O duchu mathematickém a některých jeho zjevech.

(Přednáška, kterouž prof. Dr. *F. J. Studnička* zahájil novou činnost Jednoty českých mathematiků dne 20. října 1872.)

Pánové!

S velikým potěšením chápu se příležitosti dnes mi podané, abych Vás uvítal k nově zahájené činnosti spolkové a vyslovil přání, by ještě hojnější a horlivější bylo účastenství Vaše na všech úkolech vědeckých, jež pěstovati si jednota naše položila za účel. Neb jen pilnou a svědomitou snahou vědeckou zjednala si jednota českých mathematiků té chvalné pověsti a té štědré podpory, jíž požívá ve všech kruzích našich, a trvám, že i na dále si nejen zachová, nýbrž i zvýší tuto lichotnou přízeň jedině zvýšenou vědeckou snahou svědomitou a pilnou. Až pak konečně se domůžeme samostatné své university, bude tu jednota naše zajisté jednou z předních okras jejích, jakož nyní jest důkazem jasným a nezvratným, že vědecké snahy nejsou liché synům národa našeho.

Aby se však krásných účelů spolkových dosáhlo v míře co největší, nutno především, aby všichni údové její — a k těm počítánu býti měl by za čest si pokládati každý, kdo se u nás zanáší přímo neb nepřímo mathematikou neb fysikou — aby tedy především všichni kandidáti těchto věd vedlé receptivní činnosti veřejné vyvinovali stále hojnou, samostatnou činnost spolkovou.

Znám sice velmi dobře překážky, jaké vadí právě druhému, tuto vytknutému druhu činnosti vědecké u nás-jest to, krátce řečeno, chudoba, která obyčejně tísní naše nejnajdanější síly a je nutí několik hodin denních zaprodati cizím, aby svými nazývati směli denní hodiny ostatní. Neb národ náš, ač dosti bohatý, nepostaral se dosud hojnými a vydatnými nadacemi o ty, kteří budoucně mají vzdělání jeho míti na starosti a na nichž hlavně závisí výška stupně, na nějž postaví jej budoucně kulturní historie.

Avšak, nechť jsou okolnosti jaké koli, kdo *chce, může* zvýšenou pružností ducha svého přemoci i tyto hmotné překážky a byť i jen obmezeně co do času, přec skvěle co do výsledku vytrvalostí svou prodrati se k cíli vytknutému. „Šídlo i v pytli píchá", praví naše jedno přísloví.

Aby však tato soukromá a samostatná činnost byla co možná nejprospěšnější, nutno míti na zřeteli též rozmanité vnitřní stránky té vědy, s níž se zanášíme, nutno zřetel míti k *duchu* vědeckého předmětu, jejž právě probíráme.

A tu bych velmi rád, zejmena co se tkne mathematiky, vytknul aspoň *tři* stránky, ku kterým byste při svých studiích, mladí přátelé moji, pilně přihlíželi, především Vás žádám.

První stránka mathematického studia, kterouž neradno zanedbávati, týče se překladu daného úkolu z řeči obecné do řeči mathematické a naopak a tu vyžaduje duch této vědy, aby oba *překlady byly kongruentní.*

Máme-li nějaký úkol analyticky řešiti, nutno jej především upraviti a stilisovati tak, aby se vyjádřiti dal znaky mathematickými, načež se pomocí symbolů kvantitativních a operativních přeloží do řeči mathematické; s výrazem takto obdrženým provádí se pak všecky nutné úkony mathematické, čímž se mění co pravý Proteus tak dlouho, až se přijde k poslednímu úsudku, ku konečnému závěrku, v němž obsažena jest mathematická odpověď; aby se pak mohla vyjádřiti opět řečí obecnou, nutno ještě tento výsledek výpočtu přeložiti nazpět z řeči mathematické aneb slovy vyložiti.

A při těchto dvojích překladech, které předcházejí a následují každému výpočtu, nutno míti se co možná nejvíce na pozoru, aby se nevložilo do mathematického překladu více, nežli úkol vyžaduje a aby se na konci z mathematického výsledku nevytahovalo více, nežli původně bylo uloženo. Toto i ono vede, jak bohužel četné zkušenosti učí, k nesrovnalostem a protivám, ku kterým mathematické badání nikdy vésti nesmí.

Abych na nějakém příkladě objasnil tuto stránku ducha mathematického, představme si, že dána jest nám úloha uhodnouti, kolik krejcarů obdržel každý ze dvou žebráků, známe-li tyto dvě okolnosti: Kdyby první obdržel tolikrát více krejcarů, kolik jich dostal druhý, obdržel by jich 12; a kdyby druhý obržel o 4 kr. více nežli první, obdrželi by stejně.

Chceme-li vyřčení úlohy této přeložiti do řeči mathematické, nazveme počet krejcarů, jež první byl obdržel, neznámou x, při čemž však mějme na zřeteli, že podlé znění úlohy nesmí býti x negativní; smíme tedy jen positivní hodnoty x, které se při řešení našem ku konci vyskytnou, při opačném překladu míti na zřeteli. Druhý obdržev o 4 krejcary méně dostal jich tedy $x—4$, takže podmínka první zní pak takto:

$$x\ (x-4) = 12 \text{ neb } x^2 - 4x - 12 = 0,$$

kterážto rovnice kvadratická představuje tedy mathematický překlad předložené úlohy.

Řešíme-li podlé známých pravidel, obdržíme tu dvě hodnoty pro x, které vyhovují této rovnici, a sice

$$x_1 = 6\,,\; x_2 = -2\,.$$

Chceme-li konečně výsledek tento přetlumočiti do řeči obecné, smíme překlad vztahovati jen k řešení positivnímu, majíce na zřeteli, co do prvního překladu bylo vloženo, a tudíž říci, že první žebrák obdržel krejcarů 6, načež snadno se vypočte, že druhému se dostalo jen 2. Řešení $x_2 = -2$, ač zcela zprávně vyvedeno jest z rovnice kvadratické, nesmí se tu intepretovati k této zvláštní úloze; číslo -2 vyhovuje sice rovnici kvadratické, aby však druhý žebrák, jemuž byla almužna udělena, se tím stal dlužníkem dvou krejcarů, toť proti znění úlohy.

Druhá stránka, ku které bych rád pozornost Vaši, pánové, obrátil, vztahuje se k rozmanitým *důkazům téťéž poučky* a k vlastnosti jejich, že *jsou tím kratší, čím bližších pouček předcházejících k nim voleno.*

Představujeť nám jedině věda mathematická zcela souvislý řetěz pouček, z nichž vyšší člen vždy nese všechny nižší, takže odstranivše jeden, přetrhli jsme nespojitelně celou souvislost.

Dejme tomu, že máme řadu po sobě jdoucích pouček

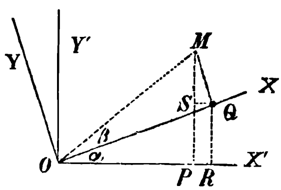
$$a,\; b,\; c,\; d,\; e,\; f,$$

z nichž poučka c se dokáže pomocí a, b, následující d pomocí a, c, pátá e pomocí b, d, a poslední f pomocí d, e, že tedy možná základ jejich rozvésti podlé schematu

$$
\begin{array}{cccc}
c & d & e & f \\
\Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\
a\;b & a\;c & b\;d & d\;e \\
 & \Lambda & \Lambda & \Lambda\;\Lambda \\
 & a\;b & a\;c & a\;c\;b\;d \\
 & & \Lambda & \Lambda\;\;\Lambda \\
 & & a\;b & a\;b\;a\;c \\
 & & & \Lambda \\
 & & & a\,b
\end{array}
$$

tož patrno, že poučku *f* možno dokázati pomocí pouček dvou *d*, *e*, avšak i pomocí tří *a*, *c*, *e*, neb *b*, *d*, *d* aneb pomocí čtyr *a*, *b*, *c*, *d* atd.; ale taktéž patrno, že první důkaz jest nejkratší, druhý delší, třetí ještě delší atd., jelikož tento poslední používá nejnižších pouček *a*, *b*, první však nejbližších *d*, *e*.

Abych mathematickým příkladem objasnil tuto stránku ducha naší vědy, dejme tomu, že máme polohu bodu v rovině vyjádřiti souřadnicemi novými, kteréž se vztahují k osám, uzavírajícím s původními úhel α.



Obraz 6.

Nejrychleji přijdeme k cíli, spojíme-li bod M (obr. 6.) s počátečním bodem souřadnic O, čímž obdržíme úhel $MOQ = \beta$, a použijeme-li vzorce pro $\begin{smallmatrix} sin \\ cos \end{smallmatrix} (\alpha + \beta)$; budeť tu pro $OM = 1$

$$OP = \xi = \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$
$$MP = \eta = \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta;$$

nahradíme-li pak výraz $\sin\beta$ a $\cos\beta$ výrazem $OQ = x$, $MQ = y$, obdržíme konečně známé převodní vzorce

$$\xi = x \cos\alpha - y \sin\alpha$$
$$\eta = x \sin\alpha + y \cos\alpha$$

Kdo nezná vzorců goniometrických tuto upotřebených, musí voliti delší cestu prostřednictvím pomocné kolmice QR a QS, aby k témuž přišel cíli.

Z této vlastnosti mathematických důkazů jde konečně na jevo, jak nutno jest při přednáškách šetřiti souvislosti a jak důležité jest pro každého učitele mathematiky pravidlo, „nepokračuj u výkladu, nejsi-li přesvědčen, že dosud všemu žáci porozuměli, že stojí pevně na půdě dosud vydobyté“!

Co se konečně tkne třetí stránky ducha mathematického, o které se taktéž chci v této úvodní řeči zmíniti, ta zní na první poslechnutí zcela opačně, že totiž *co do podstaty jsou všechny rozličné důkazy téléž poučky stejně dlouhé* aneb že všechny obsahují, rozložíme-li je na původní pojmy a úsudky, totéž množství závěrků, tutéž logickou práci.

Vrátíme-li se k předcházejícímu schematu, poznáme velmi snadno pravdivost tohoto výroku; neb uvedeme-li základ poučky f na nejnižší pojmy a poučky, tož patrno, že se tu vyskytne ve všech případech dříve vytknutých po každé 4krát poučka a a 3krát poučka b.

A použijeme-li posledního příkladu geometrického, snadno též poznáme, že odvození tam podané jest sice krátké, že však odvození použitých vzorců pro $\begin{matrix} sin \\ cos \end{matrix}\left\{\alpha+\beta\right\}$ vyžaduje samo úsudků, jimž jsme se při tomto prvním odvození vyhnuli, považujíce tyto goniometrické vzorce za známé. Logická práce, která se vykoná v prvním případě skládá se tu ze dvou částí, z nichž první vede k použitým vzorcům, druhá pak od těchto k hledaným vzorcům pro ξ a η, kdežto bychom celou práci najednou, jedním takřka tahem musili provésti, kdybychom všude sestoupili až k pojmům základním.

Představíme-li si vědu mathematickou co horu nějakou, jejíž patu představují počáteční všeobecné, vrchol pak nejvyšší zvláštní poučky, a dejme tomu, že chceme si zjednati přístup k jisté výšce na stráni; můžeme se tam, mimo vrch stojíce, dostati skokem přetržitým? Nikoliv! Můžeme voliti rozmanité cesty, příkré, krátké neb málo stoupající, dlouhé; součet vynaložených k tomu sil, vykonané tu práce bude ve všech případech stejný.

Jako ve světě fysickém platí zákon o stálosti síly, platí o mathematických důkazech podobný *zákon o stálosti síly* arci *duševní* neb *o stálosti logické práce* aneb množství úsudků, jež nutno spojiti, aby se přišlo k určitému závěrku.

Zároveň tu vysvitá důležitost pouček, v nichž jest obsaženo mnoho předcházejících úsudků; podobajíť se vyšším stanoviskům na stráni hory mathematické, z nichž možná rychle a pohodlně dle potřeby vystupovati výše.

Kdo by chtěl vyzpytovati týmě nějaké hory, na níž nemůže stále bydleti, zajisté že se usadí na stráni tak vysoko, jak možná, a odtud bude docházeti na blízké týmě; kdyby zůstal v údolí, byl by nucen odtud pokaždé opakovati obtížnou cestu až na vrchol.

S tohoto stanoviska jeví se nám býti počet differenciální nanejvýš prospěšným pro veliké badání mathematické; znajíce pravidla, podlé nichž se ustanovuje v rozmanitých zvláštních případech první differenciální poměr, nejsme nuceni při každé jednotlivé otázce hodnotu jeho ustanovovati podlé všeobecného pravidla

$$\frac{dy}{dx} = lim \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{(x+\triangle x) - x} = f'(x),$$

nýbrž používáme ihned příslušného pravidla zvláštního. *Fermat* určoval co do podstaty stejným spůsobem maxima neb minima funkcí jako my; kdežto však nyní přímo vycházíme od pojmů differenciálního poměru určitého, byl tento slavný mathematik nucen hledaný poměr pokaždé teprv si konstruovati.

S tohoto stanoviska jeví se nám též býti zcela nepřiměřeným spůsob mnohých fysiků, zejména *Baumgartnera* a *Ettingshausena* jakož i *Kunceka*, jakým prováděli pomocí nižší mathematiky důkazy pouček fysikálních, které jsou podstatou svou odkázány k mathematice vyšší. Neb kdyby se aspoň třetina času, jejž věnují tací spisovatelové těmto důkazům, obětovala na vyvinutí příslušných pouček počtu differenciálního a integrálního, bylo by nanejvýš druhé třetiny zapotřebí, aby se tytéž poučky a to mnohem jasněji dokázaly, a nejméně třetiny toho času bylo by tím tedy uspořeno. A při tom by žák měl ještě dvě velké výhody: nebyl by nucen s celým napnutím své pozornosti a pilnosti sledovati eskamotování veličin, které hned tu jsou a něco platí a hned zase zmizí žádné platnosti nemajíce, a pak by podržel k další potřebě velepůsobivý nástroj, jakým se jeví býti vyšší analysis již ve svých počátcích. Jaký tu rozdíl v obou spůsobech, poznáme nejlépe, porovnáme-li v duchu důkazy, jakými se tu i onde dovozuje správnost známého vzorce

$$s = {}^1/_2\, g t^2.$$

Jsouť sice ještě mnohé zajímavé zjevy ducha mathetického, k nimž by prospěšno bylo poukázati, avšak následující přednáška, kteráž bude též Vaší pozornosti v plné míře vyžadovati, nutí mne, abych již ukončil.

Očekávaje, že ta neb ona poznámka právě učiněna bude Vás, pánové, provázeti při Vašich domácích studiích a že v tomto roce spolkovém, jejž právě počínáme, hojným účastenstvím dokážete, jak Vám milé jest pěstování věd mathematických a fysikálních naší krásnou mateřštinou, provolávám všeliké Vaší snaze a činnosti vědecké

„Na zdar“!