vlastnost, že se k nim akust. víry kolmo přimykaly, a když z nich byla utvořena kyvadélka, že byly do pole taženy.

Možno tedy tvrditi, že snad všecky tuhé hmoty jsou para-akustické.

I některé hmoty plynné jsem podrobil působení akust. pole osového; reson. trubice měla polohu vodorovnou.

Pokusy byly konány s plamenem svíčky, svítiplynu, s kouřem doutnající hubky, se vzduchem, s kyslíkem, dusíkem, vodíkem, s kysličníkem uhličitým a se směsí plynů, které vydechujeme.

Oba plameny a kouř z dotnající hubky byly z pole puzeny; pročež jsou dia-akustické.

Ostatními plyny jsem plnil bubliny z mydlin. K tomu bylo sestrojeno vodorovné kyvadlo ze skleněné trubičky dle návodu prof. Dvořáka.[8])

Bublina s vodíkem byla z pole vypuzována; vodík jest tedy diaakustický.

Bubliny se vzduchem, kyslíkem, dusíkem, kysličníkem uhličitým i se směsí plynů vydechovaných byly do pole taženy; pročež jsou súčastněné plyny paraakustické. (Pokračování.)

Rovnice Maxwellovy v prostoru Lobačevského.

Napsal Dr. **Arnošt Dittrich**, professor v Třeboni.

(Dokončení.)

Konstrukci žádanou provedeme tím, že vedeme kružnice jdoucí vyznačenými body na kolmici tak, aby se dotýkaly dané přímky v průsečících s kružnicí „a“. Dostaneme tím „levé“ a „pravé“ rovnoběžky k dané přímce. Z obrazce 9. vidíme, že t. zv. rovnoběžkový úhel p jest funkcí délky kolmice σ.

Souvislost mezi „σ“ a „p“ prozkoumáme zase na pseudosféře, na kouli s imaginárním poloměrem. Šedý trojúhelník na obrazci 9. nahradíme pravoúhlým trojúhelníkem na kouli s poloměrem r. Viz obrazec 10. Dle obyčejných vzorců sférické trigonometrie jest

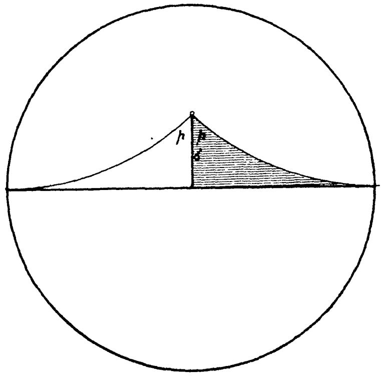
$$\cos q = \sin p \,.\, \cos \frac{\sigma}{r}.$$

---

8) Dr. V. Dvořák, Zeitschrift für d. phys. und chem. Unterricht. 1893, str. 186.

Na pseudosféře jest však

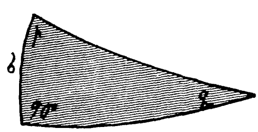
$$q = 0.$$



Obr. 9.

Položme za jeho kosinus jednotku, vyjádřeme druhý kosinus exponencielami a pišme „ki" místo r. Bude

$$1 = \sin p \,.\, \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{\sigma}{k}} + e^{-\frac{\sigma}{k}}\right).$$



Obr. 10.

Pro zkrácení počtu položíme opět

$$e^{\frac{\sigma}{k}} = z,$$

pamatujíce, že

$$z > 1,$$

poněvadž σ jest kladné.

Pak jest

$$2 = \sin p \left(z + \frac{1}{z}\right),$$

$$z^2 - \frac{2}{\sin p}\, z + 1 = 0.$$

Kořeny této rovnice jsou

$$tg\frac{p}{2},\quad cotg\frac{p}{2}.$$

Zkouška:

$$tg\frac{p}{2}+cotg\frac{p}{2}=\frac{2}{sin\, p}$$

$$\frac{sin\frac{p}{2}}{cos\frac{p}{2}}+\frac{cos\frac{p}{2}}{sin\frac{p}{2}}=\frac{1}{sin\frac{p}{2}\,cos\frac{p}{2}}$$

$$sin^2\frac{p}{2}+cos^2\frac{p}{2}=1.$$

Z těchto dvou kořenů si vyhledáme ten, jenž je vždy větší než jedna. Úhel p měří nejvýše 90^0, $\frac{p}{2}$ nejvýše 45^0. Proto $tg\frac{p}{2}$ jest zlomek, ale $cotg\frac{p}{2}$ není zlomek.

Naše hledané z, jež má býti větší než jedna, dáno tedy relací

$$z=cotg\frac{p}{2}.$$

Vrátíme-li se k exponentiele, plyne

$$e^{\frac{b}{k}}=cotg\frac{p}{2}$$

$$e^{-\frac{b}{k}}=tg\frac{p}{2}$$

Tohoto vztahu užil již r. 1835 Lobačevský sám, aby dokázal z astronomických dat, že „k“ je větší než million poloměrů dráhy zemské, je-li metrika naší astronomie a fysiky metrikou jeho, ne Euklidovou, jak se vždy mlčky předpokládá.

Důkaz tento má veliký význam; zabezpečuje naše vědy přírodní před obavou, že práce na ně vynaložená mohla by přijíti nazmar, protože metrika našich pravítek a kružítek snad není Euklidova. — Takové obavy není; i kdyby metrika našeho prostoru byla složitější, pak bychom přece užívali vzorců neeuklidické metriky jen výjimkou. Stalo by se tak na př. při zkoumání eventuální absorpce světla v prostoru mezihvězdném, při statistických studiích, jaká konal Kapteyn o rozložení stálic v prostoru, a při studiu mléčné dráhy, až toto bude jednou quantitativní.

A konečně. Kdyby astronom, zabývající se zmíněnými otázkami, neeuklidickou geometrii užívati nechtěl, také to nebude na závadu. Však se jeho výsledky přepočítají snadno do geometrie nové, bude-li to nutno. Neboť otázka, které geometrie máme užívati, jest především otázkou oekonomie. Jako bychom mohli voliti mezi soustavou Koperníkovou a Ptolemaeovou, tak můžeme i voliti mezi geometriemi. Koperníkovu soustavu volíme, poněvadž při této volbě fysika jest nejjednodušší. Mohlo by se státi, že v neeuklidické geometrii fysika jest jednodušší než v Euklidově. Pak bychom byli na vahách:

Máme si nechati jednoduchou geometrii (Euklidovu) a proto složitou fysiku neb složitou geometrii (neeuklidickou) a jednodušší fysiku.

Seznámivše se trochu s geometrií Lobačevského, obrátíme se k sestavení rovnic Maxwellových pro tuto geometrii. Všimněme si elementu délkového

$$d\sigma = \frac{a^2}{a^2 - r^2}\, ds, \tag{6}$$

kde r jest Euklidovým způsobem měřená vzdálenost (Euklidovým způsobem měřeného) elementu ds od středu koule „a“.

Vyjádřeme si element ds obvyklým způsobem křivočarými souřadnicemi ξ, η, ζ, v nichž

$$ds^2 = a_1^2 d\xi^2 + a_2^2 d\eta^2 + a_3^2 d\zeta^2.$$

Pak dána délka elementu $d\sigma$ v prostoru Lobačevského relací

$$d\sigma^2 = \left[\frac{a^2}{a^2 - r^2}\right]^2 \cdot (a_1^2 d\xi^2 + a_2^2 d\eta^2 + a_3^2 d\zeta^2).$$

Rovnice Maxwellovy obdržíme tedy kladouce místo a_1, a_2, a_3 v rovnicích (1) a (2) důsledně λa_1, λa_2, λa_3, kde zkratka

$$\lambda = \frac{a^2}{a^2 - r^2}.$$

Vypíšeme rovnice jednou, abychom je mohli učiniti základnou dalších úvah. Rovnice Maxwellovy v prostoru Lobačevského zní

$$\begin{aligned}
\frac{K\lambda^2}{V} a_2 a_3 \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} M a_2 \lambda - \frac{\partial}{\partial \eta} N a_3 \lambda \\
\frac{K\lambda^2}{V} a_3 a_1 \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \xi} N a_3 \lambda - \frac{\partial}{\partial \zeta} L a_1 \lambda \qquad (7) \\
\frac{K\lambda^2}{V} a_1 a_2 \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \eta} L a_1 \lambda - \frac{\partial}{\partial \xi} M a_2 \lambda,
\end{aligned}$$

kde

$$\lambda = \frac{a^2}{a^2 - r^2},$$

K jest dielektrická konstanta, V rychlost světla.

Dále jest

$$\begin{aligned}
-\frac{\lambda^2}{V} a_2 a_3 \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} Y a_2 \lambda - \frac{\partial}{\partial \eta} Z a_3 \lambda \\
-\frac{\lambda^2}{V} a_3 a_1 \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \xi} Z a_3 \lambda - \frac{\partial}{\partial \zeta} X a_1 \lambda \qquad (8) \\
-\frac{\lambda^2}{V} a_1 a_2 \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \eta} X a_1 \lambda - \frac{\partial}{\partial \xi} Y a_2 \lambda.
\end{aligned}$$

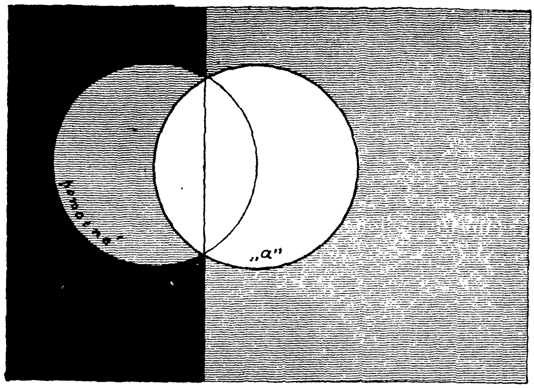
Existence vln s rovnoběžnými přímočarými paprsky v prostoru Lobačevského.

Velmi jednoduchou formu můžeme dáti základním rovnicím následujícím postupem:

Vedle koule „a“ zvolíme si ještě druhou stejně velkou „pomocnou“ kouli. Střed pomocné koule leží na obvodu koule „a“. Vnitřek koule „a“ invertujeme (zobrazíme principem reciprokých radiů) na kouli pomocné. Viz obrazec 11. Vnitřek koule „a“ zobrazí se pak na pravo od svislé roviny obsahující kružnici oběma koulím společnou. Budeme této oblasti říkati poloprostor.

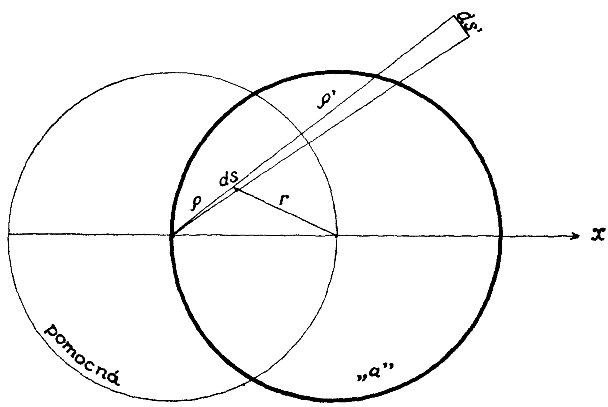
Zobrazení to jest isogonální. Proto můžeme prohlásiti za souřadnice ξ, η, ζ elementu ds v kouli „a“, nějaké orthogonální křivočaré souřadnice jeho obrázku ds' v poloprostoru. Viz obrazec 12. Za takové souřadnice hodí se:

I. Descartesovy souřadnice pravoúhlé s počátkem ve středu inverse; osa x prochází středy obou koulí.



Obr. 11.

II. Descartesovy pravoúhlé, jichž počátek leží v hraniční rovině poloprostoru; osa x prochází zase středy obou koulí.



Obr. 12.

Nejdříve užijeme kříže I. Nalezněme si na obrazci 12. (Euklidův) element ds, jehož vzdálenosti od středu koulí jsou „ϱ" a „r". Obrázek jeho ds' má od středu inverse vzdálenost

$$\varrho' = \frac{a^2}{\varrho}.$$

Z isogonálnosti inverse a obrazce 12. plyne

$$\frac{ds}{\varrho}=\frac{ds'}{\varrho'},$$

takže

$$ds=\frac{\varrho}{\varrho'}\,ds'.$$

Následkem toho jest dle vzorce (6) element Lobačevského

$$d\sigma=\frac{\varrho a^2}{\varrho'(a^2-r^2)}\,ds'.$$

Zlomek

$$\frac{\varrho a^2}{\varrho'(a^2-r^2)}=\frac{\varrho^2}{a^2-r^2}$$

vyjádříme souřadnicemi elementu ds' v kříži I. Vypočítáme jej v rovině xy.

Tam jest

$$\varrho^2=x^2+y^2$$
$$\varrho'^2=x'^2+y'^2$$
$$r^2=(x-a)^2+y^2.$$

Z existence inverse plyne

$$x'=\frac{a^2x}{\varrho^2}\qquad x=\frac{a^2x'}{\varrho'^2}$$

$$y'=\frac{a^2y}{\varrho^2}\qquad y=\frac{a^2y'}{\varrho'^2}.$$

Pak jest

$$\frac{\varrho^2}{a^2-r^2}=\frac{-\varrho^2}{x^2+y^2-2ax}=\frac{-1}{1-2a\dfrac{x}{\varrho^2}}=\frac{a}{2a^2\dfrac{x}{\varrho^2}-a}$$

$$=\frac{a}{2x'-a}=\frac{k}{x'-k};$$

zavedli jsme opět zkratku

$$2k=a.$$

Jest tedy element Lobačevského

$$d\sigma=\frac{k}{x'-k}\,ds'.$$

Relace ta zjednoduší se ještě více, položíme-li

$$x = x' - k.$$

Tím přejdeme ke kříži II., jenž je vůči prvému o k posunut směrem rostoucího x. Pak jest

$$d\sigma = \frac{k}{x} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

nebo

$$d\sigma^2 = \frac{k^2}{x^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Nyní můžeme napsati Maxwellovy rovnice pro Lobačevského prostor v souřadnicích Descartesových x, y, z. Třeba jen v rovnicích (7) a (8) položiti

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1; \; \lambda = \frac{k}{x}.$$

Zkrátíme-li všude k, zní rovnice po maličké změně na levé straně:

$$\begin{aligned} \frac{Kk}{V} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial t} \frac{X}{x} &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{M}{x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{N}{x} \\ \frac{Kk}{V} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial t} \frac{Y}{x} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{N}{x} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{L}{x} \\ \frac{Kk}{V} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial t} \frac{Z}{x} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{L}{x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{M}{x} \end{aligned} \tag{9}$$

a obdobně

$$\begin{aligned} -\frac{k}{V} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial t} \frac{L}{x} &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{Y}{x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{Z}{x} \\ -\frac{k}{V} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial t} \frac{M}{x} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{Z}{x} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{X}{x} \\ -\frac{k}{V} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial t} \frac{N}{x} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{X}{x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{Y}{x} \end{aligned} \; . \tag{10}$$

Položíme-li všude

$$X = z\mathfrak{X}, \qquad Y = x\mathfrak{Y}, \qquad Z = x\mathfrak{Z},$$
$$L = x\mathfrak{L}, \qquad M = x\mathfrak{M}, \qquad N = x\mathfrak{N},$$

zjednoduší se rovnice na

$$\begin{aligned}\frac{Kk}{V}\frac{1}{x}\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}&=\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial y}\\ \frac{Kk}{V}\frac{1}{x}\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}&=\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial z}\\ \frac{Kk}{V}\frac{1}{x}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}&=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}\end{aligned}\tag{11}$$

a obdobně

$$\begin{aligned}-\frac{k}{V}\frac{1}{x}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t}&=\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial x}\\ -\frac{k}{V}\frac{1}{x}\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t}&=\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial z}\;.\\ -\frac{k}{V}\frac{1}{x}\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial t}&=\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial x}\end{aligned}\tag{12}$$

Obraťme se nyní k vlnám s rovnoběžnými paprsky světelnými.

Rovnicím (11, 12) vyhovíme, když jen $\mathfrak{Z}$ a $\mathfrak{M}$ jsou různy od nully a závisí jen na „t“ a „x“; ostatní složky buďtež vesměs rovny nulle. Z rovnic zbude nám pak:

$$\begin{aligned}\frac{K.k}{V}\frac{1}{x}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}&=-\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}\\ -\frac{k}{V}\frac{1}{x}\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t}&=\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial x}.\end{aligned}\tag{13}$$

Rovnice ty stanoví vlnění, jež se šíří dle osy x.

Vraťme se nyní z poloprostoru x, y, z dovnitř koule „a“. Nekonečně vzdálený bod osy x jest obrazem středu koule pomocné. Rovnoběžky s osou x vznikly z kruhů, jež tím bodem jdou a stojí na kouli „a“ kolmo. Viz obr. 13. Paprsky světelné jsou tedy v prostoru Lobačevského přímkami, jež vycházejí z téhož nekonečně vzdáleného bodu. Jsou tedy rovnoběžné.

Chceme sledovati rovinnou vlnu z bodu 1. do 2 Nezapomeňme, že pozorovatel jest vždy poblíže 1. Koule hraniční je pro něho nekonečně vzdálená. Zavedeme nyní způsobem Lobačevského měřenou souřadnici σ, jejíž element délkový jest $d\sigma$. Viz obr. 13. Poněvadž s rostoucím „s“ ubývá „x“, bude

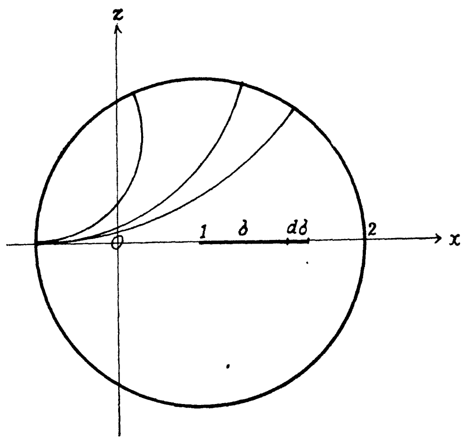
$$d\sigma=-\frac{k}{x}\,dx,\tag{14}$$

takže

$$-\frac{\sigma}{k}=\log x-\log C,$$

kde C je integrační konstantou. Obrácením závislosti plyne

$$x=Ce^{-\frac{\sigma}{k}}.$$



Obr. 13.

Poněvadž pak dle obrazce 13. pro

$$\sigma=0$$

$$x=k=\frac{a}{2},$$

jest
$$x=k\,.\,e^{-\frac{\sigma}{k}}. \tag{15}$$

Zavedeme nyní novou proměnnou σ místo x do rovnic (13). Obecně jest dle (14)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\frac{d\sigma}{dx}=\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\left(-\frac{k}{x}\right).$$

Následkem toho jest

$$\frac{K}{V}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}=\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \sigma}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}=\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \sigma}.$$

Rovnicím těm vyhovíme, kladouce

$$\mathfrak{Z} = f\left(t - \frac{\sqrt{K}}{V}\sigma\right)$$

$$\mathfrak{M} = -\sqrt{K} \,.\, f\left(t - \frac{\sqrt{K}}{V} b\right).$$

Věta 1. *V prostoru Lobačevského možno vlnění světelné s rovnoběžnými paprsky, jež se šíří rychlostí V, nezávislou na délce vlny.*

Ale $\mathfrak{Z}$ a $\mathfrak{M}$ nejsou ještě vektorem elektrickým a magnetickým. Tímto vektorem jest

$$Z = x\mathfrak{Z}, \qquad M = x\mathfrak{M}.$$

Dosadíme-li za x, jeho vyjádření délkou σ, měřenou způsobem Lobačevského, kde

$$x = ke^{-\frac{\sigma}{k}},$$

plyne

$$\left.\begin{aligned} Z &= e^{-\frac{\sigma}{k}} f\left(t - \frac{\sigma}{z}\right) \\ M &= -\, e^{-\frac{\sigma}{k}} f\left(t - \frac{\sigma}{z}\right) \end{aligned}\right\} . \tag{16}$$

Napsali jsme vzorce pro vakuum, kladouce $K = 1$. Také jsme činitele „k“ kontrahovali s funkcí f. Pozoruhodno jest, že světlo slábne dle zákona exponenciálního. Intensity, t. j. čtverce amplitudy, ubývá pak úměrně s

$$e^{-\frac{2\sigma}{k}}.$$

Věta 2. *Kdyby prostor měl vlastnosti prostoru Lobačevského, absorboval by světlo. Kdyby se prostor mohutně lišil od případu Euklidova (pro nějž $k = \infty$), zdál by se velmi zakaleným.*

Struve tvrdil, že z jasnosti hvězd prvé velikosti stráví se průměrem $\frac{1}{107}$ absorpcí v prostoru. Jiní astronomové připouštějí raději, že daleké hvězdy jsou menší než blízké u slunce.

I důležité číslo „k“ parametr prostoru lze z myšlenky té odhadnouti.