Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bohuslav Hostinský

Nová interpretace Cauchyovy věty

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 1, 28--30

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122390

$(KL) \equiv p$ leží na křivkách A, B; je to zároveň dotyčný bod tečné roviny π na ploše φ^2. Kužele $\varkappa$, μ mají mimo τ ještě společnou tečnou rovinu obsahující přímku $\overline{xz} \equiv Y$; její dotyčný bod q na ploše φ^2, zároveň průsečík křivek A, C, obdržíme obdobně jako prve bod p. Body p, q, u, jež náležejí kuželosečce A, proložme rovinu a sestrojme její pronik A s kuželem $\varkappa$. Obdobně stanovíme i křivky B a C, a z těchto tří kuželoseček známým již způsobem plochu φ^2 samu. Rovina ξ' dá posléze druhou plochu úloze hovící. Analogickým způsobem řešíme i případ speciální: sestrojiti paraboloid daný šesti rovinami tečnými a směrem osy.

Nová interpretace Cauchyovy věty.

Napsal **Bohuslav Hostinský**.

1. Budiž $f(x)$ jednoznačná a spojitá funkce reální proměnné x v intervallu $a \leqq x \leqq b$. Arithmetickým středem $A[f]$ hodnot $f(x)$ v tomto intervallu nazývá se číslo

$$A[f] = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n} \cdot \overline{b-a}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx. \quad (1)$$

Geometrickým středem $G[f]$ hodnot $f(x)$ (je-li $f(x) \neq 0$ pro každé x) v témže intervallu nazveme číslo

$$G[f] = \lim_{n=\infty} \prod_{k=1}^{n} \sqrt[n]{f\left(a + \frac{k}{n} \cdot \overline{b-a}\right)}.$$

Logarithmováním poslední rovnice obdržíme

$$\log G[f] = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log f\left(a + \frac{k}{n} \cdot \overline{b-a}\right) = A[\log f], \quad (2)$$

$$G[f] = e^{A[\log f]}.$$

2. Označme nyní symbolem $f(z)$ analytickou funkci komplexní proměnné z jednoznačnou uvnitř i na obvodě kružnice C středu $z = z_0$ a o poloměru r; předpokládáme, že $f(z)$ nemá v tomto oboru žádné singularity ani nullového bodu.

Jest známo, že $f(z_0)$ jest arithmetickým středem $A[f]$ hodnot $f(z)$ na obvodě kružnice C; zavedeme-li totiž v Cauchyově integrálu

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

místo z reální integrační proměnnou φ rovnicemi

$$z - z_0 = re^{i\varphi}, \quad dz = ire^{i\varphi}\, d\varphi,$$

vychází vzhledem k formuli (1)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})\, d\varphi = A[f]^{*)}.$$

Lze však dokázati, že $f(z_0)$ *jest nejen arithmetickým, nýbrž i geometrickým středem hodnot* $f(z)$ *na obvodě* C. Neboť geometrický střed $G[f]$ jest dle (2) určen rovnicí

$$\log G[f] = A[\log f] = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log f(z_0 + re^{k\frac{2\pi i}{n}})$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\log f(z)\, dz}{z - z_0} = \log f(z_0)$$

a tedy

$$G[f] = f(z_0) = A[f]. \tag{3}$$

Při výpočtu $\log G[f]$ jest třeba voliti určitou větev mnohoznačné funkce $\log f(z)$; každá větev jest uvnitř i na obvodě C jednoznačná. Kdybychom zvolili větev jinou, obdržíme pro $\log G[f]$ hodnotu, jež se bude lišiti od hodnoty dříve vypočtené o celistvý násobek $2\pi i$; geometrický střed $G[f]$ jest vždy určen jednoznačně.

3. Odůvodnění rovnice (3) zakládalo se hlavně na tom, že $\log f(z)$ jest analytickou funkcí komplexní proměnné

$$z = x + iy;$$

proto jest $\log f(z_0)$ arithmetickým středem hodnot $\log f(z)$ na obvodě C. Tato věta — a tedy ani rovnost středů arithmetického a geometrického — neplatí pro reální potenciály $u(x, y)$ a $v(x, y)$, z nichž jest daná funkce $f(z)$ složena dle rovnice

$$f(z) = u + iv.$$

---

*) Znaky $A[f]$ a $G[f]$ vztahují se v dalším vždy k hodnotám $f(z)$ na obvodě C.

Tak na př. harmonická funkce $u(x, y)$ nabývá ve středu kružnice hodnoty, která se rovná arithmetickému středu hodnot na obvodě kružnice; ale $\log u$ není harmonickou funkcí proměnných x a y, a jeho hodnota ve středu kružnice nerovná se arithmetickému středu hodnot na obvodě.

Poloha dvou sdružených polár v linearním komplexu.

Napsal Dr. **Jos. Klobouček.**

Sturm ve známém díle svém [1]) stanoví četné metrické vztahy, které váží polohu dvou sdružených polár k základním útvarům linearního komplexu. Některé z těchto vztahů dají se ještě určitěji vymeziti a i zjednodušiti; poněvadž pak i Zindler [2]) podobným způsobem o poloze dvou polár v lin. komplexu se zmiňuje, pokusil jsem se o to polohu tuto blíže vyšetřiti a výsledek v krátkosti uvádím.

Jmenujme h paprsek kolmo protínající dvě sdružené poláry l, l' a osu komplexu a a budiž dále u nekonečně vzdálená přímka roviny kolmé k a. Všecky přímky povrchové, soustavy l, l', pravoúhlého paraboloidu P obsahujícího přímky $aull'$ jsou sdruženými polárami v daném komplexu, jsou-li též korrespondujícími přímkami v involuci (au, ll'). Přímky druhé soustavy paraboloidu P jsou paprsky komplexu protínající kolmo osu a [3]), k nimž náleží i paprsek h.

Buďtež dále p, φ délka nejkratší příčky mezi osou a a kteroukoliv přímkou a úhel této přímky s osou a.

Vzhledem na základní vlastnost linearního komplexu, že translačním a rotačním pohybem kolem osy a dá se sám v sebe převáděti, omezme se jen na pozorování paprsků resp. polár, jež kolmo protínají paprsek h. Délku p lze potom měřiti na paprsku h od bodu $A \equiv (ha)$ kladně a záporně v mezích

---

[1]) R. Sturm: Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie etc. I. 1892.

[2]) K. Zindler: Liniengeometrie mit Anwendungen I. 1902.

[3]) Sturm: Die Gebilde 1. pg. 83.