

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Václav Láska

O sestrojování vzorců empirických. [II.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 2, 142--152

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122406>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1911

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Z podobných trojúhelníků OVV'_1 , $V'_2UU'_1$ plyne, klademe-li $OV'_1 = y_1$, $OV'_2 = y_2$, $OV'_3 = y_3$, rovnice

$$(1 + y_2)y_1 = -|OV \cdot OO_1|$$

aneb

$$y_1y_2 + y_1 + 1 = 0.$$

Obdobně dospějeme k rovnicím

$$y_2y_3 + y_2 + 1 = 0,$$

$$y_3y_1 + y_3 + 1 = 0,$$

kde každá z těchto tří rovnic jest následkem ostatních dvou.

Správnost těchto rovnic plyne ostatně ihned, když veličiny y_1 , y_2 , y_3 vyjádříme sedmými odmocninami z jednotky.

Klademe-li

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7},$$

pak jest při označení námi zvoleném

$$y_1 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3}, \quad y_2 = \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}, \quad y_3 = \varepsilon^1 + \varepsilon^{-1},$$

takže na př.

$$\begin{aligned} (\varepsilon^3 + \varepsilon^{-3})(\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}) + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} \\ = \varepsilon^5 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^1 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} \\ = \varepsilon^5 + \varepsilon^6 + \varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 \\ = -1, \end{aligned}$$

ježto se v posledním součtu všechny mocnosti ε od 1 do 6 vyskytnou, z čehož naše 3 rovnice plynou, z nichž naopak prve vyslovená vlastnost pravidelného sedmiúhelníku vyplývá.

O sestrování vzorců empirických.

Píše V. Láska.

II.

Budtež dány dvě přímky, jichž poloha vzhledem k osám X a Y závisí od argumentů u , v . . . rovnicemi

$$A_0x + A_1y + A_2 = 0$$

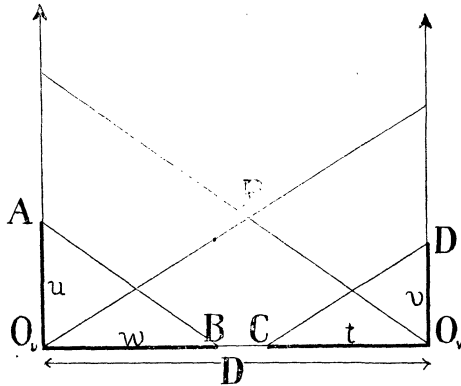
$$B_0x + B_1y + B_2 = 0$$

a předpokládejme, že geometrickým místem průsečíků obou přímek jest opět přímka

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + 1 = 0,$$

pak platí rovnice

$$f(uv\dots) \equiv \begin{vmatrix} \beta & \alpha & \alpha\beta \\ A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$



Obr. 1.

Hledáme-li tudíž pro danou funkci $f(uv\dots)$ vhodnou konstrukci, třeba ji rozložit v determinant uvedeného tvaru a naopak, je-li geometrickým místem průsečíků určité konstrukce přímka, pak závislost argumentů $u, v\dots$ dána jest funkcí:

$$f(uv\dots) = 0.$$

Pomocí této věty snadno rozšíříme naši základní konstrukci. Rýsujeme (viz obr. 1.)

$$\begin{aligned} O_u A &= u, & O_u B &= w \\ O_v D &= v, & O_v C &= t \end{aligned}$$

a dále

$$O_u P \parallel CD, \quad O_v P \parallel AB.$$

Je-li geometrickým místem bodů P přímka, určená úsečkami α na ose U a β na ose V , platí vztah :

$$\begin{vmatrix} D & \alpha - \beta & \alpha \\ t & -v & 0 \\ w & u & u \end{vmatrix} = \alpha vw + \beta ut - Duv = 0 \quad (2)$$

Položíme-li zde

$$w = t = D,$$

bude

$$\frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v} = 1,$$

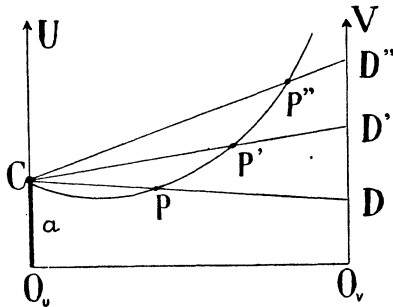
což jest ale naše základní rovnice.

Substitucí n. př.

$$w = v^u, \quad t = D$$

obdržíme dále

$$u = \frac{\alpha}{D} \frac{v^{u+1}}{v-\beta}. \quad (3)$$



Obr. 2.

Poněvadž jednotlivé osy mohou míti různé směry, lze udaným postupem obdržeti různé více méně komplikované vzory, jichž nejjednodušší tvar podán jest rovnicí (2). Jiné obsažnější rozšíření obdržíme v následující způsob.

Promítneme-li jednotlivé body nomografické křivky K z jejího průseku C s osou U a vyhovují-li úsečky (viz obr. 2.)

$$O_v D, O_v D', O_v D'' \dots$$

lineární rovnici

$$OD = \gamma u + \delta,$$

platí vzhledem k tomu, že body *CPD* leží vždy na jedné přímce, vztah :

$$f(uv) \equiv \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ u & uv & u+v \\ 1 & \gamma v + \delta & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

kde položeno

$$O_u C = a,$$

tak že můžeme psát

$$f(uv) \equiv v - u \frac{\gamma u + \delta}{u-a} = 0 \quad (4)$$

Rovnici tu obdržíme také, kladouce v základním vzorci

$$v - \frac{bu}{u-a} = 0.$$

jednoduše

$$b = \gamma u + \delta$$

Tím vedení jsme k důležitému principu *variace stálých*.

Abychom princip ten náležitě objasnili, volíme nej-jednodušší příklad.

Budiž dána rovnice přímky

$$\pi \equiv \frac{y}{a} + \frac{x}{b} + 1 = 0.$$

v které veličina *a*, vyhovuje nové rovnici

$$\Pi' \equiv \frac{a}{m} + \frac{x}{n} + 1 = 0.$$

Z obou obdržíme eliminací veličiny *a*

$$K \equiv y - m \left(1 - \frac{r}{b}\right) \left(1 - \frac{x}{n}\right) = 0.$$

Podobným postupem dospějeme k parabolické rovnici libo-volného stupně. Abychom obdrželi případnou konstrukci, před-pokládejme, že dána jest řada bodů, vyhovující rovnici

$$K \equiv y - \sum_0^n A_k x^k = 0, \quad A_n = 1.$$

Aplikujme nyní princip variace stálých na druhou konstrukci tohoto pojednání tak, že vyhledáme monografické body veličin (viz obr. 2.)

U a $O_v D$

a předpokládejme dále, že jich geometrickým místem jest opět přímka, vyhovující rovnici

$$\frac{p}{u} + \frac{q}{O_v D} = 1.$$

Poněvadž dle konstrukce

$$\frac{a}{u} + \frac{O_v D}{v} = 1,$$

bude i

$$v - q \frac{u}{u-p} \cdot \frac{u}{u-a} = 0. \quad (6)$$

Jak postupovati dále, jest na bíle dni. Tím získali jsme novou a velmi důležitou konstrukci.

Příkladem budiž nám opět ubývání teploty s výškou ve volné atmosféře od 0 až do 9 *km*.

Grafickou konstrukcí obdržíme

$$t_h - t_0 = - \frac{110H^2}{32 + 25H - H^2}$$

kde opět H značí výšku v *km* a t_h teplotu ve výšce H .

Rozdíly mezi pozorovanou (P) a vypočtenou (V) hodnotou podává následující tabulka

H	P	V	$P - V$
1	— 1.8	— 1.8	+ 0.0
2	— 5.4	— 5.6	+ 0.2
3	— 9.9	— 10.1	+ 0.2
4	— 15.0	— 15.2	+ 0.2
5	— 20.9	— 20.8	— 0.1
6	— 27.5	— 27.0	— 0.5
7	— 34.6	— 34.1	— 0.5
8	— 42.1	— 42.0	— 0.1
9	— 50.1	— 50.6	+ 0.5

Podotknouti dlužno, že pozorované hodnoty nejsou ještě absolutně pevný. Nad výškou 9 km mění se, jak z meteorologie známo, tepelné poměry úplně.

III.

Než půjdeme dále, bude záhodno probrati některá matematická upotřebení.

K vůli úplnosti budtež uvedeny vzorce především transformační

Položme $O_u O_v = D$ a budiž osa

$$U = X, \quad O_u O_v = Y,$$

dále bod O_u začátkem pravoúhelných souřadnic, pak platí rovnice

$$y = \frac{uv}{u+v}, \quad x = \frac{Du}{u+v}$$

a naopak

$$v = D \frac{y}{x} \quad u = \frac{Dy}{D-x}.$$

Dále jest:

$$dy = \frac{v^2 du + u^2 dv}{(u+v)^2} \quad dx = D \frac{v du - u dv}{(u+v)^2}.$$

1). Řešení rovnic. *)

Sestrojíme nomografickou křivku (viz obr. 4.)

$$v = u^n$$

kladouce postupně

$$u = 0, 1, 2, 3, \dots$$

a stupňujeme příslušné body stejnými čísly. Prochází-li libovolným bodem u přímka

$$\frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v} = 1,$$

platí i vztah

$$u^n = \alpha u^{n-1} + \beta.$$

Tím dáno jest grafické řešení rovnic. Čtenář sestrojž si křivku $n = 2$ a tím i nomogram řešící rovnice kvadratické.

*) Srovnej: *D'Ocagne: »Traité de Nomographie«.*

2). Zde dlužno zmítni se o konstrukci nomografických bodů při omezené nákresně.

Položme

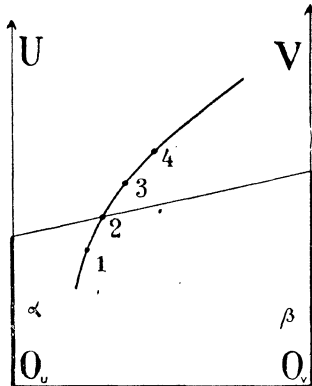
$$p = x, \quad q = D - x,$$

pak platí všeobecně

$$p : q = u : v$$

a zároveň

$$y = \frac{uv}{u + v}.$$



Obr. 4.

Obě rovnice identifikují rovnici

$$u \cdot q\lambda + v \cdot p\mu = (p + q) y$$

v pádu, kdy

$$\gamma + \mu = 1.$$

Vyhovují-li tedy veličiny λ a μ této rovnici, pak přímka vedená body $u\lambda$ a $v\mu$ prochází nomografickým bodem uv .

3). Zajímavé jest grafické řešení rovnic

$$p \equiv \alpha x + \beta y - 1 = 0,$$

$$p' \equiv \alpha' x + \beta' y - 1 = 0.$$

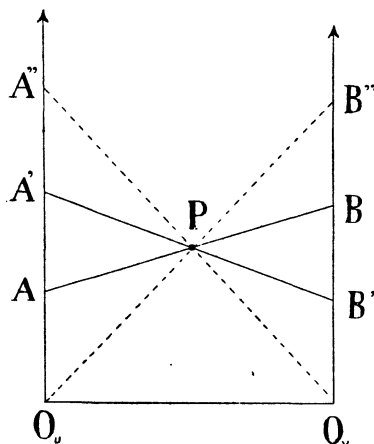
Rýsujeme (viz obr. 5.)

$$\begin{aligned} O_u A &= \alpha, & O_v B &= \beta \\ O_u A' &= \alpha', & O_v B' &= \beta'. \end{aligned}$$

Přímky AB a $A'B'$ protnou se v bodě P , jehož nomografické souřadnice jsou

$$O_u A'' = \frac{1}{x}, \quad O_v B'' = \frac{1}{y}.$$

4). *Vztahy souřadnic nomografických k souřadnicím Plückerova.*



Obr. 5.

Transformujeme-li n. př. rovnici

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2,$$

kladouce $D = 2a$, nomograficky substitucí

$$x = \frac{2au}{u+v}, \quad y = \frac{uv}{u+v},$$

obdržíme nomografickou rovnici kruhu

$$uv = 4a^2. *)$$

*) Vyhledáme-li průsečíky kruhu s přímkou

$$\frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v} - 1 = 0$$

obdržíme zajímavou konstrukci kořenů rovnice druhého stupně.

Podobně mění se

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

v jednoduchou rovnici

$$uv = \pm 4b^2.$$

Tím dána jest nejen konstrukce kuželoseček, ale i jich tečen. O posledním snadno se přesvědčíme, srovnáme-li uvedené rovnice s rovnicemi Plückera

$$(u)(v) = a^2, \quad (u)(v) = \pm b^2,$$

z kterých obdržíme

$$(u) = \frac{u}{2}, \quad (v) = \frac{v}{2}.$$

Buďtež totiž α a β úsečkami tečny ku křivce nomografické, pak platí rovnice

$$\alpha = + \frac{u^2 dv}{u dv - v du} = \frac{dv}{d\left(\frac{v}{u}\right)}$$

$$\beta = - \frac{v^2 du}{u dv - v du} = \frac{du}{d\left(\frac{u}{v}\right)}$$

a tedy pro nomografickou křivku

$$uv = \pm 4b^2$$

i

$$\alpha = \frac{u}{2}, \quad \beta = \frac{v}{2}$$

α a β jsou ale, jak známo, souřadnice Plückera, čímž svrchu uvedená relace jest dokázána.

Čtenáři budiž doporučena nomografická konstrukce úloh z „*Deskriptivní geometrie promítání paralelního*“ prof. Sobotky, str. 286, oddíl 205.

Připomínáme pouze, že není zapotřebí soustavu nomografickou voliti tak, aby $o_u o_v \perp o_u u_v$ a $o_u o_v \perp o_v$, stačí, je-li jen $u \parallel v$. Soustavu prvou volíme při praktickém upotřebení proto, poněvadž rýsování jest nejpohodlnější a nejpřesnější, protíná-li $o_u o_v$ pravoúhelně osy u a v .

5.) Zbývá ještě promluvit o souvislosti vzorů zde podaných s analytickou geometrií *).

Je-li Π libovolná přímka soustavy pravoúhelných souřadnic a

$$\Pi \equiv \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0$$

rovnici té přímky. Vyhledáme-li nomografický bod veličin α a β , pak rovnice $\Pi = 0$ čtena nomograficky praví nám, že přímka procházející tímto bodem protne obě osy U a V ve dvou bodech, vzdálených od bodů O_u a O_v o veličiny x a y , vyhovující rovnici

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0.$$

Nomografický bod jest tedy aequivalentem přímky.

Snadno přesvědčíme se nyní o platnosti následující věty:

Obalují-li přímky v analytické soustavě souřadnic křivku, leží i jich nomografické body na určité křivce.

Tím dospěli jsme k nadmíru důležité větě pro praktickou matematiku již proto, poněvadž při badáních fyzikálních často nalazáme diagramy mřížkové.

Abychom uvedli jen jeden všeobecně přístupný příklad, jmenujeme diagram v *Akustice prof. Strouhala* na str. 276. Čtenář necht' vyšetří přesný vzorek.

O určité kongruenci paprskové [4. 4].

Podává prof. V. Jarolímek.

1. Předpokládejme tři projektivně svazky paprskové $s_1(A_1B_1C_1\dots) \bar{\wedge} s_2(A_2B_2C_2\dots) \bar{\wedge} s_3(A_3B_3C_3\dots)$ ležící ve třech různoběžných rovinách $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Veškeré paprsky, jež protínají homologické paprsky svazků, na př. $(A_1A_2A_3)$, $(B_1B_2B_3)\dots$, vyplňují kongruenci [4, 4] t. j. čtvrtého řádu a čtvrté třídy, tudíž čtvrtého stupně **C**. Důkaz:

*) Čtenář necht' si laskavě přečte oddíl 84. známého díla: *Fiedler-Salmon*: »Analytische Geometrie der Kegelschnitte« (V. vyd.).