Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

Přímý důkaz průkladného vzorce Lagrange-ova

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 2 (1873), No. 1, 82--84

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122447

podobně se vyjádří ostatní délky až na poslední

$$h_{34} = \Delta \frac{M_1 M_2}{D_3 D_4} \sin a_{12} .$$

Abychom konečně ustanovili úhly rovinné, použijme posledního vzorce ve spojení s (29); obdržímeť tu především

$$\begin{aligned} 2P_1 &= h_{23} h_{34} \sin (2\,3\,4) \\ &= h_{34} h_{42} \sin (3\,4\,2) \\ &= h_{42} h_{23} \sin (4\,2\,3) = \frac{\Delta^2 M_1}{D_2 D_3 D_4} \end{aligned}$$

a tudíž pomocí vzorce (29)

$$\left.\begin{aligned} \sin (2\,3\,4) &= \frac{D_3}{M_4 M_1 M_2 \sin a_{12} \sin a_{14}}, \\ \sin (3\,4\,1) &= \frac{D_4}{M_1 M_2 M_3 \sin a_{23} \sin a_{21}}, \\ \sin (4\,1\,2) &= \frac{D_1}{M_2 M_3 M_4 \sin a_{34} \sin a_{32}}, \\ \sin (1\,2\,3) &= \frac{D_2}{M_3 M_4 M_1 \sin a_{41} \sin a_{43}}, \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

z nichž se i ostatní sinusy výměnou dvou ukazovatelů snadno ustanoví.

Přímý důkaz průkladného vzorce Lagrange-ova.

(Podává dr. *F. J. Studnička.*)

Má-li se ustanoviti

$$y_n = A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots + A_{k-1} n^{k-1}$$

tak, aby pro k hodnot veličiny n, a sice pro

$$n = \alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_k$$

bylo

$$y_n = y_{\alpha_1} , y_{\alpha_2} , \ldots , y_{\alpha_k},$$

třeba jen vyloučiti k součinitelů

$$A_0 , A_1 , A_2 , \ldots , A_{k-1}$$

ze soustavy $k+1$ rovnice

$$\begin{aligned} y_n &= A_0 + A_1 n + \ldots + A_{k-1} n^{k-1}, \\ y_{\alpha,1} &= A_0 + A_1 \alpha_1 + \ldots + A_{k-1} \alpha_1^{k-1}, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ y_{\alpha,k} &= A_0 + A_1 \alpha_k + \ldots + A_{k-1} \alpha_k^{k-1}; \end{aligned}$$

výsledek, který tu obdržíme, bude patrně

$$\begin{vmatrix} y_n, & 1, & n, & \ldots, & n^{k-1} \\ y_{\alpha,1}, & 1, & \alpha_1, & \ldots, & \alpha_1^{k-1} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ y_{\alpha k}, & 1, & \alpha_k, & \ldots, & \alpha_k^{k-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Determinant tento možná ale rozložiti podlé prvků prvního sloupce, čímž se obdrží, označíme-li subdeterminanty, jak obyčejně, příslušnými písmenami velkými,

$$y_n Y_n - y_{\alpha,1} Y_{\alpha,1} - y_{\alpha,2} Y_{\alpha,2} - \ldots - y_{\alpha,k} Y_{\alpha,k} = 0, \qquad (1)$$

kdež o prvním subdeterminantu platí

$$Y_n = \begin{vmatrix} 1, & \alpha_1, & \ldots, & \alpha_1^{k-1} \\ 1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_2^{k-1} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 1, & \alpha_k, & \ldots, & \alpha_k^{k-1} \end{vmatrix},$$

o následujících pak

$$Y_n = \overset{n=\alpha_1}{\Big/} Y_{\alpha,1} = \overset{n=\alpha_2}{\Big/} Y_{\alpha,2} = \ldots = \overset{n=\alpha_k}{\Big/} Y_{\alpha,k}.$$

Řešíme-li tedy rovnici (1) podlé y_n, obdržíme snadno

$$y_n = \sum_{i=1}^{k} y_{\alpha,i} \frac{Y_{\alpha,i}}{\overset{n=\alpha_i}{\Big/} Y_{\alpha,i}} \qquad (2)$$

Abychom pak ustanovili tyto poměry subdeterminantů, použijme známé poučky,*) že

*) Viz *Studnička* „O determinantech" pag. 15.

$$Y_n = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)\dots(\alpha_1 - \alpha_k).$$
$$(\alpha_2 - \alpha_3)\dots(\alpha_2 - \alpha_k).$$
$$\vdots$$
$$(\alpha_{k-1} - \alpha_k),$$

z čehož jde bezprostředně

$$Y_{\alpha,1} = (n - \alpha_2)(n - \alpha_3)\dots(n - \alpha_k)$$
$$(\alpha_2 - \alpha_3)\dots(\alpha_2 - \alpha_k).$$
$$\vdots$$
$$(\alpha_{k-1} - \alpha_k);$$

dělíme-li tedy tyto součiny, zkrátí se všichni činitelové až na první, čímž povstane

$$\frac{Y_{\alpha,1}}{Y_n} = \frac{(n - \alpha_2)(n - \alpha_3)\dots(n - \alpha_k)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)\dots(\alpha_1 - \alpha_k)}. \tag{3}$$

A zcelà podobným spůsobem určí se i ostatní hodnoty.

Zavedeme-li tedy tyto výrazy do vzorce (2), obdržíme konečně

$$\begin{aligned} y_n = {} & y_{\alpha,1} \frac{(n - \alpha_2)(n - \alpha_3)\dots(n - \alpha_k)}{\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)\dots(\alpha_1 - \alpha_k)} \\ & + y_{\alpha,2} \frac{(n - \alpha_1)(n - \alpha_3)\dots(n - \alpha_k)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)\dots(\alpha_2 - \alpha_k)} \\ & + y_{\alpha,k} \frac{(n - \alpha_1)(n - \alpha_2)\dots(n - \alpha_{k-1})}{(\alpha_k - \alpha_1)(\alpha_k - \alpha_2)\dots(\alpha_k - \alpha_{k-1})}, \end{aligned} \tag{4}$$

což jest Lagrange-ův známý vzorec průkladný.

Chceme-li kratším spůsobem jej vyjádřiti, položme

$$N_i = \frac{(n - \alpha_1)(n - \alpha_2)(n - \alpha_3)\dots,(n - \alpha_4)}{(n - \alpha_i)}, \tag{5}$$

$$P_i = \overset{n=\alpha_i}{/} N_i, \tag{6}$$

načež si zjednáme snadno především

$$\frac{Y_{\alpha,i}}{Y_n} = \frac{N}{P_i}$$

a dosadíme-li tuto hodnotu do vzorce (2), konečně

$$y_n = \sum_{i=1}^{k} y_{\alpha,i} \frac{N_i}{P_i}. \tag{7}$$