Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vilém Jung

Několik analytických studií o plochách mimosměrek (zborcených). [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 18 (1889), No. 1, 23--29

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122416

Differencováním nabudeme

$$\frac{dr}{d\sigma} = -\frac{pr\sin\sigma}{(r-p\cos\sigma)},$$

a odtud

$$\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 + r^2 = r^2\frac{p^2\sin^2\sigma + (r-p\cos\sigma)^2}{(r-p\cos\sigma)^2} = \frac{r^2}{1-p^2\sin^2\sigma};$$

tím obdržíme pro onen potencial, když σ pro bod K označíme písmenem Σ,

$$\int_0^\Sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1-p^2\sin^2\sigma}}.$$

Srovnáním tedy jde

$$\int_0^\Sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1-p^2\sin^2\sigma}} = \frac{2}{1+p}\int_0^\Psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{2p}{(1+p)^2}\sin^2\psi}}.$$

Elliptický integral I. druhu s modulem p a horní mezí Σ dá se tedy přeměniti na jiný s modulem $\frac{\sqrt{2p}}{1+p}$ a horní mezí Ψ. Σ a Ψ jsou úhly σ a ψ, které přísluší k bodu K. Jednoduchou geometrickou rozvahou obdržíme

$$\cot\sigma\sin\omega = p + \cos\omega, \quad \text{a ježto} \quad \omega = 2\psi,$$

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{\sin 2\psi}{p+\cos 2\psi},$$

proto také

$$\operatorname{tg}\Sigma = \frac{\sin 2\Psi}{p+\cos 2\Psi}.$$

Několik analytických studií o plochách mimosměrek (zborcených).

Podává

Vilém Jung,
s. professor při státní průmyslové škole v Brně.

Úvod.

Výborné pojednání analytické prof. Řehořovského „O plochách zborcených" bylo mi pobídkou, abych se pokusil odvoditi základní vlastnosti tohoto druhu ploch analytickým způsobem *obecnějším*. Zvolil jsem totiž formu rovnic, určujících povrchové přímky plochy, nejobecněji nezávisle na rovinách souřadných, kdežto ve svrchu jmenovaném pojednání zvoleny rovnice orthog. průmětů povrchových přímek do rovin souřadných za východisko.

Tím se stalo analytické odvození průzračnějším a výsledky nabyly forem souměrnějších, při čemž hojně užito determinantů.

Kdo pročte bedlivě obě pojednání, sezná zajisté, že můj pokus není pouhým snad přepracováním některých statí svrchu vytčeného obšírnějšího pojednání, nýbrž že jest v provedení samostatným; obsahujeť namnoze zcela jiné myšlénky.

Mimo to budiž připomenuto, že jsou v tomto pojednání nazývány dvě přímky se protínající *„různosměrkami"*, dvě přímky se neprotínající *„mimosměrkami"*, plochy rozvinutelné *„plochami různosměrek"* a plochy zborcené *„plochami mimosměrek"*.

1. *Plocha mimosměrek* jest zákonitý souhrn přímek, z nichž pokaždé dvě soumezné jsou obecně mimosměrnými.

Budiž

$$\mathrm{A} \equiv \mathrm{A}_1 x + \mathrm{A}_2 y + \mathrm{A}_3 z + \mathrm{A}_4, \quad a \equiv a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4,$$

při čemž součinitelé A_k, a_k jsou funkcemi parametru t.

Znamená pak soustava rovnic

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A} &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

jistou povrchovou přímku pro určitou hodnotu parametru t, a obecně tedy plochu mimosměrek, jejíž rovnici $f(x, y, z) = 0$ bychom vyloučením parametru t ze soustavy (1) obdrželi.

2. *Tečná rovina.*

Rovnice tečné roviny zní, znamená-li

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial y} \quad f_3 = \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$(\xi - x) f_1 + (\eta - y) f_2 + (\zeta - z) f_3 = 0. \tag{2}$$

Differencováním (1) plyne

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A}_1 dx + \mathrm{A}_2 dy + \mathrm{A}_3 dz + \mathrm{A}' dt &= 0 \\ a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz + a' dt &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

při čemž

$$\mathrm{A}' = \frac{d\mathrm{A}}{dt}, \quad a' = \frac{da}{dt},$$

$$\left.\begin{aligned} A' &= A'_1 x + A'_2 y + A'_3 z + A'_4 \\ a' &= a'_1 x + a'_2 y + a'_3 z + a'_4 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$A'_k = \frac{dA_k}{dt}, \quad a'_k = \frac{da_k}{dt}.$$

Vyloučením veličiny dt z (3) plyne:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A' \\ a_1 & a' \end{vmatrix} dx + \begin{vmatrix} A_2 & A' \\ a_2 & a' \end{vmatrix} dy + \begin{vmatrix} A_3 & A' \\ a_3 & a' \end{vmatrix} dz = 0. \quad (5)$$

Avšak

$$f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = 0. \quad (6)$$

Srovnáním (5) a (6) plyne srovnalosť:

$$\frac{f_1}{\begin{vmatrix} A_1 & A' \\ a_1 & a' \end{vmatrix}} = \frac{f_2}{\begin{vmatrix} A_2 & A' \\ a_2 & a' \end{vmatrix}} = \frac{f_3}{\begin{vmatrix} A_3 & A' \\ a_3 & a' \end{vmatrix}}. \quad (7)$$

Dosazením do (2) obdržíme:

$$(\xi - x)\begin{vmatrix} A_1 & A' \\ a_1 & a' \end{vmatrix} + (\eta - y)\begin{vmatrix} A_2 & A' \\ a_2 & a' \end{vmatrix} + (\zeta - z)\begin{vmatrix} A_3 & A' \\ a_3 & a' \end{vmatrix} = 0,$$

čili

$$\begin{vmatrix} A_1(\xi - x) + A_2(\eta - y) + A_3(\zeta - z), & A' \\ a_1(\xi - x) + a_2(\eta - y) + a_3(\zeta - z), & a' \end{vmatrix} = 0, \quad (8)$$

jakožto rovnici tečné roviny v bodě (x, y, z) plochy $\left\{\begin{matrix} A = 0 \\ a = 0 \end{matrix}\right\}$, při čemž ξ, η, ζ značí měnlivé souřadnice bodů roviny tečné, x, y, z souřadnice bodu dotyčného.

Poněvadž ale

$$\begin{aligned} A_1 x + A_2 y + A_3 z &= -A_4 \\ a_1 x + a_2 y + a_3 z &= -a_4 \end{aligned}$$

možno rovnici (8) psáti ve formě velmi průzračné:

$$\begin{vmatrix} A(\xi\,\eta\,\zeta), & A'(x\,y\,z) \\ a(\xi\,\eta\,\zeta), & a'(x\,y\,z) \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

čili

$$A(\xi\,\eta\,\zeta) - \varkappa \,.\, a(\xi\,\eta\,\zeta) = 0 \quad (10)$$

při čemž

$$\varkappa = \frac{A'(x\,y\,z)}{a'(x\,y\,z)}. \quad (11)$$

Rovnice (10) znamená, že tečná rovina v bodě (x, y, z) obsahuje povrchovou přímku plochy, tomuto bodu příslušnou. Z rovnice té dále patrno, že *každé* tečné rovině, obsahující určitou povrchovou přímku (t) přísluší na této *určitý* dotyčný bod, neboť pro určitý bod (x, y, z) plyne z (11) určitá hodnota pro $\varkappa$.

Z toho plyne věta:

Každou přímku plochy mimosměrek lze považovati za osu svazku tečných rovin, jimž přísluší řada bodů dotyčných na téže přímce. Svazek tečných rovin jest s řadou bodů dotyčných v souvislosti jednoznačné, kterou zoveme *projektivností.*

Asymptotická rovina jest tečná rovina v bodě nekonečně vzdáleném přímky (t).

Nekonečně vzdálený bod přímky (t) jest dán rovnicemi

$$\begin{aligned} A_1 \frac{x}{z} + A_2 \frac{y}{z} + A_3 &= 0 \\ a_1 \frac{x}{z} + a_2 \frac{y}{z} + a_3 &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Dělme rovnici (9) veličinou $z = \infty$, čímž obdržíme

$$\begin{vmatrix} A(\xi\eta\zeta), & A'_1 \frac{x}{z} + A'_2 \frac{y}{z} + A'_3 \\ a(\xi\eta\zeta), & a'_1 \frac{x}{z} + a'_2 \frac{y}{z} + a'_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Ze (12) plyne

$$\frac{\frac{x}{z}}{\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{y}{z}}{\begin{vmatrix} A_3 & A_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}.$$

Dosazením těchto hodnot do (13) se podává

$$\begin{vmatrix} A(\xi\eta\zeta), & \Sigma \pm (A'_1 A_2 a_3) \\ a(\xi\eta\zeta), & \Sigma \pm (a'_1 A_2 a_3) \end{vmatrix} = 0,$$

platí tedy pro asymptotickou rovinu přímky (t)

$$\varkappa = \frac{\Sigma \pm (A'_1 A_2 a_3)}{\Sigma \pm (a'_1 A_2 a_3)} = \frac{\begin{vmatrix} A'_1 & A'_2 & A'_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}}. \tag{14}$$

Tečná rovina C, obsahující přímku (t) a kolmá k rovině asymptotické A, nazývá se centralnou rovinou přímky (t) a její bod dotyčný c centrem přímky (t); později poznáme blíže jeho význam.

3. *Rozvinutelné elementy ploch mimosměrek, vrcholové přímky a vrcholy.*

Protínají-li se dvě soumezné přímky na ploše mimosměrek, tvoří element rozvinutelný. Bod, v němž se protínají, zove se *vrcholem* a přímka, na níž se vrchol nalézá, *vrcholovou přímkou* plochy. Přímka, jejíž bod úběžný jest vrcholem plochy, zove se *hranou.*

Dvě soumezné přímky

$$\left.\begin{aligned} A(t) &= 0 \\ a(t) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

a

$$\left.\begin{aligned} A(t+dt) &= 0 \\ a(t+dt) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{15'}$$

mají se protínati.

Těmto čtyrem rovnicím má se vyhověti určitými hodnotami x, y, z, souřadnicemi vrcholu na přímce (t), možno tedy odvoditi z (15) a (15′) odčítáním a dělením veličinou dt místo (15′) podmínku

$$\left.\begin{aligned} A' &= 0 \\ a' &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{16}$$

Rovnice soustavy (15) a (16) znamenají čtyři roviny, jež mají procházeti jediným bodem, následkem toho musí se dáti levá strana druhé rovnice soustavy (16) napsati ve formě

$$a' = \mu_1 A + \mu_2 a + \nu A' \tag{17}$$

kde jsou μ_1, μ_2, ν čísla určitá.

Pro vrcholy tedy platí $A = 0$, $a = 0$, $A' = 0$, $a' = 0$. Pro veškeré body vrcholové přímky, vrchol vyjímaje, platí však pouze

$$A = 0, \quad a = 0$$

a proto ze (17) plyne

$$a' = \nu A', \quad A' \gtrless 0.$$

Dosazením do rovnice tečné roviny obdržíme:

$$\begin{vmatrix} A(\xi\eta\zeta), & 1 \\ a(\xi\eta\zeta), & \nu \end{vmatrix} = 0,$$

při čemž

$$\nu = \frac{1}{\varkappa} = \frac{a'}{A'}.$$

Pro veškeré body mimo vrchol jest ν zcela určité, neboť $a' \lesssim 0$, $A' \lesssim 0$; pro vrchol však $a' = 0$, $A' = 0$, $\nu = \frac{0}{0}$ tedy neurčité.

Z toho plyne důležitá věta:

Rovina tečná, obsahující vrcholovou přímku plochy mimosměrek, dotýká se této plochy ve všech bodech přímky vrcholové; ve vrcholu má však plocha mimosměrek celý svazek rovin tečných, jehož osou jest přímka vrcholová.

Z toho jest patrný zákon dualnosti, platící o tečných rovinách a dotyčných bodech ploch mimosměrek, což má svou příčinu v jednoznačné souvislosti těchto prvků, odvozené v odstavci 2. tohoto pojednání.

Jest také proto každá plocha mimosměrek téhož řádu a téže třídy.

Ku stanovení oněch hodnot parametru t, jimž přísluší vrcholové přímky, máme pak rovnici:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 & A'_4 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 \end{vmatrix} = 0,$$

která plyne z (15) a (16) vyloučením veličin x, y, z. Na základě takto stanovených hodnot parametru t vypočítáme z (15) a (16) souřadnice vrcholů.

4. *Mají-li dvě plochy mimosměrek ve třech bodech jisté přímky společné roviny tečné, dotýkají se vespolek podle celé této přímky.*

Buďtež

$$\left.\begin{array}{l} A = 0 \\ a = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{A.}$$
$$\left.\begin{array}{l} B = 0 \\ b = 0 \end{array}\right\} \text{ rovnice plochy } \quad \text{B.}$$

Pro určitou přímku T_m plochy A a přímku T_n plochy B platí, ježto $T_m \equiv T_n$

$$\left.\begin{aligned} B &= \mu A \\ b &= \mu a \end{aligned}\right\}$$ pro veškeré body této společné přímky.

Pro tři body této přímky platí však také

$$\left.\begin{aligned} B' &= \nu A' \\ b' &= \nu a' \end{aligned}\right\}$$

t. j.

$$(B'_1 - \nu A'_1)\, x_k + (B'_2 - \nu A'_2)\, y_k + (B'_3 - \nu A'_3)\, z_k + B'_4 - \nu A'_4 = 0$$

pro $k = 1, 2, 3$.

Z toho plyne srovnalosť:

$$\frac{B'_1 - \nu A'_1}{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{B'_2 - \nu A'_2}{\begin{vmatrix} z_1 & 1 & x_1 \\ z_2 & 1 & x_2 \\ z_3 & 1 & x_3 \end{vmatrix}} = \frac{B'_3 - \nu A'_3}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} = \frac{B'_4 - \nu A'_4}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}.$$

Ježto ale body (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) leží na jediné přímce, musí determinanty ve jmenovatelích rovnati se nule, tak že platí pro *veškeré body* společné přímky

$$B'_1 - \nu A'_1 = 0, \quad B'_2 - \nu A'_2 = 0, \quad B'_3 - \nu A'_3 = 0, \quad B'_4 - \nu A'_4 = 0$$

a podobně

$$b'_1 - \nu a'_1 = 0, \quad b'_2 - \nu a'_2 = 0, \quad b'_3 - \nu a'_3 = 0, \quad b'_4 - \nu a'_4 = 0,$$

t. j. platí identity

$$B' - \nu A' = 0, \qquad b' - \nu a' = 0$$

pro veškeré body přímky společné, t. j. obě plochy mají ve všech bodech zmíněné přímky společné roviny tečné.

(Pokračování.)