Karel Rychlík

Geometrické znázornění řetězců

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 2, 225--236

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122401

Geometrické znázornění řetězců.

Napsal Dr. **Karel Rychlík.**

Mříž bodová a přímková.

V rovině znázorněme všechny body, které mají v pravoúhlé soustavě souřadnic úsečku i pořadnici vyjádřenou čísly celými. I obdržíme tak zvanou mříž bodovou. Znázorněme všechny přímky o rovnicích $x = a$ a $y = b$, kdež a a b jsou čísla celá. Tak dostaneme mříž přímkovou. Mříží přímkovou rozdělí se rovina na samé čtverce, a vrcholy jejich tvoří mříž bodovou.

Dvojici čísel celých (p, q) odpovídá určitý bod M. Spojíme-li bod M s počátkem O, obdržíme vektor.*)

Budeme říkati, že bod M jakož i vektor m znázorňují dvojici čísel (p, q). Leží-li na úsečce OM $d + 1$ bodů mřížových, mají čísla p, q největší společnou míru d, o čemž se můžeme přesvědčiti, vedeme-li oněmi body mřížovými přímky mřížové. Tu rozdělí se úsečka p i pořadnice q na d stejných dílů. Naopak, není-li na úsečce OM vyjma počátku O a bodu M bodů mřížových, jsou čísla p, q nesoudělná. Vektor, na němž vyjma bodu počátečního a koncového není bodů mřížových, nazveme vektorem elementárním. Lze tedy dvojici čísel nesoudělných znázorniti vektorem elementárním.

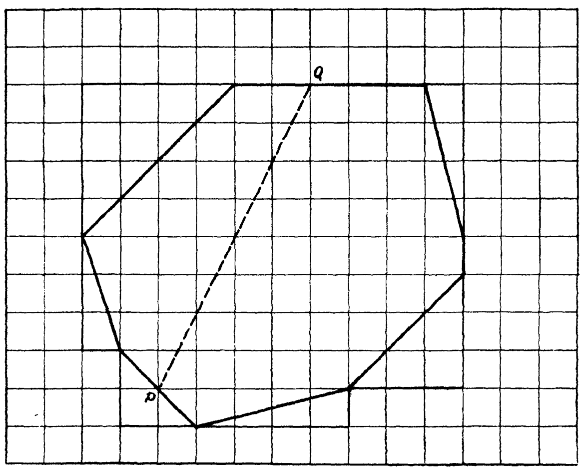
Zlomek $\frac{q}{p}$, kdež p, q jsou čísla celá, lze uvažovati jako dvojici čísel celých a znázorniti pak příslušným bodem M, jakož

---

*) Vektorem nazývá se úsečka, uvažovaná co do velikosti i směru. Označíme-li m vektor OM a n vektor ON jest součet vektorů m + n vektor OP, kdež bod P jest vrchol trojúhelníku OMP, v němž strana MP jest rovnoběžná, stejného směru a co do velikosti rovna úsečce ON.

i vektorem m. Zlomku zkrácenému odpovídá pak vektor elementární. Všechny zlomky rovné danému zlomku $\frac{q}{p}$ budou znázorněny mřížovými body, ležícími na přímce $y = \frac{q}{p}\,x$, procházející počátkem.

Přímky jdoucí počátkem, jichž rovnici lze psáti ve tvaru $y = \omega\,x$, rozpadají se ve dva druhy. Je-li ω číslo irracionální, neprochází přímka ta, vyjma počátkem, žádným jiným



Obr. 1.

bodem mřížovým. Je-li ω číslo racionální, prochází přímka $y = \omega\,x$ nekonečně mnoha body mřížovými, totiž body (mp, mq), kdež m jest libovolné číslo celé a $\frac{q}{p}$ zkrácený zlomek vyjadřující ω. Body mřížové jsou pak rozloženy na přímce $y = \omega\,x$ ekvidistantně (ve stejných vzdálenostech).

Uvažujme mnohoúhelník, jehož vrcholy jsou body mřížové. Rozložme jej příčkou (v obr. PQ), spojující libovolné dva body na obvodě ve dva mnohoúhelníky částečné. Budiž v počet bodů mřížových, ležících uvnitř mnohoúhelníku původního, o počet bodů mřížových, ležících na jeho obvodě a v_1, o_1 ; v_2, o_2 příslušná čísla pro oba částečné mnohoúhelníky. Konečně budiž d počet bodů mřížových, ležících na příčce, body koncové v to nepočítaje. Pak jest patrně

$$v = v_1 + v_2 + d$$
$$o = o_1 + o_2 - 2 - 2d$$

a tedy

$$2v + o - 2 = (2v_1 + o_1 - 2) + (2v_2 + o_2 - 2)$$

Nazveme výraz $2v + o - 2$ bodovým číslem mnohoúhelníku. Pak platí věta:

Bodové číslo mnohoúhelníku skládajícího se ze dvou mnohoúhelníků rovná se součtu bodových čísel obou mnohoúhelníků částečných. Platnost věty této lze snadno rozšířiti na případ, kdy mnohoúhelník se skládá z většího počtu mnohoúhelníků částečných. Pro čtverec o vrcholech (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1) jest

$$v = 0, \; o = 4,$$

tedy číslo bodové rovno 2. Pro tento čtverec jest plocha rovna polovině čísla bodového. Na základě věty svrchu vyřčené lze pak plochu každého mnohoúhelníku omezeného přímkami mřížovými vyjádřiti jako polovici čísla bodového. Speciálně bude tak možno vyjádřiti plochu libovolného obdélníku omezeného přímkami mřížovými. Rozložíme-li takový obdélník úhlopříčkou ve dva trojúhelníky, budou tyto shodny a i pro ně bude věta platiti. V trojúhelnících takových jsou dvě strany přímkami mřížovými. Libovolný mnohoúhelník, jehož vrcholy jsou body mřížové, můžeme doplniti na mnohoúhelník omezený přímkami mřížovými tím, že nad stranami které nejsou přímkami mřížovými, sestrojíme trojúhelníky, jichž druhé dvě strany jsou přímky mřížové. (Viz obr.) Pro tyto doplňující trojúhelníky jakož i pro onen mnohoúhelník omezený mřížovými přímkami jest plocha dána polovicí čísla bodového. Jest tedy obecně plocha určena polovicí čísla bodového.

Plocha trojúhelníku, jehož vrcholy jsou body mřížové, rovná se tehdy a jen tehdy $\frac{1}{2}$, neleží-li uvnitř žádný bod mřížový a na obvodě není mimo vrcholy bodů mřížových. Trojúhelník OMN, jehož plocha jest $\frac{1}{2}$, nazveme trojúhelníkem elementárním. I jest patrno, že vektory OM, ON musí býti elementární. Jsou-li souřadnice bodu M (p, q) a bodu N (r, s), bude, užijeme-li známého vzorce pro plochu trojúhelníku

$$ps - qr = \pm 1.$$

Ve vzorci tom bude platiti znamení kladné, je-li možno přejíti od směru OM ke směru ON kladným otáčením.

Fareyovy hvězdice a řady.

Vyznačme v mříži čtverec o stranách

$$(n, n)\ (-n, n),\ (-n, -n),\ (n, -n),$$

(„n-tý čtverec") a spojme všechny body uvnitř a na obvodě jeho ležící s počátkem.

Z vektorů, které takto obdržíme, podržme pouze vektory elementární. Na osách souřadnic pak vytkněme vektory příslušné k bodům $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. Všechny tyto vektory tvoří hvězdovitý obrazec, který nazveme n-tou Farey-ova hvězdicí. Popsaným způsobem definována hvězdice Farey-ovou pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ Zavedeme si však také nulltou hvězdici Farey-ovu. Ta bude tvořena právě oněmi čtyřmi vektory, ležícími na osách.

Jest patrno, že Farey-ova hvězdice jest souměrná vzhledem k osám souřadnic a rovněž vzhledem k osám souměrnosti souřadnic.

Ze vzniku Farey-ovy hvězdice plyne, že dva sousední vektory $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ tvoří trojúhelník elementární. Mají-li tedy jich koncové body M, N souřadnice (p, q), (r, s), bude

$$ps - qr = \pm 1$$

Od n-té hvězdice Farey-ovy přijdeme k $(n + 1)$-ní, přibereme-li ty body mřížové, ležící na obvodě $(n + 1)$-ího čtverce, které poskytují elementární vektory. Dva takové vektory (koncové jich body označme M' (p', q'), N' (r', s')) nemohou býti sousední ve Farey-ově hvězdici, poněvadž určují s počátkem trojúhelník, jehož dvojnásobná plocha jest násobkem $n + 1$. Bude totiž úsečka neb pořadnice koncového bodu každého nově vloženého vektoru absolutní hodnotou rovna $n + 1$, sic by se jinak vyskytoval vektor již v n-té hvězdici, kdyby jak úsečka tak pořadnice koncového bodu byly absolutní hodnotou menší než $n+1$. Z toho plyne okamžitě, že dvojnásobná plocha trojúhelníku $OM'N'$, která dána jest výrazem $p's' - q'r'$, bude dělitelna $n+1$ a trojúhelník ten nebude elementární.

Vektor $\mathfrak{m}'$ o koncovém bodě M' $(p'\ q')$ z $(n+1)$-ní hvězdice Farey-ovy leží mezi dvěma sousedními vektory $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ z n-té hvězdice Farey-ovy, jichž koncové body označme M (p, q), N (r, s). Z toho plyne, že trojúhelníky OMN, OMM', $OM'N$ jsou elementární a mají stejnou plochu. I bude

$$MM' \,||\, ON, \quad NM' \,||\, OM,$$

tak že vektor $\mathfrak{m}'$ jest součtem vektorů $\mathfrak{m}$ a $\mathfrak{n}$

$$\mathfrak{m}' = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}.$$

$(n+1)$-ní hvězdici Farey-ovu obdržíme tudíž z n-té, vložíme-li mezi dva sousední vektory jich součet a z těchto vložených vektorů podržíme ty, jež nevybíhají z $(n+1)$-ího čtverce.

Dále platí věta:

Je-li trojúhelník daný vektory $\mathfrak{m}$ a $\mathfrak{n}$ elementární, jsou vektory $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ v první hvězdici Farey-ově, v níž se vyskytují sousední.

Poněvadž trojúhelník tvořený vektory $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ jest elementární, jsou vektory $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ jistě elementární. Budiž n-tá hvězdice Fareyova první hvězdice obsahující vektory $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$. Hvězdice ta dána jest tím, že obvod n-tého čtverce prochází koncovým bodem jednoho vektoru na př. koncovým bodem M vektoru $\mathfrak{m}$, kdežto koncový bod N druhého vektoru $\mathfrak{n}$ leží uvnitř. Kdyby mezi $\mathfrak{m}$ a $\mathfrak{n}$ ležel vektor $\mathfrak{n}'$ o koncovém bodě N' sousední k $\mathfrak{m}$ z n-té hvězdice Fareyovy, plynulo by z toho, že jak trojúhelník OMN tak OMN' jest elementární, a mají tedy stejnou plochu, že $NN' \,||\, OM$. Poněvadž mřížové body jsou na rovnoběžných přímkách rozloženy kongruentně a poněvadž vektor $\mathfrak{m}$ jest elementární, musila by býti úsečka NN' násobkem úsečky OM. Uvážíme-li však, že bod N' leží v tomtéž kvadrantě jako M a že již koncový bod vektoru $\mathfrak{n}' + \mathfrak{m}$ vybíhá z n-tého čtverce, není možno tomuto požadavku jinak vyhověti, než když bod N' splyne s bodem N.

Uvažujme z n-té hvězdice Fareyovy pouze vektory ležící v prvém kvadrantě. Seřadíme zlomky, jež jsou vektory těmi znázorněny v pořádku, v jakém se vyskytují, otáčí-li se paprsek kolem počátku od kladné části osy x ke kladné části osy y. Zlomky ty budou tvořiti n-tou řadu Fareyovu, t. j. řadu, která vznikne, urovnáme-li dle velikosti všechny kladné zkrácené zlomky, jichž čitatel a jmenovatel nepřevyšuje číslo n.

Z předcházejících úvah geometrických plynou pak věty:

Jsou-li $\frac{q}{p}$ a $\frac{s}{r}$ po sobě jdoucí členy řady Fareyovy, jest

$$ps - qr = 1.$$

$n + 1$ní řadu Fareyovu obdržíme z n-té, vložíme-li mezi po sobě jdoucí zlomky $\frac{q}{p}$ a $\frac{s}{r}$ z řady n-té zlomek $\frac{q+s}{p+r}$ a ze vložených zlomků podržíme pouze ty, jichž čitatel a jmenovatel nepřevyšuje $n + 1$.

Je-li mezi zlomky $\frac{q}{p}$ a $\frac{s}{r}$ vztah $ps - qr = \pm 1$, jsou zlomky ty v první řadě Fareyově, v níž se vyskytují, sousední.

Vektory approximační. Řetězové zlomky.

Budiž dáno libovolné číslo kladné ω. Veďme přímku $y = \omega x$. Padá-li přímka ta mezi dva sousední vektory $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ z n-té hvězdice Fareyovy, nazveme vektory $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ vektory approximačními. Při tom učiněn předpoklad, že přímka $y = \omega x$ neprochází žádným mřížovým bodem ležícím uvnitř a na obvodě n-tého čtverce. Předpoklad ten bude jistě splněn, bude-li číslo ω irracionálné; případ ten nejprve uvažujme.

Ukážeme, jak možno utvořiti vektory approximační, aniž bychom byli nuceni sestrojiti celou hvězdici. Buďtež $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ approximační vektory z n-té hvězdice Fareyovy. Víme, že v nejbližší Fareyově hvězdici, která po n-té následuje, a v níž již nejsou $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ vektory sousedními, přijde mezi $\mathfrak{m}$ a $\mathfrak{n}$ vektor $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$. Z toho plyne, že dvojice vektorů approximačních následující po dvojici $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ bude se skládati z vektorů $\mathfrak{m}$ a $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, leží-li přímka $y = \omega x$ mezi vektorem $\mathfrak{m}$ a $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, a z vektorů $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ a $\mathfrak{n}$, leží-li přímka $y = \omega x$ mezi vektorem $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ a $\mathfrak{n}$.

I jest patrno, jak utvoříme po sobě dvojice approximačních vektorů, začínajíce nulltou hvězdicí, která nám poskytne dvojici vektorů spojujících počátek s body (1,0) a (0,1).

Budiž posloupnost dvojic approximačních vektorů

$$(\mathfrak{m}^{(0)}, \mathfrak{n}^{(0)}), \quad (\mathfrak{m}^{(1)}, \mathfrak{n}^{(1)}), \dots \quad (\mathfrak{m}^{(n)}, \mathfrak{n}^{(n)}), \dots \tag{1}$$

Každá dvojice má s předcházející jeden vektor společný. Z toho plyne, že obdržíme všechny vektory approximační, napíšeme-li z každé dvojice pouze vektor nově se vyskytující. Při tom připojíme ke každému vektoru index — neb + dle toho, leží-li pod neb nad přímkou $y = \omega x$. Místo řady dvojic obdržíme tak řadu vektorů

$$\mathfrak{l}^{(0)}_{\varepsilon_0}, \quad \mathfrak{l}^{(1)}_{\varepsilon_1}, \quad \mathfrak{l}^{(2)}_{\varepsilon_2}, \dots \mathfrak{l}^{(n)}_{\varepsilon_n}, \dots \tag{2}$$

kdež

$$\varepsilon_0, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n, \dots \tag{3}$$

značí jeden z indexů + neb —.

Řada znamení (3) nazývá se charakteristikou čísla ω. Ze vzniku řady (2) jest patrno, že každý approximační vektor s nejblíže předcházejícím o opačném indexu tvoří dvojici, tak že možno snadno přejíti od řady (2) k (1). Je-li řada (2) až k jistému členu na př. $\mathfrak{l}^{(n)}_{\varepsilon_n}$ známa, jest snadné udati následující. Najdeme totiž nejblíže předcházející člen o opačném indexu $\mathfrak{l}^{(m)}_{\varepsilon_m}$ a vektor následující bude $\mathfrak{l}^{(n)}_{\varepsilon_n} + \mathfrak{l}^{(m)}_{\varepsilon_m}$. Z toho plyne, že řada (2) určena jest charakteristikou (3). Aby bylo možno charakteristiku přehledně udati, pišme $\varepsilon = +$, $\eta = -$ a označme, kolikrát se příslušné znamení vyskytuje, pomocí mocnitele n ε a η. Bude tedy charakteristika míti tvar

$$\varepsilon\eta^{k}\varepsilon^{k_1}\eta^{k_2}\dots \tag{4}$$

Pišme řadu approximačních vektorů ve tvaru

$$\begin{aligned}&\mathfrak{l}^{(0)}_{\varepsilon}; \quad \mathfrak{l}^{(1)}_{\eta}, \quad \mathfrak{l}^{(2)}_{\eta}, \dots \mathfrak{l}^{(k)}_{\eta}; \quad \mathfrak{l}^{(k+1)}_{\varepsilon} \dots \mathfrak{l}^{(k+k_1)}_{\varepsilon}; \\ &\mathfrak{l}^{(k+k_1+1)}_{\eta}, \dots \quad \mathfrak{l}^{(k+k_1+k_2)}_{\eta}; \dots\end{aligned} \tag{5}$$

Vyznačme jich koncové body. Koncové body vektorů s indexem ε, ležící nad přímkou $y = \omega x$, spojme lomenou čarou.

Rovněž tak spojme lomenou čarou koncové body vektorů s indexem —, které leží pod přímkou $y = \omega x$. Tyto dvě lomené čáry nazveme čarami approximačními. Jest patrno, že mezi nimi není bodů mřížových.

Vektory

$$\mathfrak{l}_\varepsilon^{(0)} = \mathfrak{L}_0, \quad \mathfrak{l}_\varepsilon^{(k)} = \mathfrak{L}_1, \quad \mathfrak{l}_\varepsilon^{(k+k_1)} = \mathfrak{L}_2, \ldots,$$

při nichž se index mění, nazveme hlavními vektory approximačními, ostatní z vektorů approximačních vedlejšími.

Ze zákona, dle kterého řada (5) jest tvořena, plynou rovnice

$$\mathfrak{l}_\varepsilon^{(0)} = \mathfrak{L}_0$$

$$\mathfrak{l}_\eta^{(k)} = \mathfrak{L}_1, \quad \mathfrak{l}_\varepsilon^{(k+1)} = \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_0, \quad \mathfrak{l}_\varepsilon^{(k+2)} = 2\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_0, \ldots$$

$$\mathfrak{l}_\varepsilon^{(k+k_1)} = \mathfrak{L}_2 = k_1\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_0, \quad \mathfrak{l}_\eta^{(k+k_1+1)} = \mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_1,$$

$$\mathfrak{l}_\eta^{(k+k_1+2)} = 2\mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_1, \ldots$$

$$\mathfrak{l}_\eta^{(k+k_1+k_2)} = \mathfrak{L}_3 = k_2\mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_1, \quad \mathfrak{l}_\eta^{(k+k_1+k_2+1)} = \mathfrak{L}_3 + \mathfrak{L}_2,$$

$$\mathfrak{l}_\varepsilon^{(k+k_1+k_2+2)} = 2\mathfrak{L}_3 + \mathfrak{L}_2 \ldots$$

Vektor $\mathfrak{l}_\varepsilon^{(0)}$ má koncový bod (0, 1), $\mathfrak{l}_\eta^{(1)}$ má koncový bod (1, 0), $\mathfrak{l}_\eta^{(2)}$ koncový bod (1, 1), ... $\mathfrak{l}_\eta^{(k)}$ koncový bod $(1, k_0)$, kdež kladeno $k_0 = k - 1$.

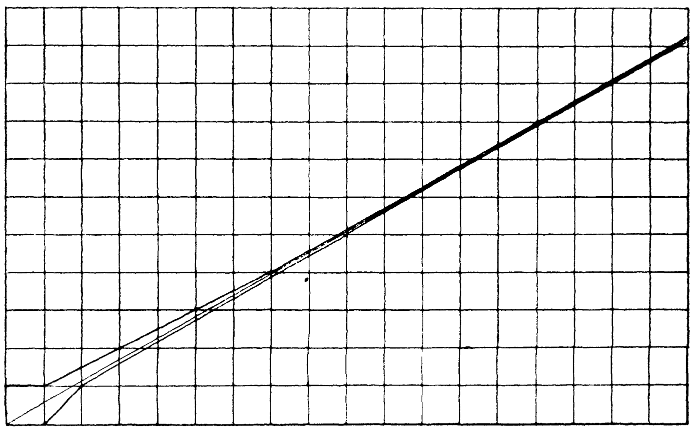
Uvážíme-li, že jest na př.

$$\mathfrak{l}_\eta^{(k+k_1+1)} = \mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_1, \quad \mathfrak{l}_\eta^{(k+k_1+2)} = 2\mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_1, \quad \ldots \mathfrak{l}_\eta^{(k+k_1+k_2)}$$
$$= \mathfrak{L}_3 = k_2\mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_1,$$

shledáme, že koncové body těchto všech vektorů, zároveň s koncovým bodem vektoru $\mathfrak{L}_1$, leží na téže úsečce, rovnoběžné s vektorem $\mathfrak{L}_2$, tvořící část čáry approximační. Koncové body této úsečky jsou koncové body hlavních vektorů approximačních $\mathfrak{L}_1$ a $\mathfrak{L}_3$. Další body mřížové na úsečce té se vyskytující jsou koncové body vedlejších vektorů approximačních. Kdybychom utvořili vektor $(k_2 + 1)\ \mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_1$, padl by již nad přímku $y = \omega x$. Tím dán význam čísla k_2.

Vznik čar approximačních můžeme si názorně popsati takto. Mysleme si v bodech mřížových zaraženy kolíčky a po přímce

$y = \omega x$ vedenou nit. Odkloňme tuto nit nahoru i dolů tak, aby objímala body mřížové. Pevně natažena pak přijme tvar horní, resp. dolní čáry approximační. Vrcholy této čáry approximační jsou koncové body hlavních vektorů approximačních, a to vrcholy dolní čáry konce vektorů s lichými indexy $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_3, \ldots$ vrcholy horní čáry konce vektorů se sudými indexy $\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_4, \ldots$ Ostatní body mřížové na úsečkách tvořících čáru approximační se vyskytující jsou koncové body vedlejších vektorů approximač-



Obr. 2.

ních. Obecně jest

$$\mathfrak{L}_r = k_{r-1}\,\mathfrak{L}_{r-1} + \mathfrak{L}_{r-2}$$

tak, že úsečka spojující koncové body vektorů $\mathfrak{L}_r$ a $\mathfrak{L}_{r-2}$ jest rovnoběžná s vektorem $\mathfrak{L}_{r-1}$. Koncové body vedlejších vektorů approximačních na úsečce té se vyskytujících obdržíme ze vzorce $\varkappa\,\mathfrak{L}_{r-1} + \mathfrak{L}_{r-2}$, klademe-li $\varkappa = 1, 2, \ldots k_{r-1} - 1$. Číslo k_{r-1} má ten význam, že vektor $k_{r-1}\,\mathfrak{L}_{r-1} + \mathfrak{L}_{r-2}$ padá ještě na tutéž stranu přímky $y = \omega x$ jako $\mathfrak{L}_{r-2}$, kdežto vektor

$(k_{r-1} + 1)\,\mathfrak{L}_{r-1} + \mathfrak{L}_{r-2}$ padá již na druhou stranu.

Buďtež zlomky znázorněné hlavními vektory approximačními

$$\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3, \ldots$$

resp.

$$\frac{Q_0}{P_0} = \frac{1}{0}, \quad \frac{Q_1}{P_1} = \frac{k_0}{1}, \quad \frac{Q_2}{P_2}, \quad \frac{Q_3}{P_3}, \ldots$$

Pak bude

$$a)\qquad \begin{aligned} P_n &= k_{n-1}\, P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_n &= k_{n-1}\, Q_{n-1} \pm Q_{n-2}. \end{aligned}$$

Klaďme

$$\omega = \frac{Q_n\,\omega_n + Q_{n-1}}{P_n\,\omega_n + P_{n-1}}.$$

Pro $n = 1$ bude

$$\omega = k_0 + \frac{1}{\omega_1}.$$

Obecně jest

$$\omega = \frac{Q_n\,\omega_n + Q_{n-1}}{P_n\,\omega_n + P_{n-1}} = \frac{Q_{n-1}\,\omega_{n-1} + Q_{n-2}}{P_{n-1}\,\omega_{n-1} + P_{n-2}}$$

a dosadíme-li za P_n, Q_n ze vzorců a)

$$\frac{Q_{n-1}\left(k_{n-1} + \frac{1}{\omega_n}\right) + Q_{n-2}}{P_{n-1}\left(k_{n-1} + \frac{1}{\omega_n}\right) + P_{n-2}} = \frac{Q_{n-1}\,\omega_{n-1} + Q_{n-2}}{P_{n-1}\,\omega_{n-1} + P_{n-2}}$$

a tedy

$$\omega_{n-1} = k_{n-1} + \frac{1}{\omega_n},$$

$$\omega = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \ddots}}$$

Mají tedy k_0, k_1, k_2, ... význam částečných podílů a $\frac{Q_n}{P_n}$ přibližných hodnot, rozvineme-li ω v řetězec.

Na obrazci 2. znázorněno číslo

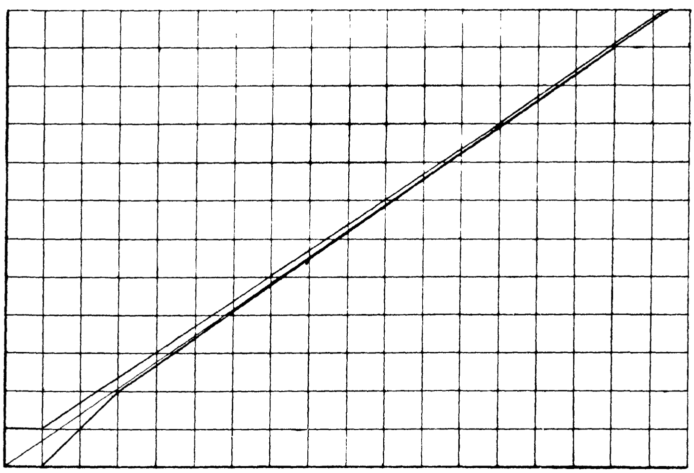
$$\omega = 0{\cdot}5667\ldots,$$

jež má přibližné hodnoty

$$\frac{1}{0},\ \frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \left(\frac{2}{3}\right),\ \left(\frac{3}{5}\right),\ \left(\frac{4}{7}\right),\ \frac{5}{9},\ \left(\frac{9}{16}\right),\ldots$$

(Vedlejší zlomky přibližné jsou v závorkách.)

Předpokládejme nyní, že číslo ω jest racionální. Vyjádřeme ω zkráceným zlomkem a znázorněme si tento zlomek bodem a vektorem. Pak můžeme tento vektor počítati buď k horním neb dolním hlavním vektorům approximačním. Pokládáme-li vektor $\mathfrak{L}_n$ za dolní (horní) vektor approximační, dokončíme čáru approximační tak, že část přímky od tohoto koncového bodu do nekonečna pokládáme za poslední z úseček dolní (horní) čáry approximační. Horní (dolní) čára approximační bude pak ukončena přímkou jdoucí od koncového bodu vektoru $\mathfrak{L}_{n-1}$ do nekonečna rovnoběžně s přímkou $y = \omega x$. Arithmeticky plyne dvojí



Obr. 3.

možnost ukončení čar approximačních, je-li číslo ω racionální z toho, že, je-li $k_n > 1$, lze psáti

$$\omega = k_0 + \frac{1}{k_1 +} \frac{1}{k_2 +} \cdots + \frac{1}{k_n},$$

neb

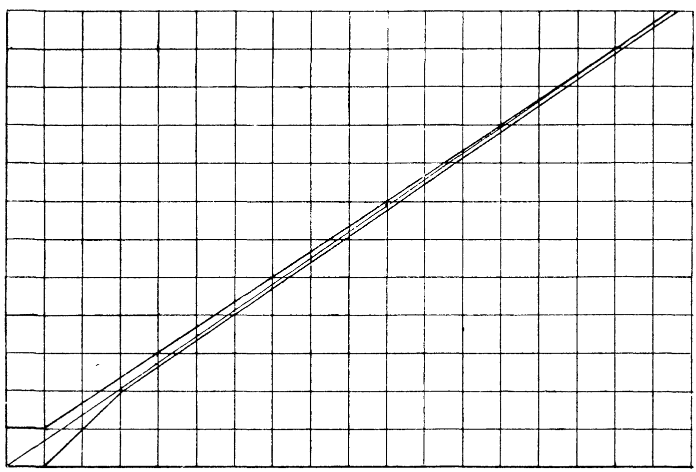
$$\omega = k_0 + \frac{1}{k_1 +} \frac{1}{k_2 +} \cdots + \frac{1}{(k_n - 1) +} \frac{1}{1},$$

a je-li $k_n = 1$,

$$\omega = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cdots + \cfrac{1}{k_{n-1} + \cfrac{1}{1}}}},$$

neb

$$\omega = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cdots + \cfrac{1}{(k_{n-1} + 1)}}}.$$



Obr. 4.

Na obrazci 3. a 4. znázorněno racionální číslo $\frac{11}{16}$.

V obrazci 3. jsou přibližné hodnoty

$$\frac{1}{0},\ \frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \left(\frac{1}{2}\right),\ \frac{2}{3},\ \left(\frac{3}{4}\right),\ \left(\frac{5}{7}\right),\ \left(\frac{7}{10}\right),\ \frac{9}{13},\ \frac{11}{16}.$$

V obrazci 4. jsou přibližné hodnoty

$$\frac{1}{0},\ \frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \left(\frac{1}{2}\right),\ \frac{2}{3};\ \left(\frac{3}{4}\right),\ \left(\frac{5}{7}\right),\ \left(\frac{7}{10}\right),\ \left(\frac{9}{13}\right),\ \frac{11}{16}.$$