František Josef Studnička

Počátkové nauky o determinantech. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 6 (1877), No. 3, 97--105

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122487`

Počátkové nauky o determinantech.

Pro žáky středních škol

píše

Dr. F. J. Studnička.

(Pokračování.)

Nauka a determinantech byla, jak známo, jen mimochodem vypěstována při řešení rovnic stupně prvního a dosáhla již značného zdokonalení, nežli se jí dostalo přesného odůvodnění formálního, zejména od výtečného mathematika francouzského jmenem *Cauchy*. A nelze upříti, že snad nikde se tak přirozeně nepřijde k této „algebře v algebře", jak jednou nazval *Sylvestr* tuto nauku, ba možná i tvrditi, že by i dnes mathematik osamělý a algorithmu tohoto neznající byl při řešení rovnic lineárních anebo při spřízněném problemu eliminace veden k výrazům kombinačním, jež nazýváme determinanty.

Poněvadž se nám jedná o to, abychom se tu co nejpohodlněji seznámili s těmito algebraickými útvary a jich vlastnostmi, volme k tomu cíli cestu historickou a prozkoumejme především podstatu úlohy svrchu jmenované; i pochopíme pak nejsnadněji, jak se objevení výrazů determinantních takořka samo počtářům vnucovalo tak dlouho, až se jim dostalo patřičného uznání, načež byly prohlášeny za samostatný předmět mathematického badání. Byvše dříve pouhou pomůckou při řešení rovnic linearních, staly se pak mocnou pákou při rozmanitých výzkumech, takže tvrditi smíme, že velikého vlivu měly na moderní pokrok mathematiky a že i dále mnoho výtečných služeb jí proukáží.

Jest to zjev, jaký se dosti zhusta vyskytuje v dějinách lidských vynálezů a lidského pokroku. Při řešení zvláštní úlohy nějaké vymyslí si lidský důvtip nějaký vhodný prostředek, kterým se stane pokrok jakýs takýs; častějším užíváním a obnovováním zdokonaluje se pak postupně tento prostředek, až se z něho vyvine nástroj, jehož působnost se vztahuje k celému oboru úloh příbuzných.

Dřívější obmezený pomocník stane se tak během času samostatným pracovníkem, an zavádí nové obraty co nejmohutnější. Uveďme si jen do paměti způsob, jakým se domohl parní stroj nynějšího svého vlivu světem vládnoucího. S počátku měl v rukou *Newcomena* při čerpání vody zastupovati slabou sílu lidskou a během času stal se z něho motor vším hýbající, jehož takořka nejprostší jest úlohou — čerpati vodu!

A podobně dálo se s pojmem determinantním; s počátku byl jenom pomůckou při řešení rovnic stupně prvního a během jednoho století tak se všestranně zdokonalil, že sáhá již skoro do všech oborů mathematických, a řešení rovnic lineárních že mu jest jen chatrnou hračkou, jakž z následujícího výkladu zajisté vyjde na jevo.

O řešení rovnic stupně prvního.

a) O jedné neznámé.

Všeobecný tvar rovnic stupně prvního o jedné neznámé jest

$$ax = n, \tag{1}$$

takže řešením se tu obdrží

$$x = \frac{n}{a}, \tag{2}$$

tedy pro x zlomek, jehož jmenovatelem jest součinitel neznámé, čitatelem pak veličina o sobě na pravé straně stojící.

b) O dvou neznámých.

Všeobecný tvar tu jest

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= n_1 \\ a_2 x + b_2 y &= n_2 ; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

vyloučíme-li zde $\binom{y}{x}$, obdržíme rovnici, obsahující jen $\binom{x}{y}$, tedy případ předešlý. K tomu cíli násobme první rovnici soustavy (3) veličinou b_2, druhou pak b_1 a odečtěme druhou od první; i obdržíme

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x = n_1 b_2 - n_2 b_1$$

a tudíž dalším řešením přímo

$$x = \frac{n_1 b_2 - n_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}\,; \tag{4}$$

a vyměníme-li tu a za b aneb, což jest totéž, násobíme-li první rovnice soustavy (3) veličinou a_2, druhou pak a_1 a odečteme-li první od druhé,

$$y = \frac{n_1 a_2 - n_2 a_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1} = \frac{a_1 n_2 - a_2 n_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}\,. \tag{5}$$

Jak patrno, vyjadřuje se tu x a y opět zlomkem, jehož jmenovatel se skládá stejným spůsobem jen ze součinitelů strany levé obou rovnic podlé schematu čtverečného, *Gaussem* zavedeného,

$$\begin{matrix} a_1 & & b_1 \\ & \times & \\ a_2 & & b_2 \end{matrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1\,,$$

kdežto čitatel podobně jest složen z veličin na pravé straně stojících a ze součinitelů druhé neznámé, takže se obdrží stejným spůsobem jako jmenovatel, položí-li se jen příslušné hodnoty se strany pravé na místo součinitelů veličiny hledané, tedy podlé schematu předešlého

$$\text{pro } x \text{ čitatel} \quad \begin{matrix} n_1 & & b_1 \\ & \times & \\ n_2 & & b_2 \end{matrix} = n_1 b_2 - n_2 b_1$$

$$y \quad \text{„} \quad \begin{matrix} a_1 & & n_1 \\ & \times & \\ a_2 & & n_2 \end{matrix} = a_1 n_2 - a_2 n_1.$$

Pravidlo takto vytknuté možná ještě jednodušeji vyjádřiti; zavedeme-li totiž pro společného jmenovatele označení Δ, takže

$$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1\,,$$

a pro substituci kolmou čáru /, k níž se napíše, zač se má co klásti, takže na př. ${}^{x}/{}^{2}x^3 = 2^3$ znamená a čte se „za x (vlož) 2 do (výrazu) x^3“, bude podlé vzorce (4) a (5)

$$x = \frac{{}^{a}/{}^{n}\Delta}{\Delta}\,, \quad y = \frac{{}^{b}/{}^{n}\Delta}{\Delta}\,, \tag{6}$$

což tedy znamená, že při $\binom{x}{y}$ v čitateli zavésti nutno místo $\binom{a}{b}$ veličinu n.

Podlé toho plyne na př. z rovnic

$$3x - 5y = 2$$
$$2x + 3y = 5\,,$$

dáme-li schematické čtverce do závorek rovných

$$x = \begin{vmatrix} 2 & & -5 \\ & \times & \\ 5 & & 3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 3 & & -5 \\ & \times & \\ 2 & & 3 \end{vmatrix} = \frac{31}{19}\,,$$

$$y = \begin{vmatrix} 3 & & 2 \\ & \times & \\ 2 & & 5 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 3 & & -5 \\ & \times & \\ 2 & & 3 \end{vmatrix} = \frac{11}{19}\,.$$

c) O třech neznámých.

Všeobecný tvar rovnic stupně prvního o třech neznámých jest

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= n_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= n_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= n_3\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Vyloučí-li se tu napřed z první a druhé rovnice a pak z druhé a třetí rovnice veličina z, povstanou dvě rovnice mezi x a y, tedy případ předcházející, jehož řešení bylo právě provedeno.

K tomu cíli násobme první rovnici veličinou c_2, druhou c_1 a odečtěme, takže bude

$$(a_1 c_2 - a_2 c_1)\, x + (b_1 c_2 - b_2 c_1)\, y = n_1 c_2 - n_2 c_1\ ;$$

podobně násobme druhou rovnici veličinou c_3 a třetí c_2 a odečtěme opět, načež obdržíme

$$(a_2 c_3 - a_3 c_2)\, x + (b_2 c_3 - b_3 c_2)\, y = n_2 c_3 - n_3 c_2\,.$$

Z těchto dvou rovnic, obsahujících jen x a y, obdržíme pak, porovnáme-li je se soustavou (3), kladouce pro krátkost

$$a_1c_2 - a_2c_1 = (a_1\, c_2),\ b_1c_2 - b_2c_1 = (b_1\, c_2),\ n_1c_2 - n_2c_1 = (n_1\, c_2)\,,$$
$$a_2c_3 - a_3c_2 = (a_2\, c_3),\ b_2c_3 - b_3c_2 = (b_2\, c_3),\ n_2c_3 - n_3c_2 = (n_2\, c_3)\,,$$

pomocí vzorce (4) přímo

$$x = \frac{(n_1 c_2)(b_2 c_3) - (n_2 c_3)(b_1 c_2)}{(a_1 c_2)(b_2 c_3) - (a_2 c_3)(b_1 c_2)},$$

z čehož patrno, že tu x vyjadřuje se opět zlomkem, jehož čitatel i jmenovatel mají stejné složení a čitatel zároveň plyne ze jmenovatele, dosadí-li se hodnoty na pravé straně stojící za součinitele hledané veličiny x.

Vyměníme-li pak a za b, obdržíme podobně y a vyměníme-li tu b za c, konečně i z. Abychom ještě kratší vzorce obdrželi, proveďme násobení svrchu naznačené, načež si zjednáme, zkrátivše co možná,

$$\begin{aligned} x &= \frac{n_1 (b_2 c_3) + n_2 (b_3 c_1) + n_3 (b_1 c_2)}{a_1 (b_2 c_3) + a_2 (b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2)}, \\ y &= \frac{n_1 (c_2 a_3) + n_2 (c_3 a_1) + n_3 (c_1 a_2)}{b_1 (c_2 a_3) + b_2 (c_3 a_1) + b_3 (c_1 a_2)}, \\ z &= \frac{n_1 (a_2 b_3) + n_2 (a_3 b_1) + n_3 (a_1 b_2)}{c_1 (a_2 b_3) + c_2 (a_3 b_1) + c_3 (a_1 b_2)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Užijeme-li dřívějších symbolů čtverečných, obdržíme pro stejného jmenovatele, opět písmenem $\varDelta$ označeného, výraz

$$\begin{aligned} \varDelta &= a_1 \left|\begin{array}{cc} b_2 & c_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ b_3 & c_3 \end{array}\right| + a_2 \left|\begin{array}{cc} b_3 & c_3 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ b_1 & c_1 \end{array}\right| + a_3 \left|\begin{array}{cc} b_1 & c_1 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ b_2 & c_2 \end{array}\right|, \\ &= b_1 \left|\begin{array}{cc} c_2 & a_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ c_3 & a_3 \end{array}\right| + b_2 \left|\begin{array}{cc} c_3 & a_3 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ c_1 & a_1 \end{array}\right| + b_3 \left|\begin{array}{cc} c_1 & a_1 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ c_2 & a_2 \end{array}\right|, \\ &= c_1 \left|\begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ a_3 & b_3 \end{array}\right| + c_2 \left|\begin{array}{cc} a_3 & b_3 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ a_1 & b_1 \end{array}\right| + c_3 \left|\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ a_2 & b_2 \end{array}\right|, \end{aligned}$$

kterýž možná jedním symbolem čtverečným zahrnouti, sestavíme-li součinitele neznámých dané soustavy (8) do čtverce, takže tu bude podobně

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix};$$

při čemž vyčíslení stane se takto: Pod třetí řádek připojíme třeba jen v duchu, dole dva řádky první, pak sestavíme tři, součiny příčné od levé ruky k pravé s označením kladným, opačné pak tři se znamením záporným a tyto součiny konečně sečteme; obdržímeť tu

$$\begin{array}{r|ccc|l}
\Delta = & a_1 & b_1 & c_1 & \\
 & a_2 & b_2 & c_2 & \\
 & a_3 & b_3 & c_3 & \\
c_1 b_2 a_3 \; - & a_1 & b_1 & c_1 & + \; a_1 b_2 c_3 \\
c_2 b_3 a_1 \; - & a_2 & b_2 & c_2 & + \; a_2 b_3 c_1 \\
c_3 b_1 a_2 \; - & & & & + \; a_3 b_1 c_2
\end{array}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 \\ -c_1 b_2 a_3 - c_2 b_3 a_1 - c_3 b_1 a_2 \end{array} \right\}$$

A podobně vyjádří se čitatelové obsažení ve vzorcích (8), znamená-li opět symbol ${}^a/{}^n\Delta$, co povstane z tohoto Δ, když se místo a tam napíše n, tedy na př.

$${}^a/{}^n\Delta = \begin{vmatrix} n_1, & b_1, & c_1 \\ n_2, & b_2, & c_2 \\ n_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix},$$

takže tu bude, jako v případu předcházejícím,

$$x = \frac{{}^a/{}^n\Delta}{\Delta}, \quad y = \frac{{}^b/{}^n\Delta}{\Delta}, \quad z = \frac{{}^c/{}^n\Delta}{\Delta}. \qquad (9)$$

Chceme-li podlé těchto vzorců na př. určiti pro x, y, z čísla, vyhovující podmínkám

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 5, \\ 3x - 2y + z &= 2, \\ x + 2y + 3z &= 14, \end{aligned}$$

vyhledejme napřed jmenovatele společného

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2, & 3, & -1 \\ 3, & -2, & 1 \\ 1, & 2, & 3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} -12 - 6 + 3 \\ -\;2 - 4 - 27 \end{array} \right\} = -48,$$

načež se podobným spůsobem vypočte hodnota čitatele

$$\text{pro } x \; {}^a/{}^n\Delta = \begin{vmatrix} 5, & 3, & -1 \\ 2, & -2, & 1 \\ 14, & 2, & 3 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -30 - 4 + 42 \\ -28 - 10 - 18 \end{Bmatrix} = -48$$

$$\text{pro } y \; {}^b/{}^n\Delta = \begin{vmatrix} 2, & 5, & -1 \\ 3, & 2, & 1 \\ 1, & 14, & 3 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 - 42 + 5 \\ + 2 - 28 - 45 \end{Bmatrix} = -96,$$

$$\text{pro } z \; {}^c/{}^n\Delta = \begin{vmatrix} 2, & 3, & 5 \\ 3, & -2, & 2 \\ 1, & 2, & 14 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -56 + 30 + 6 \\ + 10 - 8 - 126 \end{Bmatrix} = -144,$$

takže spojením těchto výsledků podlé vzorců (9) obdržíme konečně

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3.$$

d) O n neznámých.

Má-li se řešiti soustava n rovnic stupně prvního s n neznámými $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, tedy

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + \ldots + l_1 x_n &= n_1, \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + \ldots + l_2 x_n &= n_2, \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 + \ldots + l_3 x_n &= n_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x_1 + b_n x_2 + c_n x_3 + \ldots + l_n x_n &= n_n, \end{aligned} \tag{10}$$

patrno, že možná si z ní vyvésti soustavu $(n-1)$ rovnice s $(n-1)$ neznámou, vyloučíme-li jednu neznámou veličinu, dejme tomu x_n, z rovnice první a druhé, druhé a třetí, ..., $(n-1)$-ní a n-té; soustava tato budiž

$$\begin{aligned} A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1 x_3 + \ldots + K_1 x_{n-1} &= N_1 \\ A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3 + \ldots + K_2 x_{n-1} &= N_2 \\ A_3 x_1 + B_3 x_2 + C_3 x_3 + \ldots + K_3 x_{n-1} &= N_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n-1} x_1 + B_{n-1} x_2 + C_{n-1} x_3 + \ldots + K_{n-1} x_{n-1} &= N_{n-1}. \end{aligned}$$

Z této soustavy podobně možná si zjednati novou, obsahující jen $(n-2)$ rovnice s $(n-2)$ neznámými, vyloučíme-li opět jednu neznámou, dejme tomu x_{n-1}, z rovnice první a druhé, druhé a třetí, ..., $(n-2)$-hé a $(n-1)$-ní.

A takto postupujíce můžeme počet rovnic a neznámých stejným krokem snižovati, až přijdeme k jedné rovnici s jedinou neznámou, již jest snadno řešiti; a na to zjednáme si opačným chodem hodnoty ostatních neznámých, totiž z jedné rovnice předposlední soustavy dvou rovnic druhou neznámou, z jedné rovnice předposlední soustavy tří rovnic třetí neznámou a t. d., konečně z jedné rovnice soustavy (10) hodnotu poslední neznámé.

Jak patrno, jest tento způsob řešení velmi snadný, ač zdlouhavý, zejména při řešení soustav složitějších, jelikož se tu vykonati musí dvojí dlouhá cesta od soustavy dané k rovnici o jedné neznámé a naopak od této nazpět k soustavě původní, při čemž tu dosazovaní hodnot právě určených, onde vylučován neznámých postupně se provádí; a jsou-li koefficienty neznámých obecné veličiny, jest výsledek stálého vylučování vždy složitějším, takže patrna jest potřeba znáti přehlednější způsob řešení.

Porovnáme-li vzorce, které jsme takto postupujíce dříve obdrželi, zejména (6) a (9), poznáme, že i zde bude výsledek podobný a sice, užijeme-li obdobného označení,

$$x_1 = \frac{{}^{a}/{}^{n}\Delta}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{{}^{b}/{}^{n}\Delta}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{{}^{l}/{}^{n}\Delta}{\Delta}, \tag{11}$$

kdež možná společného jmenovatele vyjádřiti též čtverečným symbolem

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots, & l_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots, & l_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & \ldots, & l_3 \\ . & . & . & . & . \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots, & l_n \end{vmatrix}, \tag{12}$$

z něhož povstane kterýkoli čitatel, zavede-li se tam za součinitele hledaných neznámých řada hodnot se strany pravé, takže na př.

$${}^{b}/{}^{n}\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & n_1, & c_1 & \ldots & l_1 \\ a_2, & n_2, & c_2 & \ldots & l_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_n, & n_n, & c_n & \ldots & l_n \end{vmatrix}.$$

Symbolický výraz (12), kterýž obsahujíc všechny součinitele neznámých soustavy (10) jest společným jmenovatelem hodnot těchto neznámých (11), sluje *determinantem* této soustavy linearních rovnic. Jsou-li součinitelové číselně dáni a známe-li způsob, jak se hodnota jeho v tomto určitém případě vyčíslí, jest řešení soustavy (10) velmi jednoduché, jelikož se tu bezprostředně pomocí vzorců (11) obdrží hodnota které koli neznámé, anižby třeba bylo předchozích počtů nějakých.

Jak se číselná hodnota tohoto determinantu určí v případech jednoduchých, kde jest jen stupně druhého neb třetího, bylo dříve již vyloženo; jak se však má určiti v případech složitějších, nelze dříve vykládati, pokud nepoznáme některých vlastností tohoto pojmu, k němuž se nyní přímo obrátíme.

(Pokračování.)

Z Aragových životopisů.

Podává prof. **Fr. Hromádko.**

II.

Malus.

(Čteno v zasedání akademie věd dne 8. ledna 1855.)

Štěpán Lud. Malus, jehož jméno hlásati bude skvělý vynález z oboru světla, dokud ctěny budou lidstvem vědy přírodozpytné, narodil se dne 23. července r. 1775 v Paříži.

V mládí svém se zabýval výhradně čtením starých klassiků, jimiž literatura řecká a římská hlavně se honosí. Ještě v pozdním věku odříkával často z paměti celé odstavce z Illiady, z Anakreonta, z Horace i Virgilia. Jako téměř každý výše nadaný mladík podnikal i Malus v útlém věku svém práce, které byly nad jeho síly; práce, které proslavený básník náš trefně díly čertovskými nazval. Nalezl jsem na př. mezi jeho papíry dva zpěvy epické básně nadepsané: „La Fondation de la France ou la Thémelie“ a dvě truchlohry (smrt Catona a Elektru), jichž uhlazený verš a některé zajímavé výjevy mysl čtenáře mile baví.