Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 25 (1896), No. 5, 350--392

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122434

$$\frac{\Sigma n}{\mathrm{N}} = 1 + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} = \Sigma \frac{1}{n}$$

snadno odvodíme vztah svrchu vyslovený

$$\frac{1}{\Sigma \frac{1}{m}} + \frac{1}{\Sigma \frac{1}{n}} = 1.$$

Když M = N je číslo dokonalé, a obdržíme

$$\Sigma \frac{1}{n} = \Sigma \frac{1}{m} = 2,$$

kterouž vlastnost objevil *Catalan* (viz Přílohu k Časopisu pro pěst. math. a fys., ročník letošní str. 229.).

Úlohy.

Úloha 33.

Obvod kruhové výseče jest 2p, obsah její q^2. Vypočítati poloměr r, oblouk s a úhel středový α.

Řešení. (Zaslal p. *Antonín Ringl,* stud. VII. tř. g. ve Vys. Mýtě).

Úloha vede k rovnicím

$$2r + s = 2p,$$

$$\frac{rs}{2} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = q^2,$$

z nichž snadno vypočítáme

$$r = \frac{1}{2}\left(p \pm \sqrt{p^2 - 4q^2}\right),$$

$$s = p \mp \sqrt{p^2 - 4q^2},$$

$$\alpha = \frac{720\, q^2}{\pi\,(r^2 - 2q^2 \pm \sqrt{p^2 - 4q^2})}.$$

Úloha 34.

Úhel 45^0 rozložiti ve dvě části x a y tak, aby součet

$$2\,tg\,x + 3\,tg\,y$$

měl hodnotu co nejmenší.

Řešení. (Zaslal p. *Josef Frieb*, stud. VIII. tř. g. v Brně).

Budiž

$$2\,\mathrm{tg}\,x + 3\,\mathrm{tg}\,y = s\,,$$
$$x + y = 45^0\,;$$

potom jest
$$\mathrm{tg}\,y = \frac{1 - \mathrm{tg}\,x}{1 + \mathrm{tg}\,x}\,,$$

čímž rovnice první přechází ve

$$2\,\mathrm{tg}^2 x - (s + 1)\,\mathrm{tg}\,x - s + 3 = 0\,.$$

Jelikož odtud

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{4}\left(s + 1 \pm \sqrt{s^2 + 10s - 23}\right)\,,$$

obdržíme realné řešení, je-li diskriminant

$$s^2 + 10\,s - 23 \geqq 0.$$

Podmínku tuto lze upraviti na

$$(s + 5)^2 \geqq 48$$

čili

$$s \geqq 4\sqrt{3} - 5\,.$$

Proto jest minimalná hodnota s

$$s_0 = 4\sqrt{3} - 5\,,$$

z čehož

$$\mathrm{tg}\,x = \sqrt{3} - 1\,, \qquad \mathrm{tg}\,y = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3}$$

$$x = 36^0\,12'\,12''\,, \qquad y = 8^0\,47'\,48''\,.$$

Úloha 35.

Je-li $$sin\,2\alpha\,cos\,\alpha = sin\,2\beta\,cos\,\beta,$$
jest buď $$sin\,\alpha - sin\,\beta = 0,$$
aneb $$sin^2\alpha + sin\,\alpha\;sin\,\beta + sin^2\beta = 1.$$

Řešení. (Zaslal p. *Jan Kapras,* stud. VI. tř. g. v Brně).
Rovnici dané dejme tvar

$$2 \sin \alpha \cos^2 \alpha = 2 \sin \beta \cos^3 \beta\,,$$
$$\sin \alpha\,(1 - \sin^2 \alpha) = \sin \beta\,(1 - \sin^2 \beta)\,,$$
$$\sin^3 \alpha - \sin^3 \beta = \sin \alpha - \sin \beta\,,$$
$$(\sin \alpha - \sin \beta)(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta) = \sin \alpha - \sin \beta,$$
$$(\sin \alpha - \sin \beta)(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta - 1) = 0.$$

Aby součin dvou činitelů rovnal se nulle, musí buďto jeden, nebo druhý činitel rovnati se nulle, pročež

$$\sin \alpha - \sin \beta = 0$$
$$\sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = 1.$$

Úloha 36.

V různoběžníku souměrném $ABCD$, v němž BD jest osou a E průsečíkem úhlopříček, jest součet úhlů $\beta + \delta = 90^0$. Úseky $AE = a$, $BE = b$, $ED = c$ tvoří řadu arithmetickou, v níž první člen a jest dán. Jaká jest to řada?

Řešení. (Zaslal p. *Stanislav Schiller*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích).

Dle podmínky jest

$$\beta + \delta = 90,$$

tedy

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}} = \operatorname{tg} 45^0\,,$$

čili

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = 1 - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\,;$$

avšak

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{a}{b}\,, \qquad \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{a}{c}\,,$$

pročež

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = 1 - \frac{a^2}{b^2} \quad \text{nebo} \quad a\,(b + c) = bc - a^2\,,$$

$$(1) \qquad a^2 + a(b+c) = bc.$$

Je-li rozdíl řady arithmetické x, jest první člen řady arithmetické a, druhý $b = a + x$ a třetí $c = a + 2x$. Dosadíme-li za b a c hodnoty do rovnice (1), obdržíme

$$a^2 + a(2a + 3x) = (a + x)(a + 3x),$$

odkudž $x^2 = a^2$, $x = \pm a$.

Řada hledaná jest

$$a, \quad 2a, \quad 3a.$$

Úloze vyhovuje jen kladná hodnota x, záporná hodnota vede k trojúhelníku pravoúhlému.

Úloha 37.

V trojúhelníku pravoúhlém jest vedena symmetrála úhlu pravého, která seče přeponu AB v bodu O. Ze středu O sestrojená kružnice, odvěsen se dotýkající, nechť protíná přeponu v bodech E a F. Je-li E bodem mezi O a B ležícím a CD výška trojúhelníka, jest:

$$1. \quad \frac{CD}{DE} = \frac{a+b}{a-b+c}, \qquad 2. \quad \frac{ED}{DF} = \frac{a-b+c}{-a+b+c}.$$

Řešení. (Zaslal p. *Rudolf Milota*, stud. VI. tř. g. v Písku).

Kružnice O nechť dotýká se odvěsen BC a AC v bodech G a H. Položíme-li $BF = x$, $BE = y$, lze mocnost vrcholu B ke kruhu vyjádřiti rovnicí

$$(1) \qquad xy = \overline{BG}^2 = (a - r)^2,$$

a zároveň jest patrno, že

$$(2) \qquad x - y = 2r,$$

kdež r značí délku poloměru $OE = OG = OH$.

Vyjádřeme nyní r odvěsnami a, b. Z trojúhelníků podobných AOH a OBG plyne

$$AH : OG = OH : BG$$

čili
$$(b - r) : r = r : (a - r),$$

odkudž
$$r = \frac{ab}{a+b}.$$

Dosadíme-li za r obdrženou hodnotu do rovnice (1), (2) obdržíme po krátké redukci

$$xy = \frac{a}{(a+b)^2},$$

$$(3) \qquad x - y = \frac{2\,ab}{a+b}.$$

Řešením těchto rovnic obdržíme hodnoty pro x a y. Za tím účelem odvoďme z rovnic zmíněných známým způsobem rovnici

$$(x+y)^2 = \frac{4a^2(a^2+b^2)}{(a+b)^2}.$$

Ježto $a^2 + b^2 = c^2$, bude, majíce jen absolutní délky na mysli

$$(4) \qquad x + y = \frac{2ac}{a+b}.$$

Z rovnic (3) a (4) vypočteme snadno

$$x = \frac{a(b+c)}{a+b}, \quad y = \frac{a(c-b)}{a+b}.$$

Dále jest

$$\mathrm{ED} = \mathrm{BD} - y = \frac{a^2}{c} - \frac{a(c-b)}{a+b} = \frac{a^3 + a^2b - ac^2 + abc}{c(a+b)}$$

$$= \frac{-a(c^2 - a^2) + ab(a+c)}{c(a+b)} = \frac{-ab^2 + ab(a+c)}{c(a+b)},$$

$$(5) \qquad \mathrm{ED} = \frac{ab(a-b+c)}{c(a+b)}.$$

Jest patrno, že

$$\mathrm{DF} = 2r - \mathrm{ED} = \frac{2ab}{a+b} - \frac{ab(a-b+c)}{c(a+b)}$$

$$(6) \qquad \mathrm{DF} = \frac{ab(-a+b+c)}{c\,a \quad b)}.$$

V trojúhelníku pravoúhlém jest výška

$$(7) \qquad \mathrm{CD} = \frac{ab}{c}.$$

Dělíme-li rovnici (7) rovnicí (5), obdržíme

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DE}} = \frac{a+b}{a-b+c},$$

a podobně lze z rovnice (5) a (6) vypočítati poměr

$$\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{DF}} = \frac{a - b + c}{-a + b + c}.$$

Druhé řešení: V trojúhelníku ABC jest těžnice

$$\mathrm{CO} = \frac{2ab \cos \frac{\gamma}{2}}{a + b} = \frac{ab\sqrt{2}}{a + b} \quad \text{a} \quad r = \frac{ab}{a + b}.$$

Vyjádříme-li plochu trojúhelníka dvakráte, obdržíme

$$c \,.\, v_c = ab,$$

kdež v_c značí délku výšky CD na přeponu spuštěné, odkudž

$$v_c = \frac{ab}{c}.$$

Znajíce nyní délku těžnice CO a výšky CD, snadno vypočteme v trojúhelníku pravoúhlém COD délku odvěsny OD. Napřed obdržíme

$$\overline{\mathrm{OD}}^2 = \overline{\mathrm{CO}}^2 - \mathrm{CD}^2 = \frac{2\, a^2b^2}{(a + b)^2} - \frac{a^2b^2}{c^2} = \frac{a^2b^2\,(a - b)^2}{c^2\,(a + b)^2},$$

načež

$$\mathrm{OD} = \frac{ab\,(a - b)}{c\,(a + b)}.$$

Ježto $\mathrm{DE} = r + \mathrm{OD}$, jest

$$\mathrm{DE} = \frac{ab}{a + b} + \frac{ab\,(a - b)}{c\,(a + b)} = \frac{ab\,(c + a - b)}{c\,(a + b)}.$$

Konečně

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DE}} = \frac{ab}{c} : \frac{ab\,(c + a - b)}{c\,(a + b)}$$

čili

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DE}} = \frac{a + b}{a - b + c},$$

a to jest rovnice první, kterou nám bylo odvoditi.

K druhé rovnici dospějeme takto. Jest patrno, že

$$\mathrm{DF} = \frac{ab}{a + b} - \frac{ab\,(a - b)}{c\,(a + b)} = \frac{ab}{a + b}\,\frac{c - a + b}{c},$$

pročež

$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{FD}} = \frac{a - b + c}{-a + b + c}.$$

Poznámka. Je-li CD = DE, jest

$$\frac{a + b}{a - b + c} = 1,$$

odkudž $a = \frac{c}{2}$, tedy v pravoúhlém trojúhelníku ABC jest $\alpha = 60^0$.

Úloha 38.

Danému kruhu jest opsán lichoběžník ABCD (AD || BC). Dokázati, že úhlopříčky AC a BD se protínají na průměru, který dotyčné body rovnoběžných stran spojuje.

Řešení. (Zaslal p. *Vítězslav Vič,* stud. VIII. tř. g. v Chrudimi.)

Nechť strana DC dotýká se kružnice v bodu E. V souměrném čtyřúhelníku OEDM půlí úhlopříčka OD úhel MOE, a z téže příčiny půlí i OC úhel NOE. Ježto úhly MOE a NOE jsou vedlejší, stojí OD a OC na sobě kolmo, a že úhly MOD, a NCO v trojúhelnících pravoúhlých OMD a CNO jsou stejny jest $\triangle$ OMD $\sim$ $\triangle$ CNO, pročež

$$\mathrm{MD} : \mathrm{NO} = \mathrm{MO} : \mathrm{NC},$$

a že

$$\mathrm{MO} = \mathrm{ON} = r,$$

obdržíme z rovnice předešlé

$$\mathrm{MD} \,.\, \mathrm{NC} = r^2$$

a podobně

$$\mathrm{AM} \,.\, \mathrm{BN} = r^2,$$

tedy

$$\mathrm{AM} \,.\, \mathrm{BN} = \mathrm{MD} \,.\, \mathrm{NC}$$

čili

$$\mathrm{AM} : \mathrm{MD} = \mathrm{NC} : \mathrm{BN}.$$

Z úměry této a rovnoběžnosti stran AD a BC plyne, že AC, BD a MN protínají se v témž bodě P.

Úloha 39.

V trojúhelníku ABC jest $V_c V_c' = c^2$; *dokažte, že*

$$t_c = \frac{c}{2}\sqrt{5},$$

značí-li: V střed orthocentrický (průsečík výšek), V_c délku výšky CC_1, $CV = V_c'$ její hořejší úsek, t_c délku těžnice CT a c délku strany AB.

Řešení. (Zaslal p. *Václav Havlíček,* stud. VI. tř. r. v Písku.)

Budiž V středem orthocentrickým trojúhelníka ABC. Ježto body A_1BC_1V leží v téže kružnici, jest

$$CV \,.\, CC_1 = CA_1 \,.\, CB,$$

a že v kružnici ABA_1, kterou těžnice CT protíná v bodech D, E, jest

$$CD \,.\, CE = CA_1 \,.\, CB,$$

z posledních dvou rovnic plyne

$$CD \,.\, CE = CV \,.\, CC_1$$

čili
$$\left(t_c - \frac{c}{2}\right)^2 \left(t_c + \frac{c}{2}\right)^2 = v_c \,.\, v'_c,$$

a že dle podmínky $v_c v'_c = c^2$,

obdržíme z rovnice předešlé

$$t_c^2 - \frac{c^2}{4} = c^2,$$

odkudž
$$t_c = \frac{c}{2} \sqrt{5}\,.$$

Poznámka. Ježto $CV \,.\, CC_1 = CD \,.\, CE$, leží body D, V, C, E v téže kružnici.

Úloha 40.

Sestrojiti trojúhelník, je-li dán vrchol A, střed S kružnice vepsané, pata D symmetrály AS ve straně BC a rozdíl úhlů $B - C$.

Řešení. (Zaslal p. *Josef Půček,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci.)

Mějme trojúhelník ABC za sestrojený, i jest

$$\sphericalangle ADB = C + \frac{A}{2} = C + \frac{180 - (B + C)}{2} = 90 - \frac{B - C}{2},$$

pročež jest poloha strany BC známým úhlem ADB stanovena, i zbývá nám ve straně BC vrcholy B a C určiti. Symmetrály úhlů (180 — B) a (180 — C) protínají se v pevném bodu T symmetrály AD, neboť v harmonické čtveřině A, D, S, T jsou též body dané A, S, D pevny. A že body S a T jsou pevny a úhly SBT a SCT pravé, leží body B, S, C, T na kružnici Apolloniově trojúhelníka ABC. Znajíce nyní pro vrcholy B a C dvě místa geometrická, a to kružnici Apolloniovou a stranu BC co do polohy, jsou vrcholy B a C těmito místy stanoveny.

Sestrojme tedy úhel $ADB = 90 - \frac{B - C}{2}$ a k bodu S harmonicky sdružený bod T vzhledem k bodům A, D. Apolloniova kružnice na průměru ST sestrojená protne přímku BD v bodech B a C, které jsou hledanými vrcholy trojúhelníka ABC.

Úloha jest vždy a jednoznačně řešitelna, pokud S leží mezi A a D a (B — C) nebo (C — B) jest menší než 180°.

Úloha 41.

V lichoběžníku ABCD jest vedena příčka z kteréhokoliv bodu M podstavy jedné AB ku středu N podstavy druhé CD. Spojnice AN, MD protínají se v bodu R a BN, MC v bodu S. Dokázati, že přímky AS, BR a MN protínají se v témž bodu.

Řešení. (Zaslal p. *Otto Ottis,* stud. VI. tř. g. v Plzni).

Z rovnoběžnosti podstav AB a CD plyne

$$\frac{AM}{ND} = \frac{AR}{NR}, \qquad \frac{BM}{NC} = \frac{BS}{NS}.$$

Dělíme-li tyto rovnice, přihlížejíce zároveň k podmínce, že $DN = -NC$, obdržíme

$$-\frac{AM}{BM} = \frac{AR}{NR} : \frac{BS}{NS} \quad \text{čili} \quad \frac{AM \, . \, BS \, . \, NR}{BM \, . \, NS \, . \, AR} = -1,$$

t. j. v trojúhelníku ABN protínají se AS, BR a MN v témž bodu P.

Úloha 42.

V kosočtverci ABCD, jehož úhlopříčka AC rovná se straně AB, vedena jest vrcholem D přímka strany AB, BC a úhlopříčka CA v bodech C_1, A_1 a B_1 tak protínající, že $A_1C_1 = DB_1$.

Dokázati: 1. že $AB_1 = CA_1 = BC_1$, a 2. že bod B_1 dělí úhlopříčku AC dle zlatého řezu. Na základě poslední vlastnosti sestrojte příčku DC_1.

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Záviška,* stud. VI. tř. g. v Brně).

1. V podobných trojúhelnících AB_1D a CB_1A_1 jest

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{B_1D}{A_1B_1},$$

přičteme-li ku členům dolním členy horní, bude

$$\frac{AB_1}{AB_1 + B_1C} = \frac{B_1D}{A_1B_1 + B_1D}$$

čili

$$(1) \qquad \frac{AB_1}{AC} = \frac{B_1D}{A_1D} = \frac{A_1C_1}{A_1D}.$$

Ježto $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle A_1CD$, jest

$$(2) \qquad \frac{BC_1}{CD} = \frac{A_1C_1}{A_1D}.$$

Z (1) a (2) plyne

$$\frac{AB_1}{AC} = \frac{BC_1}{CD},$$

a že

$$AC = CD,$$

jest

$$(3) \qquad AB_1 = BC_1.$$

Dále jest v trojúhelnících podobných A_1B_1C a DB_1A

$$(4) \qquad \frac{A_1C}{AD} = \frac{B_1C}{AB_1} = \frac{AC - AB_1}{AB_1}$$

a v trojúhelnících podobných A_1CD, A_1BC_1

$$(5) \qquad \frac{A_1C}{CD} = \frac{A_1B}{BC_1} = \frac{BC - A_1C}{BC_1} = \frac{AC - A_1C}{AB_1}.$$

Z úměr (4) a (5) plyne

$$\frac{AC - AB_1}{AB_1} = \frac{AC - AC_1}{AB},$$

odkudž

$$AB_1 = AC_1,$$

tedy dle rov. (3)

$$AB_1 = AC_1 = BC_1.$$

2. Z podobných trojúhelníků B_1CA a B_1AD plyne:

$$B_1C : AB_1 = AC_1 : AD\,,$$

a že

$$A_1C = AB_1\,,\; AD = AC\,,$$

jest

$$B_1C : AB_1 = AB_1 : BC\,,$$

z úměry této vysvítá, že bod B_1 dělí stranu AC dle zlatého řezu.

Úloha 43.

V trojúhelníku ABC jest příčka AA′ symmetrálou úhlu BAC; patou její A′ buďtež vedeny příčky $A'B' \parallel BA$, $A'C' \parallel CA$. Dokázati, že

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{bc}{(b+c)^2}\,,$$

kdež Δ a Δ' značí ploské obsahy trojúhelníkův ABC a A′B′C′.

Řešení. (Zaslal p. *Oskar Tomandl,* stud. VIII. tř. g. v Brně).

Rovnoběžník AB′AC′ jest kosočtverec, neboť jeho úhlopříčka AB′ půlí úhel B′AC′, i jest $\triangle A'B'C' \cong \triangle AB'C' = \Delta'$,

$$AB' = AC'.$$

Ježto trojúhelníky AB′C′ a ABC mají společný úhel α jest

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{AB' \,.\, AC'}{AB \,.\, AC} = \frac{AB'^2}{bc}\,, \tag{1}$$

a že

$$A'B' \parallel BC\,,\; \text{a} \measuredangle BAA' = \measuredangle A'AB\,,$$

platí úměra

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{BA'}{A'C} = \frac{c}{b}\,;$$

přičteme-li ku členům spodním členy horní, obdržíme

$$\frac{AB'}{b} = \frac{c}{b+c}\,.$$

Z rovnice této a (1) obdržíme konečně

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{bc}{(b+c)^2}\,.$$

Úloha 44.

V trojúhelníku pravoúhlém ABC jsou vedeny ostrými úhly A, B příčky AA_1, BB_1, které tvoří s odvěsnami úhly $CAA_1 = \alpha$, $CBB_1 = \beta$, a utínají na odvěsnách $CB = a$, $CA = b$ úseky $CA_1 = a_1$, $CB_1 = b_1$.

Je-li $ab = aa_1 + a_1b_1 + ba_1$, jest $\alpha + \beta = 45^0$. Dokázati.

Řešení. (Zaslal p. *Karel Nečas*, stud. VI. tř. g. ve Val. Meziříčí).

Podmínku lze upraviti takto:

$$1 = \frac{a_1}{b} + \frac{a_1}{b} \cdot \frac{b_1}{a} + \frac{b_1}{a}.$$

V trojúhelnících pravouhlých AA_1C, BB_1C jest

$$\frac{a_1}{b} = \operatorname{tg} \alpha, \qquad \frac{b_1}{a} = \operatorname{tg} \beta,$$

pročež
$$1 = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta,$$

čili
$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta,$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = 1, \qquad \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 1,$$

tedy
$$\alpha + \beta = 45^0.$$

Úloha 45.

V kruhu trojúhelníku ABC opsaném jest vedena středem strany AB tetiva $B_1C_1 = a_1$ rovnoběžně se stranou BC. Dokažte,

že
$$4(a^2a_1{}^2 + b^2c^2) = (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Řešení. (Zaslal p. *Josef Grohman* v Ivanovicích na Moravě).

Buďtež C′, B′ středy stran AB, AC a znamenejme

$$B_1C' = x_1, \quad C'C_1 = x_2, \quad B'C_1 = y_1, \quad B_1B' = y_2.$$

Mocnosti bodů C′ a B′ ke kruhu lze vyjádřiti rovnicemi

$$x_1x_2 = \frac{c^2}{4} \tag{1}$$

$$y_1y_2 = \frac{b^2}{4}. \tag{2}$$

Hledejme nyní vztah mezi tetivou $B_1C_1 = a_1 = x_1 + x_2$ a stranami a, b, c.

Jest patrno, že

$$y_2 = x_1 + \frac{a}{2}, \quad y_1 = x_2 - \frac{a}{2},$$

vyloučíme-li y_1, y_2 z rovnic těchto a rovnice (2), obdržíme

$$x_2 - x_1 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Z rovnice této a rovnice (1) lze známým spůsobem odvoditi rovnici

$$(x_2 + x_1)^2 = \frac{4a^2c^2 + (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}$$

čili

$$4a^2a_1^2 = 4a^2c^2 + a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2,$$
$$4a^2a_1^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - 4b^2c^2,$$

a konečně

$$4(4aa_1^2 + b^2c^2) = (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Je-li $a = b = c$, jest

$$a_1 = \frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

Úloha 46.

Je-li v kruhu rovnostrannému trojúhelníku opsaném vedena tetiva $B_1C_1 = x$ půlícími body dvou stran, jest prostá délka

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{5},$$

kdež a značí délku strany rovnostranného trojúhelníka.

Řešení. (Zaslal p. *Dominik Trnka,* stud. VI. tř. g. ve Vys. Mýtě).

Nechť $B_1C_1 = x$ půlí strany AB, AC v bodech C′ a B′. Znamenáme-li $BC' = x_1$, $C'C_1 = x_2$ jest

$$x_1 + x_2 = x.$$

Mocnost bodu C′ ke kruhu jest

$$x_1x_2 = \frac{a^2}{4}, \tag{1}$$

a

$$(2) \qquad x_2 - x_1 = \frac{a}{2}.$$

Z posledních dvou rovnic lze známým spůsobem odvoditi rovnici

$$(x_1 + x_2)^2 = \frac{5a^2}{4},$$

pročež $\quad x^2 = \frac{5a^2}{4} \quad$ a konečně $\quad x = \frac{a}{2}\sqrt{5}.$

Poznámka. Řešením rovnic (1) a (2) obdržíme

$$B_1C' = x_1 = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

$$C_1C' = B_1B' = x_2 \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Užitím Carnotovy věty lze vypočítati

$$A_1B_1 = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Úloha 47.

Řešiti rovnoramenný trojúhelník, jehož rameno jest o 29·1 cm menší než půdice a úhel ramen o 50° 59′ 30″ větší než úhel při půdici.

Řešení. (Zaslal p. *Alfred Králík*, stud. VII. tř. g. v Žitné ulici v Praze).

Budiž půdice a, rameno b, úhel při půdici α, úhel ramen γ. Jest tedy

$$a - b = 29{\cdot}1,$$

$$\gamma - \alpha = 50^0 59' 30''.$$

Poněvadž $\quad \gamma = 2R - \alpha,$

est $\quad 2R - 3\alpha = 50^0 59' 30'',$

tudíž

$$\alpha = 43^0 0' 10'', \qquad \gamma = 93^0 59' 40''.$$

K vypočítání stran užijeme úměry

$$(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg}\frac{\gamma + \alpha}{2} : \operatorname{tg}\frac{\gamma - \alpha}{2},$$

odkud nalezneme

$$a + b = 154{\cdot}9\,,$$

pročež

$$a = 92\,cm\,, \qquad b = 62{\cdot}9\,cm\,,$$

Mimo to jest výška

$$v = 2a \sin \alpha = 42{\cdot}9\,cm.$$

Úloha 48.

V rovnoramenném lichoběžníku jest délka ramene $c = 13$, střední příčka $p = 35$, úhel při půdici $\alpha = 67^0\,22'\,48''$. Vypočítati obě půdice, výšku a úhlopříčku lichoběžníku.

Řešení. (Zaslal p. *Ermín Pokorný*, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze).

Nejprve vypočítáme výšku

$$v = c \sin \alpha = 12\,,$$

potom rozdíl půdic

$$a - b = d = 2c \cos \alpha = 10.$$

Jelikož jest

$$a + b = 2p = 70\,,$$

bude

$$a = 40\,, \qquad b = 30\,.$$

Úhlopříčka

$$u = \sqrt{p^2 + v^2} = 37\,.$$

Úloha 49.

Sestrojíme-li ke kružnici poloměru r a středu o v bodě a tečnu a přeneseme-li na tuto tečnu úsečku

$$\overline{am} = \frac{9}{14} r = \frac{1}{2} r + \frac{1}{7} r,$$

protíná spojnice $\overline{om}$ kružnici v bodě b tak, že $\overline{ab}$ přibližně rovná se straně pravidelného 11tiúhelníka do kružnice vepsaného. S jakou přesností?

Řešení. (Zaslal p. *Vítězslav Vic,* stud. VIII. tř. g. v Chrudimi).

Je-li $\sphericalangle\, aom = \alpha$, jest $\operatorname{tg}\alpha = \frac{9}{14}$,

pročež $\qquad \alpha = 32^0\, 44'\, 6''$

a tedy

$$\overline{ab} = 2r \sin\frac{\alpha}{2} = 0{\cdot}56362\, r\,.$$

Středový úhel v pravidelném 11úhelníku jest však

$$\beta = \frac{4R}{11} = 32^0\, 43'\, 38'',$$

strana pak

$$s = 2r \sin\frac{\beta}{2} = 0{\cdot}56346\, r\,.$$

Rozdíl mezi správnou hodnotou s a hodnotou sestrojenou $s' = \overline{ab}$ jest tedy

$$s' - s = 0{\cdot}00016\, r\,,$$

což jest pro konstrukci přesnost více než dostatečná.

Poznámka. Hodnota

$$\frac{9}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$$

jest 5. sblížený zlomek řetězce

$$\operatorname{tg}\beta = 0{\cdot}64265 = {}^1/_1 + {}^1/_1 + {}^1/_1 + {}^1/_3 + {}^1/_1 + {}^1/_{23} + \dots$$

Úloha 50.

V kterém poměru jest obsah pravidelného pětiúhelníka abcde k obsahu trojúhelníka abd?

Řešení. (Zaslal p. *František Vrána,* stud. VI. tř. g. na Malé Straně v Praze).

Je-li a strana pravidelného 5tiúhelníka *abcde*, jest obsah jeho

$$O_5 = \frac{5}{4}\, a^2 \operatorname{cotg} 36^0 = \frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\,,$$

obsah trojúhelníka *abd* jest pak

$$O_3 = \frac{a^2}{4}\left(\operatorname{cotg} 36^0 + \operatorname{cosec} 36^0\right) = \frac{a^2}{4} \operatorname{cotg} 18^0 = \frac{a^2}{4}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

proto

$$O_3 : O_5 = 1 : \sqrt{5}\,.$$

Úloha 51.

V přímé řadě za sebou leží místa a, b, c tak, že $\overline{ab} = 228\ m$, $\overline{bc} = 264\ m$. *Ze stanoviska s pozorována tato místa v úhlech* $asb = 50^0\, 41'\, 33''$, $bsc = 33^0\, 58'\, 53''$. *Vypočítati sa, sb, sc.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Grohman,* v Ivanovicích na Moravě.)

Označme

$$\overline{ab} = a, \quad \overline{bc} = b\,, \quad \sphericalangle\, asb = \alpha, \quad \sphericalangle\, bsc = \beta,$$
$$\overline{sa} = x, \quad \overline{sb} = y, \quad \overline{sc} = z.$$

Z poměru obsahů trojúhelníků *abs*, *bcs* vysvítá úměra

$$x \sin\alpha : z \sin\beta = a : b,$$

tudíž

$$\frac{z}{x} = \frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta} = n = 1{\cdot}603.$$

Mimo to jest

$$(a + b)^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cos(\alpha + \beta),$$

pročež

$$x = \frac{a + b}{\sqrt{1 - 2n\cos(\alpha + \beta) + n^2}}\,.$$

Dosazením hodnot daných obdržíme

$$x = 272, \quad z = 436.$$

Vzdálenost y vypočítáme z rovnice

$$\frac{a + b}{b} = \frac{x \sin(\alpha + \beta)}{y \sin\beta},$$

z níž plyne

$$y = 260.$$

Jsou tedy hledané vzdálenosti

$$\overline{sa} = 272\ m, \quad \overline{sb} = 260\ m, \quad \overline{sc} = 436\ m.$$

Jiné řešení. Úloha daná jest zvláštním případem úlohy Pothenotovy a lze ji s výhodou též řešiti takto:

Označíme-li

$$\sphericalangle\, bas = \varphi, \quad \sphericalangle\, bcs = \psi,$$

jest

$$\varphi + \psi = 2\mathrm{R} - (\alpha + \beta),$$

mimo to pak

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\frac{z}{x}=\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}.$$

Z posledních dvou rovnic ustanoví se úhly φ, ψ *), načež vyhledají se délky x, y, z dle věty sinové.

Úloha 52.

Na hranách trojhranu, jehož hrany jsou vzájemně kolmé, odtíná rovina úseky $\overline{oa}=a$, $\overline{ob}=b$, $\overline{oc}=c$. *a) Který jest obsah trojúhelníka abc? b) Kterou vzdálenost má rovina abc od vrcholu trojhranu o?*

Řešení. (Zaslal p. *Václav Havlíček,* stud. VI. tř. r. v Písku.)

Strany trojúhelníka *abc* jsou

$$\sqrt{a^2+b^2},\quad \sqrt{b^2+c^2},\quad \sqrt{c^2+a^2},$$

pročež obsah jeho dle vzorce Heronova

$$\varDelta=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

Obsah jehlanu *oabc* jest

$$\mathrm{J}=\frac{1}{6}abc$$

aneb, značí-li v vzdálenost roviny *abc* od vrcholu o,

$$\mathrm{J}=\frac{1}{3}\varDelta v;$$

proto jest

$$v=\frac{abc}{2\varDelta}=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}.$$

Poznámka: Je-li na př. $a=28$, $b=21$, $c=16$, obdržíme racionální výsledky

$$=\varDelta 406,\quad v=11\frac{17}{29}.$$

*) *Strnad*, Geometrie pro vyšší školy realné, str. 149. aneb: Geometrie pro vyšší gymnasia, str. 200.

Úloha 53.

Do rovnostranného kužele vepsati krychli. Úloha budiž řešena počtem i konstrukcí.

Řešení počtem. (Zaslal p. *Bohdan Bartošek,* stud. VII. tř. g. v Brně).

Poloměr základny kuželové budiž r, tedy strana $s = 2r$, výška $v = r\sqrt{3}$; hranu vepsané krychle jmenujeme x. Učiňme v krychli úhlopříčný řez kolmý ku základně kužele; rovinu jeho seče kužel v rovnostranném trojúhelníku, do něhož jest vepsán obdélník o stranách x, $x\sqrt{2}$. Platí tedy úměra

$$2r : r\sqrt{3} = x\sqrt{2} : (r\sqrt{3} - x),$$

ze které vypočítáme

$$x = \frac{2r\sqrt{3}}{2 + \sqrt{6}} = r\,(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}).$$

Řešení konstrukcí. (Zaslal p. *Čeněk Nevečeřal,* stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře.)

Plášť rozdělíme povrchovými přímkami na čtyři rovné díly. Na každé z těchto přímek nutně musí býti jeden vrchol krychle; ostatní čtyři budou v podstavě. Zvolíme si třetí rovinu průmětnou, která je rovnoběžna se spojnicí stop a dvou sousedních řečených přímek; narýsujeme 3. obraz kužele i přímek povrchových, které se po dvou stotožní; do tak utvořeného trojúhelníka vepíšeme známým způsobem čtverec, který jest vlastně 3. obrazem krychle. Nezbývá než spojnicemi určiti obraz první a druhý.

Třetí rovina by se stala zbytečnou, kdyby spojnice řečených stopníků byla rovnoběžna s osou x_{12}.

Úloha 54.

V kterém poměru jest plášť kužele komolého o poloměrech $r_1 = 14$, $r_2 = 6$ a výšce $v = 15$ k plášti dvojkužele o týchž základnách?

Řešení. (Zaslal p. *Vincenc Tiefenbach,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci.)

Plášť kužele komolého

$$P_1 = \pi (r_1 + r_2)\, s$$

a poněvadž $\quad s = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + v^2} = 17,$

tedy $\quad P_1 = 340\, \pi.$

Plášť dvojkužele skládá se z pláště dvou kuželů o stranách s_1, s_2 a jest

$$P_2 = \pi (r_1 s_1 + r_2 s_2),$$

při čemž $\quad s_1 : s_2 = r_1 : r_2$

$$s_1 + s_2 = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + v^2} = 25,$$

tudíž $\quad s_1 = 77{\cdot}5, \quad s_2 = 7{\cdot}5,$

$$P_2 = 290\, \pi;$$

$$P_1 : P_2 = 34 : 29.$$

Úloha 55.

Odřízneme-li všechny hořejší rohy krychle rovinami jdoucími dolejšími vrcholy a středy hran hořejších, obdržíme 10tistěn. Jak velký jest povrch a krychlový obsah tohoto tělesa, je-li dána hrana krychle?

Řešení. (Zaslal p. *Jiří Nerád,* stud. VII. tř. g. v Hradci Králové.)

Buďtež A, B, C, D vrcholy spodní podstavy, které určují se středy E, F, G, H hořejších hran stěny ABE, BEF, BCF atd. 10-stěnu ABCDEFGH.

1. Povrch skládá se ze dvou čtverců a z 8 trojúhelníků rovnoramenných, z nichž čtyři a čtyři jsou shodny. I jest

$$\triangle\, ABE = \frac{a^2}{2},$$

$$ABCD = a^2,$$

$$EFGH = \frac{a^2}{2}.$$

V trojúhelníku BEF jest s vrcholu B na EF spuštěná výška

$$v = \sqrt{\overline{BE}^2 - \left(\frac{EF}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4} - \frac{a^2}{8}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\, a,$$

kdež $\quad EF = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$

Nyní jest

$$\triangle \mathrm{BEF} = \frac{1}{2} \overline{\mathrm{EF}} \,.\, v = \frac{3}{8} a^2.$$

Ježto povrch

$$\mathrm{P} = 4 \triangle \mathrm{ABC} + \mathrm{ABCD} + \mathrm{EFGH} + 4 \triangle \mathrm{BEF},$$

jest $$\mathrm{P} = \frac{4a^2}{2} + a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{12a^2}{8}$$

čili $$\mathrm{P} = 5a^2.$$

2. Odříznuté jehlany jsou veskrz shodny, pročež se rovná krychlový obsah 10-stěnu obsahu krychle zmenšenému o 4násobný obsah k jednoho odříznutého jehlanu BEFH, kdež H značí ku řezu BEF příslušný vrchol krychle. V jehlanu BEFH lze EFH považovati za podstavu a hranu BH, která na rov. (EFH) stojí kolmo, za výšku jehlanu; i jest tedy

$$k = \frac{1}{3} \triangle \mathrm{EFH} \,.\, \overline{\mathrm{BH}} = \frac{1}{3} \frac{a^2}{8} \,.\, a = \frac{a^3}{24},$$

pročež obsah 10-stěnu

$$\mathrm{K} = a^3 - 4 \,.\, \frac{a^3}{24},$$

a po krátké redukci

$$\mathrm{K} = \frac{5}{6} a^3.$$

Úloha 56.

Do koule o poloměru daném r jest vepsán kužel, jehož plášť p rovná se třem polovinám hlavního kruhu koule. Jak velký jest úhel při vrcholu tohoto kužele?

Řešení. (Zaslal p. *Fr. Borkovec,* stud. VII. tř. g. v Brně). Plášť

$$p = \pi \varrho s,$$

je-li s stranou a ϱ poloměrem kruhové podstavy. Budiž r poloměrem koule, potom jest

$$\varrho = r \sin \alpha, \qquad \frac{s}{2} = r \cos \frac{\alpha}{2},$$

kteréžto vzorce plynou z trojúhelníků pravoúhlých, které mají společnou přeponu r, odvěsnami jejich jsou ϱ a $\frac{5}{2}$ a proti těmto odvěsnám ležící úhly rovnají se úhlu α.

Bude tedy plášť

$$p = 2\pi r^2 \sin\alpha \cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{a že} \quad p = \frac{3}{2}\pi r^2,$$

jest
$$2\pi r^2 \sin\alpha \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}\pi r^2,$$

odkudž
$$\sin\alpha \,.\, \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4};$$

i jde o řešení této rovnice.

Za tím účelem uveďme rovnici poslední na tvar

$$\sin\alpha \,.\, \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \,.\, \frac{\sqrt{3}}{2};$$

ježto

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^0 \quad \text{a} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^0,$$

bude

$$\sin\alpha \,.\, \cos\frac{\alpha}{2} = \sin 60^0 \,.\, \cos 30^0,$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} = \sin 30^0 \cos^2 30^0,$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = \sin 30^0 (1 - \sin^2 30^0),$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} - \sin^3\frac{\alpha}{2} = \sin 30^0 - \sin^3 30,$$

$$\sin^3\frac{\alpha}{2} - \sin^3 30^0 - \left(\sin\frac{\alpha}{2} - \sin 30^0\right) = 0,$$

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \sin 30^0\right)\left(\sin^2\alpha + \sin\alpha \sin 30^0 + \sin^2 30^0 - 1\right) = 0.$$

Součin tento jest roven 0, je-li

$$\sin\frac{\alpha}{2} - \sin 30^0 = 0$$

nebo
$$\sin^2\alpha + \sin\alpha \sin 30^0 + \sin^2 30^0 - 1 = 0.$$

Z rovnice předešlé plyne $\frac{\alpha}{2} = 30^0$,

pročež $\alpha_1 = 60^0$,
a kužel vepsaný jest rovnostranný.

Druhou rovnici, z níž úhel α jest nám vypočítati, lze uvésti na tvar

$$\sin^2\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1}{4} = 0.$$

Řešením této rovnice obdržíme

$$\sin\alpha_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{4}.$$

$$\sin\alpha_2 = 0{\cdot}651388,$$

odkudž

$$\alpha_2 = 40^0\, 38'\, 48''.$$

Dále jest $\sin\alpha_3 = -1{\cdot}1513878$,
což býti nemůže.

Druhé řešení. Rovnici

$$\sin\alpha \,.\, \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4},$$

lze řešiti takto:

Uveďme rovnici tuto na tvar

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}, \qquad \sin\frac{\alpha}{2}\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3}{8},$$

$$8\sin^3\frac{\alpha}{2} - 8\sin\frac{\alpha}{2} + 3 = 0.$$

Položíme-li $\sin\frac{\alpha}{2} = x$, bude

$$8x^3 - 8x + 3 = 0;$$

z rovnice této lze odvoditi rovnici

$$(8x^3 - 4x^2) + (4x^2 - 4x + 1) - (4x - 2) = 0,$$
$$4x^2(2x - 1) + (2x - 1)^2 - 2(2x - 1) = 0,$$
$$(2x - 1)(4x^2 + 2x - 1) = 0,$$

tedy $2x = 1$ a $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

Z rovnice prvé plyne

$$x = \frac{1}{2}, \quad \text{pročež} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2},$$

tedy $\alpha = 60^0$.

Z druhé rovnice obdržíme

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{4},$$

kterýžto výsledek při prvním řešení jsme též obdrželi. — Další řešení jest jako v úloze předešlé.

Úloha 57.

Dva vrcholy rovnostranného trojúhelníka dány jsou v pravoúhlé soustavě souřadnicemi a (2, 2), b (6, 5). Které souřadnice má vrchol třetí? Mohou všechny tři vrcholy rovnostranného trojúhelníka míti racionálné souřadnice?

Řešení. (Zaslal p. *Methoděj Nečas,* stud. VII. tř. g. v Brně).

Souřadnice třetího vrcholu c vyhovují rovnicím

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25,$$
$$(x-6)^2 + (y-5)^2 = 25;$$

rovnice tyto náležejí dvěma kružnicím, jichž průsečíkem jest bod c. Chordála těchto dvou kružnic, osa souměrnosti úsečky $\overline{ab} = 5$, má rovnici

$$8x + 6y - 53 = 0.$$

Řešením rovnic obdržíme

$$x = \frac{8 \pm 3\sqrt{3}}{2}, \qquad y = \frac{7 \mp 4\sqrt{3}}{2}.$$

Všechny tři vrcholy rovnostranného trojúhelníka nemohou míti v pravoúhlé soustavě souřadnice racionálné, neboť výška jeho $v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ a tedy byť i pata výšky měla souřadnice racionálné, vrchol c bude míti souřadnice neracionálné.

Poznámka redakce. Mají-li všechny tři vrcholy nějakého trojúhelníka v soustavě pravoúhlé souřadnice racionálné, jsou též tangenty úhlů tohoto trojúhelníka racionálné. Neboť při racionálných souřadnicích

$$a\,(x_1, y_1), \quad b\,(x_2, y_2), \quad c\,(x_3, y_3)$$

jsou racionálnými též směrnice stran $\overline{ac}$ a $\overline{bc}$

$$A_1 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}, \qquad A_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2},$$

a tudíž také

$$\operatorname{tg} \widehat{acb} = \frac{A_1 - A_2}{1 + A_1 A_2} = \frac{(y_3 - y_1)(x_3 - x_2) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_3 - y_1)(y_3 - y_2)}.$$

Ježto však

$$\operatorname{tg} 60^0 = \sqrt{3},$$

nemůže rovnostranný trojúhelník býti tak umístěn v soustavě pravoúhlé, aby všem jeho vrcholům příslušely souřadnice hodnot racionálných.

Úloha 58.

Střed pravidelného osmiúhelníka jest v počátku soustavy pravoúhlé, jedna strana jeho má rovnici $x + y = a$. Které jsou souřadnice vrcholů, které rovnice ostatních stran a které rovnice úhlopříček?

Řešení. (Zaslal p. *Josef Půček*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci).

Postupujíce od positivní části osy X ve smyslu kladném označme vrcholy osmiúhelníka $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ a_8$. Vrchol a_1 jest průsečík přímek

$$x + y = a$$

$$y = x \operatorname{tg} 22^0 30' = x(\sqrt{2} - 1),$$

z čehož ustanovíme souřadnice jeho i vrcholů ostatních:

$$x_1 = y_2 = y_3 = -x_4 = -x_5 = -y_6 = -y_7 = x_8 = \frac{a}{2}\sqrt{2},$$

$$y_1 = x_2 = -x_3 = y_4 = -y_5 = -x_6 = x_7 = -y_8$$
$$= \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2}).$$

Pak jsou rovnice stran

$$\overline{a_1 a_8},\ \overline{a_4 a_5} \quad \ldots \quad x = \pm \frac{a}{2}\sqrt{2},$$

$$\overline{a_2 a_3},\ \overline{a_6 a_7} \quad \ldots \quad y = \pm \frac{a}{2}\sqrt{2},$$

$$\overline{a_1a_2}, \overline{a_5a_6} \quad . . . \quad x + y = \pm a,$$
$$\overline{a_3a_8}, \overline{a_4a_8} \quad . . . \quad x - y = \mp a.$$

Rovnice úhlopříček $\overline{a_1a_5}$, $\overline{a_2a_6}$, $\overline{a_3a_7}$, $\overline{v_4a_8}$ jdoucích středem jsou

$$y = \pm x(\sqrt{2} \pm 1)$$

úhlopříčky $\overline{a_1a_4}$, $\overline{a_5a_8}$, $\overline{a_2a_7}$, $\overline{a_3a_6}$ rovnoběžné k osám mají rovnice

$$y = \pm \frac{a}{2}\left(3 - \sqrt{2}\right), \qquad x = = \frac{a}{2}\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

Úhlopříčky $\overline{a_1a_3}$, $\overline{a_2a_4}$, $\overline{a_5a_7}$, $\overline{a_6a_8}$ vyjádřeny jsou rovnicemi

$$\pm x(\sqrt{2} - 1) \pm y + 2a)(\sqrt{2} - 1) = 0$$

a obdobně úhlopříčky ostatní.

Úloha 59.

Který význam v pravoúhlé soustavě souřadnic má rovnice

$$\frac{mx + ny}{x + y} + \frac{nx - my}{x - y} = p?$$

Řešení. (Zaslal p. *Josef Frieb,* stud. VIII. tř. g. v Brně).

Rovnici danou lze upraviti na podobu

$$y^2 + 2Pxy - x^2 = 0,$$

kdež

$$P = \frac{m - n}{m + n - p}.$$

Rozložíme-li kvadratický trojčlen v lineárné činitele, obdržíme

$$(y - A_1x)(y - A_2x) = 0,$$

při čemž

$$A_{1,2} = -P \pm \sqrt{P^2 + 1}.$$

Značí tedy hořejší rovnice dvě přímky

$$y \quad A_1x = 0, \quad y - A_2x = 0$$

procházející počátkem. Jelikož jest $A_1 A_2 = -1$, stojí přímky ty na sobě kolmo.

Úloha 60.

V trojúhelníku ABC jest podstava $AB = c$ pevna a vrchol C proměnlivý. Je-li $a^2 + b^2 = 3c^2$, jest geometrickým místem vrcholu C kružnice. Dokázati geometricky i analyticky.

Řešení. (Zaslal p. *Ignác Deyl,* stud. VII. tř. r. v Pardubicích).

Jest známo, že

$$2t_c^2 = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2},$$

kdež t_c značí těžnici trojúhelníka ABC jdoucí vrcholem C. Dle podmínky jest

$$a^2 + b^2 = 3c^2,$$

i bude tedy z rovnice předešlé

$$t_c = \frac{c}{2}\sqrt{5},$$

t. j. vzdálenosť vrcholu C od pevného středu strany AB jest stálá, pročež jest geom. místem vrcholu C kružnice.

2. Řeš. Zvolme střed O strany AB za počátek a OB za kladný směr osy OX pravoúhlé soustavy souřadnic. Položíme-li

$$AO = OB = \frac{c}{2},$$

obdržíme pro vzdálenost vrcholu $C(x, y)$ od vrcholu $B\left(\frac{c}{2}, o\right)$ vzorce

$$\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = b^2, \qquad \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = a^2,$$

a dle podmínky jest

$$a^2 + b^2 = 3c^2.$$

Rovnici geom. místa vrcholu C obdržíme, vyloučíme-li a, b z posledních tří rovnic. Za tím účelem sečtěme první dvě rovnice, dosaďme do obdržené rovnice za a^2+b^2 hodnotu $3c^2$ z třetí rovnice plynoucí, načež po krátké redukci bude

$$x^2+y^2=\frac{5}{4}c^2,$$

pročež jest geom. místem vrcholu C kružnice o poloměru

$$r=\frac{c}{2}\sqrt{5}\,.$$

Úloha 61.

Řešiti rovnici

$$47(x^2-x+5)^2-19(x^2+x+5)^2=x^2.$$

Řešení. (Zaslal p. *Bohdan Bartošek*, stud. VII. tř. g. v Brně.)

Po krátké úpravě nabude rovnice tvaru

$$28x^4+307x^2-132x^3-660x+700=0;$$

položíme-li

$$x+\frac{5}{x}=y,$$

bude

$$28y^2-132y+307=0,$$

z čehož

$$y_1=\frac{9}{2}, \qquad y_2=\frac{3}{14}.$$

K tomu přísluší hodnoty

$$x_1=2,\ x_2=2\tfrac{1}{2},\ x_{3,4}=\frac{3\pm i\sqrt{3911}}{28}.$$

Jiné řešení. (Zaslal p. *R. Milota,* stud. VI. tř. g. v Písku.)

Dělíme-li rovnici činitelem

$$(x^2-x+5)^2$$

a položíme-li

$$\frac{x^2+5}{x^2-x+5}=y,$$

obdržíme rovnici

$$(y-1)^2 = 47 - 19\,(2y-1)^2$$

čili

$$77y^2 - 78y - 27 = 0\,.$$

Řešením dostaneme

$$y_1 = \frac{9}{7}\,, \qquad y_2 = -\frac{3}{11}\,,$$

a dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice hořejší, přijdeme k rovnicím

$$2x^2 - 9x + 10 = 0$$
$$14x^2 - 3x + 70 = 0\,,$$

jichž řešením nalezneme tytéž kořeny jako svrchu.

Úloha 62.

Řešiti rovnici

$$\log\sqrt{3x-5} + \log\sqrt{7x-3} = 1 + \log\sqrt{0{\cdot}11}.$$

Řešení. (Zaslal p. *Antonín Jelínek,* stud. V. tř. r. v Ječné ulici v Praze.)

Přejdeme-li od logarithmů k číslům, nabýváme rovnice

$$\sqrt{(3x-5)\,(7x-3)} = 10\sqrt{0{\cdot}11}$$

čili

$$21x^2 - 44x + 4 = 0.$$

Řešením obdržíme kořeny

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{2}{21}\,.$$

Úloha 63.

Zvětšíme-li celé číslo x o celé číslo y, zmenší se převratná hodnota čísla prvního o $\frac{1}{12}$ čísla druhého. Která jsou čísla x a y?

Řešení. (Zaslal p. *Alfred Králík,* stud. VII. tř. g. v Žitné ulici v Praze.)

Úloha vyjádřena jest rovnicí

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+y} = \frac{y}{12}$$

čili

$$x^2 + xy - 12 = 0.$$

Vyjádříme-li odtud

$$y = \frac{12 - x^2}{x} = \frac{12}{x} - x,$$

shledáme, že úloha má tato tři celistvá a kladná řešení:

$$x = 1,\ 2,\ 3$$
$$y = 11,\ 4,\ 1.$$

Úloha 64.

Lze-li rovnoramennému lichoběžníku o půdicích a, b vepsati kružnici, jsou dotyčné body vrcholy dvojstředového deltoidu. Vyšetřiti obsah tohoto čtyrúhelníka a poloměr kružnice jemu vepsané.

Řešení. (Zaslal p. *Antonín Rejzek,* stud. VI. tř. g. ve Vys. Mýtě.)

Půdice $\overline{ab} = a$, $\overline{cd} = b$ lichoběžníka *abcd* buďtež rozpůleny v bodech m, n, ramena $\overline{ad} = \overline{bc} = c$ v bodech p, q. Potom jest

$$\overline{am} = \overline{ap} = \overline{bm} = \overline{bq} = \frac{a}{2},$$

$$\overline{cn} = \overline{cp} = \overline{dn} = \overline{dp} = \frac{b}{2},$$

výška lichoběžníka

$$v = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}\,.$$

Označíme-li $\overline{pq} = x$, jest

$$a : (a - x) = b : (x - b),$$

tedy
$$x = \frac{2ab}{a+b},$$
proto obsah deltoidu
$$P = \frac{1}{2} vx = \frac{ab\sqrt{ab}}{a+b}.$$

Strany jeho $\overline{mp} = y$, $\overline{np} = z$ vypočítáme z rovnic
$$y^2 + z^2 = v^2$$
$$yz = P$$
a obdržíme
$$y = a\sqrt{\frac{b}{a+b}}, \qquad z = b\sqrt{\frac{a}{a+b}};$$
poloměr ϱ vepsané kružnice stanoven pak vztahem
$$\varrho(y+z) = P,$$
z čehož
$$\varrho = \frac{ab}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{a+b}}.$$

Úloha 65.

Nad každou stranou rovnostranného trojúhelníka jakožto půdicí sestrojen rovnoramenný trojúhelník, jehož rameno jest a Tím vznikne rovnostranný šestiúhelník, jehož obsah má se k obsahu rovnostranného trojúhelníka jako m : n. Vypočítati stranu tohoto trojúhelníka.

Řešení. (Zaslal p. *Jan Vojtěch,* stud. VI. tř. g. v Uh. Hradišti).

Nad stranami
$$\overline{ab} = \overline{bc} = \overline{ca} = x$$
trojúhelníka rovnostranného abc sestrojeny rovnoramenné trojúhelníky abm, bcn, cap, ve kterých
$$\overline{am} = \overline{bm} = \overline{bn} = \overline{cn} = \overline{cp} = \overline{ap} = a.$$

Jsou-li plochy

$$abm = \Delta, \quad abc = P_3, \quad ambncp = P_6,$$

jest dle podmínky

$$P_6 : P_3 = m : n.$$
$$P_6 = P_3 + 3\Delta.$$

Vyloučíce P_6 obdržíme

$$\frac{m-n}{n} P_3 = 3\Delta,$$

a jelikož

$$P_3 = \frac{x^2}{4}\sqrt{3}, \qquad \Delta = \frac{x}{4}\sqrt{4a^2 - x^2},$$

dospějeme k rovnici

$$(m-n)\, x\sqrt{3} = n\sqrt{4a^2 - x^2};$$

tuto řešíce nalezneme žádanou stranu trojúhelníka *abc*

$$x = \frac{2an\sqrt{3}}{\sqrt{m^2 - 2mn + 4n^2}}.$$

Úloha 66.

Trojúhelník rozděliti na tři stejné díly příčkami kolmými k půdici.

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Záviška*, stud. VI. tř. g. v Brně).

Trojúhelník *abc*, jehož výška $cd \perp ab$, rozdělen buď ve tři stejné díly příčkami

$$mp \perp ab, \quad nq \perp ab.$$

Jest pak

$$\frac{am}{ap} = \frac{ad}{ac}$$

a mimo to dle známé věty

$$am \,.\, ap = \frac{1}{3}\, ab \,.\, ac,$$

znásobením obou rovnic vespolek obdržíme

$$\overline{am}^2 = \frac{1}{3}\, ab \,.\, ad$$

a dle obdoby

$$\overline{bn}^2 = \frac{1}{3}\, ab \,.\, bd.$$

Bude tudíž sestrojení toto: Sestrojme na průměru *ab* polokružnici a vytkněme na něm body *f*, *g* tak, aby bylo

$$af = \frac{1}{3} ad, \qquad bg = \frac{1}{3} bd.$$

Vztýčíme-li až k polokružnici dosahující kolmice $fh \perp ab$, $gk \perp ab$, obdržíme body m, n v půdici ab přenesením tetiv

$$ah = am, \qquad bk = bn.$$

Úloha 67.

Pravidelný n-úhelník o kruh opsaný promítnut do roviny, s kterou rovina jeho svírá úhel φ. Průmět rovná se obsahem pravidelnému n-úhelníku vepsanému do téhož kruhu. Jest vyšetřiti velikost úhlu φ pro $n = 3, 4, 5, \ldots \infty$.

Řešení. (Zaslal p. *Theodor Novák*, stud. VII. tř. akad. g. v Praze).

Je-li r poloměr kruhu, jest plocha pravidelného 11-úhelníka opsaného

$$\mathrm{P} = nr^2 \operatorname{tg} \frac{2\mathrm{R}}{n}$$

a plocha průmětu jeho

$$\mathrm{P}_1 = \mathrm{P} \cos \varphi = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{4\mathrm{R}}{n}.$$

Z toho jde, že

$$\cos \varphi = \cos^2 \frac{2\mathrm{R}}{n}.$$

Odtud obdržíme zvláštní výsledky:

$$n = 3, \quad \cos \varphi = \frac{1}{4}, \quad \varphi = 75^0\, 31'\, 21'',$$

$$n = 4, \quad \cos \varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = 60^0,$$

$$n = 6, \quad \cos \varphi = \frac{3}{4}, \quad \varphi = 41^0\, 24'\, 35'',$$

. . . .

$$n = \infty, \cos \varphi = 1, \quad \varphi = 0.$$

Úloha 68.

Dokažte, že obsah pravoúhlého rovnoběžnostěnu rovná se součinu z průmětu pobočné hrany do úhlopříčky a řezu čtyrúhelného k ní kolmého.

Řešení. (Zaslal p. *Josef Frieb,* stud. VIII. tř. g. v Brně).
Obsah pravoúhlého rovnoběžnostěnu, vyjádřen jeho hranami, jest

$$K = abc.$$

Úhlopříčka u tvoří se základnou úhel φ a jest

$$\sin\varphi = \frac{c}{u}.$$

Čtyrúhelný řez kolmý k úhlopříčce má základnu rovnoběžnostěnu za pravoúhlý průmět; proto obsah jeho

$$R = \frac{ab}{\sin\varphi} = \frac{abu}{c}$$

a obsah rovnoběžnostěnu

$$K = R\,.\frac{c^2}{u}.$$

Jest však $$\frac{c^2}{u} = p$$

průmět pobočné hrany do úhlopříčky, tudíž

$$K = Rp.$$

Úloha 69.

Rovina rovnoběžná s protějšími hranami a, b čtyrstěnu, protíná jej v rovnoběžníku. Jsou-li x, y strany tohoto řezu, dokažte, že jest

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Řešení. (Zaslal p. *R. Milota,* stud. VI. tř. g. v Písku).
Budiž čtyrstěn $mnpq$, ve kterém

$$\overline{mn} = a, \overline{pq} = b.$$

Libovolná rovina rovnoběžná ku a i b seče čtyrstěn v rovnoběžníku $rstu$, při čemž

$$rs \parallel tu \parallel mn, \quad ru \parallel st \parallel pq,$$
$$rs = tu = x, \quad ru = st = y$$

Je-li bod r v hraně mp a píšeme-li

$$mr = c_1,\ pr = c_2,\ mp = c = c_1 + c_2$$

jest $$\frac{x}{a} = \frac{c_2}{c}, \quad \frac{y}{b} = \frac{c_1}{c},$$

tudíž
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{c_1+c_2}{c}=1\,.$$

Úloha 70.

Nad stranami pravoúhlého trojúhelníka sestrojeny čtverce, které otáčejíce se kolem přepony vytvoří tři tělesa. V kterém poměru jest součet těles vytvořených čtverci nad odvěsnami a, b k tělesu vzniklému čtvercem nad přeponou?

Řešení. (Zaslal p. *Vilém Novák,* stud. VII. tř. g. v Jičíně).

Čtverec na odvěsně a vytvoří otočením se kolem přepony těleso, jehož obsah vyjádříme dle pravidla Guldinova
$$A=2\pi r_1 a^2\,;$$
r_1 značí vzdálenost středu čtverce a^2 od přepony.

Leží-li v trojúhelníku daném proti odvěsně a úhel α jest
$$r_1=\frac{a}{2}\left(\cos\alpha+\sin\alpha\right)=\frac{a\,(a+b)}{2c}\,,$$
kdež c značí přeponu. Jest tedy
$$A=\frac{\pi a^3\,(a+b)}{c}\,;$$
čtverec na odvěsně b vytvoří obdobně těleso, jehož obsah
$$B=\frac{\pi b^3\,(a+b)}{c}\,.$$

Těleso vytvořené čtvercem přepony jest
$$C=2\pi\,.\,\frac{c}{2}\,.\,c^2=\pi c^3$$
a proto
$$(A+B):C=\frac{(a+b)\,(a^3+b^3)}{c}:c^3$$
čili
$$(A+B):C=(a+b)\,(a^3+b^3):(a^2+b^2)^2.$$

Úloha 71.

Dokažte, že obsah pravidelného dvacetistěnu rovná se $\frac{2}{3}$ součinu z obsahu pravidelného pětiúhelníka, určeného koncovými body hran z jednoho vrcholu vycházejících a z průměru koule opsané.

Řešení. (Zaslal p. *Josef Mucha,* stud. VI. tř. g. v Brně).

Je-li a strana pravidelného pětiúhelníka, jest obsah jeho

$$P = \frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

a poloměr kružnice jemu opsané

$$\varrho = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}.$$

Průměr koule opsané o pravidelný dvanáctistěn hrany a jest

$$d = \frac{a^2}{\varrho} = \frac{a}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Utvoříme-li součin

$$S = \frac{2}{3}\,Pd = \frac{a^3}{12}\sqrt{(25 + 10\sqrt{5})\,(10 + 2\sqrt{5})}\,,$$

obdržíme po snadné úpravě

$$S = \frac{5a^3}{12}\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} = \frac{5a^8}{12}\left(3 + \sqrt{5}\right),$$

což jest známý výraz pro obsah O pravidelného dvanáctistěnu. Jest tedy, jak tvrzeno,

$$O = \frac{2}{3}\,Pd.$$

Úloha 72.

Ustanoviti úhly trojúhelníka, ve kterém příčka půlící úhel γ má se ku příčce půlící vnější úhel γ' jako $(\sqrt{3} - \sqrt{2}) : (\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

Řešení. (Zaslal p. *Rudolf Tereba,* stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí).

Úhel γ sevřený stranami a, b půlen buď přímkou m, úhel vedlejší příčkou n.

Potom jest obsah trojúhelníka

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(a + b\right) m \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left(a - b\right) n \cos\frac{\gamma}{2}\,,$$

pročež
$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{n\cos\frac{\gamma}{2}}{m\sin\frac{\gamma}{2}} = (5 + 2\sqrt{6})\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$$

čili
$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}} = (5+2\sqrt{6})\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\,.$$

Jelikož však
$$\frac{\alpha+\beta}{2} = R - \frac{\gamma}{2}\,,$$
jest
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\,,$$
tudíž
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{5+2\sqrt{6}} = 5-2\sqrt{6}\,.$$

Znajíce pak
$$\frac{\alpha-\beta}{2} = 5^0\,46'\,7''$$
ustanovíme
$$\alpha = 95^0\,46'\,7'' - \frac{\gamma}{2}\,,$$
$$\beta = 84^0\,13'\,5'' - \frac{\gamma}{2}\,.$$

Úloha 73.

Ustanoviti bod, jehož zčtvercované vzdálenosti od bodů
a(—3, 5), b(7, 2), c(2, 8)
mají součet minimálný.

Řešení. (Zaslal p. *Josef Rieger,* stud. VI. tř. r. v Jičíně).

Dle podmínky jest
$$(x+3)^2 + (y-5)^2 + (x-7)^2 + (y-2)^2 + (x-2)^2 + (y-8)^2 = s$$
čili
$$3x^2 - 12x + 3y^2 - 30y + 155 - s = 0.$$

Odtud plyne
$$x = \frac{1}{3}\left[6 \pm \sqrt{36 - 3\,(3y^2 - 30y + 155 - s)}\right].$$

Při podmínce minima jest
$$3y^2 - 30y + 155 - s = 12,$$
z toho
$$y = \frac{1}{3}\left[15 \pm \sqrt{3s - 204}\right].$$

Musí tedy býti při minimu

$$s = 204:3 = 68,$$

z čehož souřadnice hledaného bodu

$$y = 5, \quad x = 2;$$

bod ten jest těžištěm trojúhelníka *abc*.

Úloha 74.

Do kosočtverce vepsána ellipsa maximalného obsahu. Máme-li její tečny za poláry ellipsy kosočtverci opsané, které jest geometrické místo polu?

Řešení. (Zaslal p. *Josef Frieb*, stud. VIII. tř. g. v Brně). Úhlopříčky kosočtverce $2u$, $2v$ tvořtež systém pravoúhlých koordinat, a rovnice ellipsy budiž:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Strany kosočtverce určeny jsou rovnicemi

$$\pm \frac{x}{u} + \frac{y}{u} = 1$$

čili

$$y = \pm \frac{v}{u} x \pm v = Ax + B. \qquad (\alpha)$$

Aby přímka $y = Ax + B$ dotýkala se ellipsy

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

musí, jak známo:

$B^2 = b^2 + a^2A^2$ čili vzhledem k (α)

$$a^2v^2 + b^2u^2 = u^2v^2. \qquad (1)$$

Ježto obsah ellipsy závisí na součinu poloos, bude podmínce vyhověno, když tento bude maximalní. Položme $ab = P$ a řešme rovnicí (1).

Z rovnice $a^4v^2 - a^2u^2v^2 + u^2P^2 = 0$ plyne při největším $P = \frac{uv}{2}$ délka poloos

$$a = \frac{u}{2}\sqrt{2} \qquad b = \frac{v}{2}\sqrt{2}.$$

Pro ellipsu opsanou kosočtverci

$$\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1$$

zní rovnice poláry příslušící pólu P (ξ, η) takto:

$$x\frac{\xi}{u^2} + y\frac{\eta}{v^2} = 1$$

čili

$$y = -\frac{v^2\xi}{u^2\eta} \cdot x + \frac{v^2}{\eta}.$$

Aby tato polára byla tečnou ellipsy vepsané, postačí, jak již jednou vytčeno, podmínka:

$$\frac{v^4}{\eta^2} = b^2 + a^2 \cdot \frac{v^4\xi^2}{u^4\eta^2}.$$

Dosadivše za a, b vypočtené hodnoty dostaneme po krátké redukci rovnici hledané křivky tuto:

$$v^2\xi^2 + u^2\eta^2 = 2u^2v^2.$$

Jest tedy geom. místem pólu ellipsa poloos

$$u\sqrt{2}, \quad v\sqrt{2}.$$

Úloha 75.

V trojúhelníku ABC jest půdice AB pevna a vrchol C proměnlivý. Vyšetřiti geom. místo tohoto vrcholu, je-li poloměr kružnice při půdici zevně vepsané roven n-násobnému poloměru kružnice v trojúhelník vepsané.

Řešení. (Zaslal p. *Karel Brdlík*, stud. VI. tř. g. v Písku). Jest známo, že poloměr kruhu vepsaného

$$\varrho = \frac{2\Delta}{a+b+c}$$

a kruhu zevně vepsaného

$$\varrho_c = \frac{2\Delta}{a+b-c},$$

kde Δ značí plochu tvojúhelníka.

Dle podmínky jest

$$\varrho_c = n\varrho.$$

Vyloučivše ϱ_c, ϱ, Δ z rovnic předešlých obdržíme

$$\frac{a+b+c}{a+b-c}=n$$

odkudž

$$a+b=\frac{n+1}{n-1}\cdot c\,.$$

Z rovnice této je patrno, že součet vzdáleností vrcholu C od pevných bodů A, B je stálý, pročež geometrické místo bodu c je ellipsa mající A, B za ohniska.

Správné řešení úloh zaslali pp.:

Ladislav Bardavský, stud. VI. tř. g. v Plzni, úl. 50., 61., 62., 63., 67.

Bohdan Bartošek, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 33., 35., 36., 46., 47., 48., 50., 53., 61., 62., 64., 65., 70., 71.

František Borkovec, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 33., 35., 36., 44., 46. až 50., 53. až 58., 61. až 66., 69., 70., 71., 73.

Karel Brdlík, stud. VI. tř. r. v Písku, úl. 35., 47., 48., 49., 51., 62., 63., 65., 69., 75.

Vladimír Caha, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 46., 61., 62., 65., 71.

Ignác Deyl, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 33., 35., 44., 46., 47., 48., 55., 58., 60. až 65., 67., 69., 70.

Jan Diviš, stud. VI. tř. g. v Č. Budějovicích, úl. 46., 47., 48., 50., 54., 61., 62.

Petr Dlouhý, stud. VIII. tř. g. v N. Bydžově, úl. 61., 62.

Josef Frieb, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 33. až 75.

Josef Grohman v Ivanovicích na Moravě, úl. 33. až 37., 43., 44., 45., 47. až 51., 55., 57., 58.

Eduard Gryc, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 33., 34., 35., 48., 61., 62.

Karel Gumička, stud. v Brně, úl. 44.

Jan Handl, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 33., 34., 35., 38., 42., 44., 46. až 50., 52. až 56., 66., 70., 71.

Václav Havlíček, stud. VI. tř. r. v Písku, úl. 33., 35., 36., 37., 39., 42. až 45., 47. až 50., 52., 53., 55., 56., 61. až 65., 69., 70.

Jan Hill, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 33., 46., 47., 48., 50., 55., 58., 62., 63., 65.
Richard Holl, stud. VII. tř. g. v Zitné ulici v Praze, úl. 33., 35., 37., 38., 46., 48., 50., 55., 56., 61., 65.
Jan Horák, stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 33., 35., 37., 47., 48., 49., 53., 55., 57., 58.
František Hůna, stud. V. tř. g. v Č. Budějovicích, úl. 70.
Rudolf Jambor, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 33. až 58., 60. až 64., 66., 69., 73.
Antonín Jelínek, stud. V. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 62., 67.
Jan Kapras, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 33., 35., 40., 42., 43., 45., 46., 50., 55., 61., 62., 64., 65., 66., 68., 70., 71.
Viktor Kidles, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 35., 62.
Arthur Klein, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 35., 47., 48., 49., 55.
Vilém Kloubek, stud. VI. tř. akad. g. v Praze, úl. 50., 54., 55., 62., 65., 69.
František Košelka, stud. VI. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 33., 46. 48., 54., 55.
Stanislav Kovanda, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 62., 63., 73.
Josef Kovářík, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 33., 35., 46., 47., 48., 50., 55.
Alfred Králík, stud. VII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, úl. 47., 48., 50., 55., 61., 62., 63.
Vladimír Kubeš, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 33., 35., 46., 47., 48., 50.
Josef Kugler, stud. VII. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 47., 48., 57., 61., 62., 63., 65.
Jindřich Macenauer, stud. VI. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 33., 54., 55., 62., 65.
Bedřich Macků , stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 15., 26., 27., 40., 46., 54., 55.
Bohuslav Masák, stud. VII. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 33., 35., 36., 43., 44., 46. až 51., 54., 55., 56.
Emanuel Mencl, stud. VI. tř. g. v Plzni, úl. 50., 61., 62., 63., 65., 68.

Vilibald Mildschuh, stud. VII. tř. g. v Kroměříži, úl. 33., 34., 35.
Rudolf Milota, stud. VI. tř. g. v Písku, úl. 33. až 75.
Josef Moravec, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 35., 40., 47., 48.
Josef Mucha, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 40., 46., 50., 62., 70., 71.
Karel Nečas, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 33., 35., 37., 39., 42., 43., 44., 46., 48., 49., 50., 53., 55., 58., 60., 61., 62., 64., 65., 67., 69., 71.
Methoděj Nečas, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 7. až 16., 18., 20., 21., 23., 25., 26., 28., 33., 35., 36., 40., 46. až 50., 52. až 58., 61. až 72.
Jiří Nerád, stud. VII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 33., 46., 48. až 58.
Čeněk Nevečeřel, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 47., 48., 50., 51., 52., 53., 55., 62. až 65.
Vilém Novák, stud. VII. tř. g. v Jičíně, úl. 33., 46. až 50., 57., 62., 63., 70.
Theodor Novák, stud. VII. tř. akad. g. v Praze, úl. 35., 46., 56., 62., 67.
Otto Ottis, stud. VI. tř. g. v Plzni, úl. 33. až 58., 60.
Maxmilian Paďour, stud. VII. tř. g. ve Vysokém Mýtě, úl. 47., 48., 62.
Jan Pikulík, stud. g. v Brně, úl. 46.
Josef Poláček, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 33., 53.
Jan Polák, stud. V. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 38., 40., 62.
Jaroslav Polák, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 48.
Josef Půček, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 33. až 75.
Antonín Rejzek, stud. VI. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 38., 46., 50., 64., 65.
Josef Rieger, stud. VI. tř. r. v Jičíně, úl. 33. až 38., 40. až 44., 46. až 49., 51., 53., 55., 58. až 66., 70., 73., 74., 75.
Antonín Ringl, stud. VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 33., 46., 47., 48., 62., 63.
Karel Samek, stud. V. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 62.

Stanislav Schiller, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 33., 36., 46., 48., 55.
Jaroslav Šlemr, stud. V. tř. g. v Chrudimi, úl. 48.
Ignác Špek, stud. g. v Brně, úl. 54.
Alois Štourač, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 36.
Rudolf Tereba, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 33., 46. až 50., 54., 55., 61., 62., 63., 66., 67., 69., 72.
Vincenc Tiefenbach, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 33., 35., 47. až 51., 54., 55.
Oskar Tomandl, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 33. až 66.
Dominik Trnka, stud. VI. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 46., 50.
Miloslav Valouch, stud. VIII. tř. g. v Olomouci úl. 33., 35., 37., 38., 40.
František Velíšek, stud. V. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 46., 47., 50., 55.
Vítězslav Vic, stud. VIII. tř. g. v Chrudimi, úl. 33. až 39., 45. až 53.
Jiří Víšek, stud. V. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 62.
F. Vitáček, stud. V. tř. g. v Klatovech, úl. 33., 62.
Jan Vojtěch stud. VI. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 26., 27., 33., 37., 40., 43., 46., 47., 50., 54., 55., 61. až 66., 70.
Václav Vondrák, stud. V. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 62.
František Vrána, stud. VI. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 33., 40., 46., 50., 55., 61., 62., 65.
Jan Zachoval, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 62., 70., 71.
František Záviška, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 33., 35., 37., 38., 39., 42., 43. až 56., 61. až 67,, 70., 71.
Josef Žďárský, stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 33. až 36., 46., 55.