

# Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

---

František Josef Studnička

Přímý důkaz průkladného vzorce Lagrange-ova

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 2 (1873), No. 1, 82--84

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122447>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1873

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

podobně se vyjádří ostatní délky až na poslední

$$h_{34} = \Delta \frac{M_1 M_2}{D_3 D_4} \sin a_{12}.$$

Abychom konečně ustanovili úhly rovinné, použijme posledního vzorce ve spojení s (29); obdržíme tu především

$$\begin{aligned} 2P_1 &= h_{23} h_{34} \sin (234) \\ &= h_{34} h_{42} \sin (342) \\ &= h_{42} h_{23} \sin (423) = \frac{\Delta^2 M_1}{D_2 D_3 D_4} \end{aligned}$$

a tudíž pomocí vzorce (29)

$$\begin{aligned} \sin (234) &= \frac{D_3}{M_4 M_1 M_2 \sin a_{12} \sin a_{14}}, \\ \sin (341) &= \frac{D_4}{M_1 M_2 M_3 \sin a_{23} \sin a_{21}}, \\ \sin (412) &= \frac{D_1}{M_2 M_3 M_4 \sin a_{34} \sin a_{32}}, \\ \sin (123) &= \frac{D_2}{M_3 M_4 M_1 \sin a_{41} \sin a_{43}}, \end{aligned} \quad (32)$$

z nichž se i ostatní sinusy výměnou dvou ukazovatelů snadno ustanoví.

## Přímý důkaz průkladného vzorce Lagrange-ova.

(Podává dr. F. J. Studnička.)

Má-li se ustanoviti

$$y_n = A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \dots + A_{k-1} n^{k-1}$$

tak, aby pro  $k$  hodnot veličiny  $n$ , a sice pro

$$n = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$$

bylo  $y_n = y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \dots, y_{\alpha k}$ ,

třeba jen vyloučiti  $k$  součinitelů

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$$

ze soustavy  $k + 1$  rovnice

$$\begin{aligned} y_n &= A_0 + A_1 n + \dots + A_{k-1} n^{k-1}, \\ y_{\alpha,1} &= A_0 + A_1 \alpha_1 + \dots + A_{k-1} \alpha_1^{k-1}, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ y_{\alpha,k} &= A_0 + A_1 \alpha_k + \dots + A_{k-1} \alpha_k^{k-1}; \end{aligned}$$

výsledek, který tu obdržíme, bude patrně

$$\begin{vmatrix} y_n & , & 1 & , & n & , & \dots & , & n^{k-1} \\ y_{\alpha,1} & , & 1 & , & \alpha_1 & , & \dots & , & \alpha_1^{k-1} \\ \cdot & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & \\ y_{\alpha,k} & , & 1 & , & \alpha_k & , & \dots & , & \alpha_k^{k-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Determinant tento možná ale rozložití podlé prvků prvního sloupce, čímž se obdrží, označíme-li subdeterminanty, jak obyčejně, příslušnými písmenami velkými,

$$y_n Y_n - y_{\alpha,1} Y_{\alpha,1} - y_{\alpha,2} Y_{\alpha,2} - \dots - y_{\alpha,k} Y_{\alpha,k} = 0, \quad (1)$$

kdež o prvním subdeterminantu platí

$$Y_n = \begin{vmatrix} 1 & , & \alpha_1 & , & \dots & , & \alpha_1^{k-1} \\ 1 & , & \alpha_2 & , & \dots & , & \alpha_2^{k-1} \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ 1 & , & \alpha_k & , & \dots & , & \alpha_k^{k-1} \end{vmatrix},$$

o následujících pak

$$Y_n = \begin{vmatrix} n=\alpha_1 \\ Y_{\alpha,1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n=\alpha_2 \\ Y_{\alpha,2} \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} n=\alpha_k \\ Y_{\alpha,k} \end{vmatrix}.$$

Řešíme-li tedy rovnici (1) podlé  $y_n$ , obdržíme snadno

$$y_n = \frac{\sum_{i=1}^k y_{\alpha,i} \begin{vmatrix} Y_{\alpha,i} \\ n=\alpha_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_{\alpha,i} \\ n=\alpha_i \end{vmatrix}} \quad (2)$$

Abychom pak ustanovili tyto poměry subdeterminantů, použijme známé poučky,\*) že

\*) Viz *Studnička* „O determinantech“ pag. 15.

$$Y_n = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \dots (\alpha_1 - \alpha_k)}{(\alpha_2 - \alpha_3) \dots (\alpha_2 - \alpha_k)} \cdot \dots \cdot (\alpha_{k-1} - \alpha_k),$$

z čehož jde bezprostředně

$$Y_{\alpha_1} = \frac{(n - \alpha_2)(n - \alpha_3) \dots (n - \alpha_k)}{(\alpha_2 - \alpha_3) \dots (\alpha_2 - \alpha_k)} \cdot \dots \cdot (\alpha_{k-1} - \alpha_k);$$

dělíme-li tedy tyto součiny, zkrátí se všichni činitelové až na první, čímž povstane

$$\frac{Y_{\alpha_1}}{Y_n} = \frac{(n - \alpha_2)(n - \alpha_3) \dots (n - \alpha_k)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \dots (\alpha_1 - \alpha_k)}. \quad (3)$$

A zcela podobným způsobem určí se i ostatní hodnoty.

Zavedeme-li tedy tyto výrazy do vzorce (2), obdržíme konečně

$$y_n = y_{\alpha_1} \frac{(n - \alpha_2)(n - \alpha_3) \dots (n - \alpha_k)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \dots (\alpha_1 - \alpha_k)} + y_{\alpha_2} \frac{(n - \alpha_1)(n - \alpha_3) \dots (n - \alpha_k)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3) \dots (\alpha_2 - \alpha_k)} + y_{\alpha_k} \frac{(n - \alpha_1)(n - \alpha_2) \dots (n - \alpha_{k-1})}{(\alpha_k - \alpha_1)(\alpha_k - \alpha_2) \dots (\alpha_k - \alpha_{k-1})}, \quad (4)$$

což jest Lagrange-ův známý vzorec průkladný.

Chceme-li kratším způsobem jej vyjádřiti, položme

$$N_i = \frac{(n - \alpha_1)(n - \alpha_2)(n - \alpha_3) \dots (n - \alpha_4)}{(n - \alpha_i)}, \quad (5)$$

$$P_i = \frac{1}{N_i}, \quad (6)$$

načež si zjednáme snadno především

$$\frac{Y_{\alpha_i}}{Y_n} = \frac{N}{P_i}$$

a dosadíme-li tuto hodnotu do vzorce (2), konečně

$$y_n = \sum_{i=1}^k y_{\alpha_i} \frac{N_i}{P_i}. \quad (7)$$