q),$$

z kteréhož tvaru totožnost vysvítá. Tím jest i dokázáno, že

$$\mathrm{MP} = \mathrm{RO}'.$$

11. U ellipsy mohli bychom mnohem jednodušeji tuto vlastnost dokázati. Kruh jest orthogonalným průmětem ellipsy.

Obrazec 4. přejde tu v obrazec 5., kdež téhož označení jako v obrazci 4. jsme užili. Trojúhelníky OQP a MNR jsou shodny,



Obr. 5.

neboť jsou pravoúhlé, dále je $\sphericalangle$ NMR $=$ $\sphericalangle$ POQ a OQ $=$ MN, tudíž RM $=$ OP a proto MP $=$ RO.

Jelikož horní vztah platí pro kruh a parallelnou projekcí se nemění, platí též pro ellipsu.

Věstník literární.

Arithmetika pro I. a II. třídu škol gymnasijních. Sepsal *František Tůma,* professor c. k. gymnasia v Č. Budějovicích. Vydání páté. Cena seš. 1·50 K., váz. 1·80 K. V Praze, 1898. Tiskem I. L. Kobra. Nákladem vlastním. Nové vydání této učebnice, od r. 1886 na gymnasiích zavedené (viz Časopis roč. XVI.), neliší se podstatně od vydání čtvrtého, o němž Časopis roč. XXIV. pochvalný přinesl posudek z péra vynikajícího odborníka prof. dra Vaňause. Předsevzaté změny, pokud nejsou rázu toliko stylistického, nesou se hlavně k rozmnožení příkladů k cvičení. Mimo to přehledněji a srozumitelněji podány jsou počty na sto a ve stu. Bylo by si ještě přáti, aby výklad o počítání zlomky obyčejnými založen byl na předchozím výkladu o zlomcích desetinných. Tím předešlo by se parallelním a zdánlivě různým výkladům některých výkonů početních se zlomky. Rovněž doporučuje se založiti výklad o počítání čísly mnohojmennými, rozvodu a převodu na obdobném počítání čísly desetinnými. Lze tudíž i v tomto směru užiti methody induktivní, již pan autor v učebnici s prospěchem sleduje. V počtu procentovém s výhodou jest zavésti „jednotku" 1% základu, t. j. stý díl základu. Výnos na př. 684 jednotek po 3% (§ 61, a) vypočítáme takto: 1% z 684 jest 6·84, 3% tudíž $6{\cdot}84 \times 3$ atd. Obdobně vedeme si při vypočítávání procenta i základu, berouce