Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Zahradník

O místě bodu, jehož tětiva styku má pro danou kuželosečku stálou délku

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 6 (1877), No. 3, 139--142

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122486

O místě bodu, jehož tětiva styku má pro danou kuželosečku stálou délku.

Napsal

dr. **K. Zahradník** v Záhřebě.

Úlohou touto zabývali se pánové *Grunert* [1]) a *Schlömilch* [2]); obálku stálých tětiv co její polárně reciprokou křivku vyvinul a vyšetřil pan dr. Ed. Weyr [3]) pomocí souřadnic přímkových. Řešení, které zde podávám, je velmi jednoduché. Upotřebíce jednoznačného parametru [4]) u, můžeme vyjádřiti rovnici kuželosečky

$$K \equiv y^2 - 2px - qx^2 = 0 \tag{1}$$

následujícím párem rovnic

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2p}{u^2-q}, \\ y &= \frac{2pu}{u^2-q}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

kde jest

$$y = ux,$$

čímž i geometrický význam parametru jasný. Z daného bodu a lze dvě tečny na kuželosečku vésti: a parametry bodů styku u_1, u_2 obdržíme z rovnice tečny, za kterouž příčinou tuto zde vyvinouti chceme. Rovnice sečny, co přímky spojující body $\overline{u_1 u_2}$, jest

$$\begin{vmatrix} x & , & y & , & 1 \\ \dfrac{2p}{u_1^2-q} & , & \dfrac{2pu_1}{u_1^2-q} & , & 1 \\ \dfrac{2p}{u_2^2-q} & , & \dfrac{2pu_2}{u_2^2-q} & , & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x, & y, & 2p \\ 1, & u_1, & u_2^2 - q \\ 0, & 1, & u_1 + u_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Za $u_1 = u_2 = u$ přejde rovnice sečny $\overline{u_1 u_2}$ v rovnici tečny v bodě u, totiž ve

$$2uy - (u^2 + q)x - 2p = 0. \tag{4}$$

---

[1]) Grunert „Archiv für Mathm. und Phys." Bd. 47.

[2]) Schlömilch „Zeitschrift für Math. und Phys. Jahrh." XIV. pg. 158.

[3]) ibid. Jahrg. XVII. pg. 164.

[4] Viz „O kuželosečkách a jich kruzích zakřivenosti." Časopis jed. math. sv. II. pg. 65. Dr. *Em. Weyr.*

Rovnice tato podává nám vztah mezi parametrem bodu styku a souřadnicemi libovolného bodu na tečně. Vytkneme si nyní na tečně bod pevný a, jehož souřadnice buďtež x, y, a pak můžeme z rovnice (4) řešením dle u nalézti parametry bodů styku. Seřadíme-li si rovnici (4) dle mocností u, obdržíme mezi souřadnicemi bodu a a parametry bodů styku u_1, u_2 následující relace:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= \frac{2y}{x}, \\ u_1 u_2 &= \frac{qx + 2p}{x}, \end{aligned} \tag{5}$$

kdež u_1, u_2 jsou, jak již připomenuto, kořeny rovnice (4) dle a.

Pomocí rovnic (5) můžeme nyní řešiti úlohu naši. Budiž dána délka tětivy $\overline{u_1 u_2} = c$, tu je patrně

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = c^2. \tag{6}$$

Jest však

$$x_1 - x_2 = 2p \left\{ \frac{1}{u_1{}^2 - q} - \frac{1}{u_2{}^2 - q} \right\} = 2p \cdot \frac{u_2{}^2 - u_1{}^2}{(u_1 u_2 + q)^2 - 2q(u_1 + u_2)}$$

aneb, rozvedeme li výraz v čitateli podlé vzorce

$$(u_1 - u_2)^2 = (u_1 + u_2)^2 - 4u_1 u_2, \tag{7}$$

$$x_1 - x_2 = 2p \frac{-(u_1 + u_2)\sqrt{(u_1 + u_2)^2 - 4u_1 u_2}}{(u_1 u_2 + q)^2 - 2q(u_1 + u_2)};$$

podobně bude

$$y_1 - y_2 = 2p \left\{ \frac{u_1}{u_1{}^2 - q} - \frac{u_2}{u_2{}^2 - q} \right\} = 2p \frac{-(u_1 - u_2)(u_1 u_2 + q)}{(u_1 u_2 + q)^2 - 2q(u_1 + u_2)},$$

aneb pomocí rovnice (7)

$$y_1 - y_2 = 2p \frac{-(u_1 u_2 + q)\sqrt{(u_1 + u_2)^2 - 4u_1 u_2}}{(u_1 u_2 + q)^2 - 2q(u_1 + u_2)}.$$

Zavedeme-li tyto hodnoty za $(x_1 - x_2)$ a $(y_1 - y_2)$ do rovnice (6), obdržíme

$$\begin{aligned} \{(u_1 + u_2)^2 - 4u_1 u_2\} \{(u_1 + u_2)^2 + (u_1 u_2 + q)^2\} = \\ \lambda^2 \{(u_1 u_2 + q)^2 - 2q(u_1 + u_2)\}, \end{aligned} \tag{8}$$

kde jsme k vůli krátkosti položili

$$\lambda^2 = \frac{c^2}{4p^2}.$$

Zavedeme-li nyní hodnoty z rovnic (5) za $u_1 u_2$ i $(u_1 + u_2)$, do rovnice (8), čímž uvedeme podmínku, že u_1 i u_2 jsou body styku tečen bodu a, i že c v rovnici (6) délku tětivy bodu styků značí, obdržíme rovnici hledaného místa:

$$\{y^2 - x(qx + 2p)\}\{y^2 + (qx + p)^2\} = \lambda^2 \{(qx + p)^2 - qxy\}^2 . \quad (9)$$

Jest však

$$K = y^2 - qx^2 - 2px$$

a píšeme-li zkrátka

$$y^2 + (qx + p)^2 = L$$

$$(qx + p)^2 - qxy = H,$$

obdržíme pro geometrické místo rovnici

$$KL - \lambda^2 H^2 = 0 . \quad (10)$$

Je-li tětiva styku sice stálá, avšak neurčitá, obdržíme celou řadu takých křivek, jež tvoří dohromady svazek křivek čtvrtého stupně, jež mají společný dvojný bod na ose X ve vzdálenosti

$$x = -\frac{p}{q} = -\alpha ;$$

značí-li α poloviční velikou osu dané kuželosečky. Ze tvaru rovnice hledaného místa plyne, že se hledané místo dotýká kuželoseček

$$K = 0, \; L = 0$$

v bodech, v nichž tyto protínají kuželosečku H, což ostatně i analyticky dokázati můžeme. Budiž na příklad b jeden z průsečných čtyř bodů kuželoseček

$$K = 0, \; H = 0$$

t. j. souřadnice jeho musí oběma rovnicím vyhověti. Označíme-li rovnici křivky (10) zkrátka

$$F = 0,$$

je směrnice tečny [1]) bodu libovolného na této křivce

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_1}{F_2} = -\frac{K_1 L + K L_1 - 2\lambda^2 H H_1}{K_2 L + K L_2 - 2\lambda^2 H H_2} \quad (11)$$

a na křivce K

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{K_1}{K_2} . \quad (12)$$

Bod b leží patrně i na křivce F; neb souřadnice jeho vyhovují rovnici i

$$K = 0 \text{ i } H = 0,$$

tedy též rovnici (10), to jest i rovnici

$$F = 0.$$

[1]) Viz. dr. *Studnička* „O počtu differenciálním“ pg. 162.

Zavedeme-li souřadnice tohoto bodu do rovnice (11), obdržíme po zkrácení činitelem L

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{K_1}{K_2},$$

t. j. křivky K i F mají v bodě b společnou tečnu. Podobně plyne důkaz pro průsečné body křivek

$$L=0\,,\ H=0\,,$$

jež taktéž, jak již připomenuto, body křivky

$$F=0$$

t. j. hledaného místa jsou.

Poznámka o hranatých tělesích pravidelných.

Podal

Josef Fürst.

V každém mnohostěnu jest počet stěn s a rohů r o 2 větší než počet hran h, jak Euler nejprvé ukázal; tedy

$$s+r-h=2. \tag{1}$$

Pro hranatá tělesa pravidelná jest ale mimo to

$$h=\frac{n\,.\,s}{2}, \tag{2}$$

a

$$r=\frac{2h}{m}=\frac{n\,.\,s}{m}, \tag{3}$$

značí-li n počet stran pravidelných mnohoúhelníků, jimiž těleso ohraničeno, m počet v jednom rohu sbíhajících se hran či počet boků.

Dosadíme-li hodnoty vzorci (2), (3) určené do rovnice (1), obdržíme rovnici zvláštní tvaru

$$m=\frac{2n\,s}{s\,(n-2)+4}, \tag{4}$$

platnou pro hranatá tělesa pravidelná, jež jsouc řešena po způsobu neurčitých rovnic, patero řešení v číslech celistvých a positivních poskytuje. Při tom nutno šetřiti podmínky, že k úplnému omezení tělesa hranatého aspoň 4 rovin třeba.