Na základě homothetie (střed homothetie vrchol C) ovšem každá kružnice k' mající střed na symetrále a jdoucí vrcholem C má též vlastnost, že protíná ramena trojúhelníka v bodech K', L', které jsou zároveň průsečíky přímky p' kolmé k symetrále a jdoucí bodem G', jenž jest průsečíkem těžnice a přímky s výškou rovnoběžné procházející bodem D', koncovým to bodem průměru CD'. (Viz obr. 2.)

Samozřejmě totéž platí i pro jiné vrcholy.

Vzájemného vztahu přímky p a kružnice k lze použíti k sestrojení trojúhelníka, dána-li výška v, symetrála s a těžnice t (všechny z téhož vrcholu vycházející). Sestrojení patrno z obr. 1.

Rozmanitosti.

Podává **Václav Hübner**, školní rada na Král. Vinohradech.

Rovnice hyperboly vzhledem k asymptotám jako osám souřadnic jest — jak známo —

$$xy = \frac{e^2}{4}.$$

Tečna Tm v bodě $m(x_1, y_1)$ na hyperbole má rovnici

$$y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1).$$

Z rovnice hyperboly obdržíme:

$$xdy + ydx = 0$$

a tudíž

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{y_1}{x_1},$$

pročež

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{x_1}(x - x_1),$$

jinak

$$yx_1 + y_1x - 2x_1y_1 = 0.$$

Úseky tečny na asymptotách (os souřadnic) jsou: $2x_1$, $2y_1$. Plocha trojúhelníku omezeného tečnou a asymptotami jest

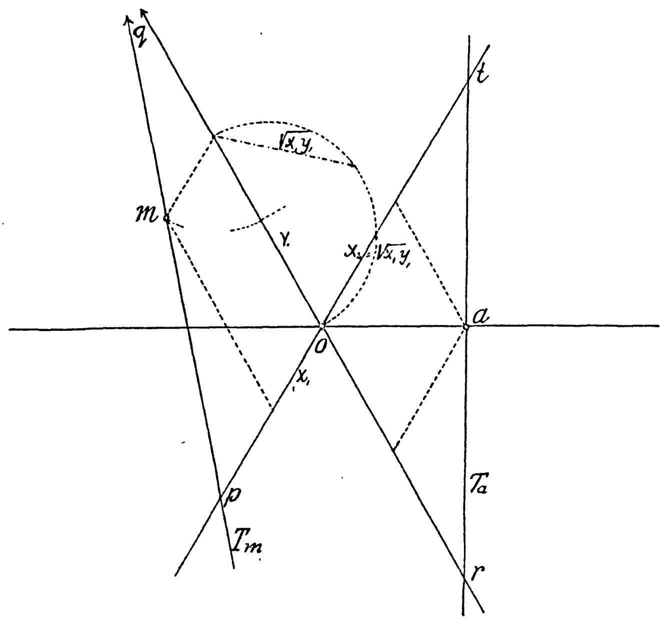
$$\triangle = \frac{2x_1 \cdot 2y_1}{2} \cdot \sin\omega,$$

kde ω jest úhel asymptot; protože

$$tg\,\frac{\omega}{2}=\frac{b}{a}$$

(a, b poloosy hyperboly), jest

$$sin\,\omega=2sin\,\frac{\omega}{2}\,cos\,\frac{\omega}{2}=\frac{2tg\,\frac{\omega}{2}}{1+tg^2\,\frac{\omega}{2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2}=\frac{2ab}{e^2}$$



Obr. 1.

a proto obsah trojúhelníku

$$\triangle=2x_1y_1\,.\,\frac{2ab}{e^2}=2\,.\,\frac{e^2}{4}\,.\,\frac{2ab}{e^2}=ab.$$

Je-li bod a (x_2, y_2) na ose reálné, t. j. vrchol hyperboly, pak jest $x_2=y_2$ a plocha trojúhelníku omezeného tečnou vrcholovou Ta a asymptotami

$$\triangle_1=2x_2^2\,sin\,\omega=ab,$$

tudíž $\triangle = \triangle_1$ a

$$2x_1 y_1 \sin\omega = 2x_2^2 \sin\omega,$$

neboli

$$x_2^2 = x_1 y_1$$

a

$$x_2 = \sqrt{x_1 y_1},$$

t. j. úsečka nebo pořadnice vrcholu jest střední měřicky úměrnou souřadnic libovolného bodu m hyperboly vzhledem k asymptotám. Na základě této věty lze sestrojiti vrchol hyperboly, jsou-li dány asymptoty a jeden bod hyperboly. Délka poloosy hlavní:

$$a = 2x_2 \cos\frac{\omega}{2}.$$

Je-li hyperbola rovnoosá, jest $\omega = 90^0$ a poloosa $a = x_2\sqrt{2}$.

Z obrazce jest též patrno, kterak lze proměniti lib. $\triangle\, opq$ v trojúhelník rovnoramenný ort, který má týž úhel vrcholový o, jest totiž rameno

$$\overline{or} = 2\sqrt{x_1 y_1},$$

kde

$$x_1 = \frac{\overline{op}}{2},\quad y_1 = \frac{\overline{oq}}{2}.$$

V $\triangle\, abc$ buďte těžnice $\overline{aa'} = t_a$, $\overline{bb'} = t_b$, $\overline{cc'} = t_c$. Bodem a' veďme $a'd \parallel bb'$ a učiňme $\overline{a'd} = \overline{da''} = \frac{1}{2}\overline{bb'}$ i jest $ba'a''b'$ rovnoběžník; z té příčiny jest $\overline{b'a''} = \overline{ba'} = \overline{a'c}$. Spojíme-li a' s c', jest $\overline{a'c'} \parallel \overline{ac}$ a zároveň $\overline{a'c'} = \frac{1}{2}\overline{ac}$; ježto $\triangle\, ab'a'' \cong c'a'c$ $(\overline{c'a'} = \overline{ab'}, \overline{a'c} = \overline{b'a''}, \sphericalangle c'a'c = \sphericalangle ab'a'')$, jest $\overline{aa''} = \overline{cc'}$. Jsou tudíž strany

$$\triangle\, aa'a'' : \overline{aa'} = t_a,\ \overline{a'a''} = \overline{bb'} = t_b,\ \overline{aa''} = cc' = t$$

a jeho plocha

$$\triangle' = \tfrac{1}{4}\sqrt{(t_a + t_b + t_c)(t_b + t_c - t_a).(t_a + t_c - t_b)(t_a + t_b - t_c)}.$$

Jest známo, že $\overline{oa'} = \frac{1}{2}\overline{oa}$ (o těžiště $\triangle\, abc$), tudíž také

$$\overline{b'd} = \frac{1}{2}\overline{ab'}\ (\overline{a'd} \parallel \overline{ob'}),\ \overline{ad} = \overline{ab'} + \frac{1}{2}\overline{ab'} = \frac{3}{2}\overline{ab'}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{\overline{ac}}{2} = \frac{3}{4}\overline{ac}.$$

Ježto $\triangle aa'd$, $\triangle aa'c$ mají společný vrchol a', základny $\overline{ad}$ a $\overline{ac}$ jsou v jedné přímce, jest

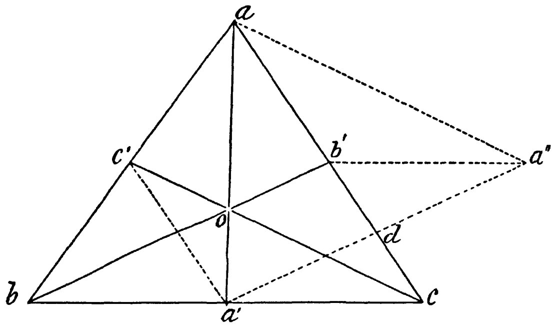
$$\triangle aa'd = \tfrac{3}{4} \triangle aa'c;$$

poněvadž $\quad \triangle aa'd = \tfrac{1}{2} \triangle aa'a'' = \tfrac{1}{2} \triangle'$

a $\quad \triangle aa'c' = \tfrac{1}{2} \triangle abc = \tfrac{1}{2} \triangle,$

jest $\quad \tfrac{1}{2} \triangle' = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{2} \triangle,$

neboli $\quad \triangle = \tfrac{4}{3} \triangle'$



Obr. 2.

a tudíž plocha $\triangle abc$ vyjádřena jeho těžnicemi:

$$\triangle = \tfrac{1}{3} \sqrt{(t_a + t_b + t_c)(t_b + t_c - t_a)(t_a + t_c - t_b)(t_a + t_b - t_c)}.$$

Opakujeme-li dřívější konstrukci při $\triangle aa'a''$ a tak dále in inf., obdržíme řadu trojúhelníků:

$$\triangle aa'c + \triangle ada'' + \ldots \text{ in inf.},$$

jichž součet jest

$$\frac{\triangle}{2} + \frac{3}{4}\frac{\triangle}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{\triangle}{2} + \ldots \text{ in inf.}$$

neboli

$$\frac{\triangle}{2}\left(1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots \text{ in inf.}\right) = \frac{\triangle}{2} \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 2\triangle.$$

Z $\triangle aba'$, $\triangle aa'c$ plyne:

$$c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + t_a^2 - a t_a \cos a'$$

$$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + t_a^2 + a \,.\, t_a \cos a',$$

pročež

$$b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} = 2t_a^2$$

a obdobně

$$a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2} = 2t_b^2,$$

$$a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2} = 2t_c^2.$$

Sečtouce tyto tři rovnice dostaneme

$$a^2 + b^2 + c^2 = \tfrac{4}{3}(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)$$

a spojíce tuto rovnici s předešlými, vyvodíme

$$a = \tfrac{2}{3}\sqrt{2t_b^2 + 2t_c^2 - t_a^2},$$

$$b = \tfrac{2}{3}\sqrt{2t_a^2 + 2t_c^2 - t_b^2},$$

$$c = \tfrac{2}{3}\sqrt{2t_a^2 + 2t_b^2 - t_c^2}.$$

Je-li ϱ poloměr kružnice vepsané trojúhelníku abc a ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c poloměry kružnic trojúhelníku vně vepsaných, jest, jak známo,

$$\varrho = \frac{\Delta}{s}, \quad \varrho_a = \frac{\Delta}{s-a}, \quad \varrho_b = \frac{\Delta}{s-b}, \quad \varrho_c = \frac{\Delta}{s-c}$$

a $$\varrho \,.\, \varrho_a \,.\, \varrho_b \,.\, \varrho_c = \frac{\Delta^4}{s\,.\,(s-a)(s-b)(s-c)} = \Delta^2$$

$$= s\,abc \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2},$$

ježto

$$\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} =$$

$$= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \,.\, \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{a\,.\,c}} \,.\, \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$= \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}.$$

Dále jest

$$a = \varrho_a \left(\cot g \frac{\beta'}{2} + \cot g \frac{\gamma'}{2}\right)$$

[α', β', γ' jsou vnější úhly trojúhelníku], neboli

$$a = \varrho_a\left(tg\frac{\beta}{2} + tg\frac{\gamma}{2}\right),$$

z čehož

$$\varrho_a = \frac{a\cos\frac{\beta}{2}\,.\,\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

a obdobně

$$\varrho_b = \frac{b\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}, \quad \varrho_c = \frac{c\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}},$$

tudíž

$$\varrho_a\varrho_b\varrho_c = abc\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

a

$$\varrho = s\,tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}\,tg\frac{\gamma}{2}.$$

Z rovnice

$$\varrho_a = \frac{\Delta}{s-a} = \frac{s(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s\,.\,(s-a)}}}{s-a}$$

plyne, že je též

$$\varrho_a = s\,tg\frac{\alpha}{2}$$

a tudíž

$$\varrho_b = s\,tg\frac{\beta}{2}, \quad \varrho_c = s\,tg\frac{\gamma}{2};$$

pročež

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho =$$

$$= s\left(tg\frac{\alpha}{2} + tg\frac{\beta}{2} + tg\frac{\gamma}{2} - tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}\,tg\frac{\gamma}{2}\right).$$

Ježto

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^0,$$

jest

$$tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}=\frac{sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\beta}{2}}=\frac{cos\frac{\gamma}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\beta}{2}},$$

$$tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\gamma}{2}=\frac{cos^2\frac{\gamma}{2}+cos\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\beta}{2}\,sin\frac{\gamma}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\beta}{2}\,cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$=\frac{1+\left(cos\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\beta}{2}-sin\frac{\gamma}{2}\right)sin\frac{\gamma}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\beta}{2}\,cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$=\frac{1+\left[cos\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\beta}{2}-cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]sin\frac{\gamma}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\beta}{2}\,cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$=\frac{1+sin\frac{\alpha}{2}\,sin\frac{\beta}{2}\,sin\frac{\gamma}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\beta}{2}\,cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$=tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}\,tg\frac{\gamma}{2}+sec\frac{\alpha}{2}\,sec\frac{\beta}{2}\,sec\frac{\gamma}{2}.$$

Jest tedy

$$\varrho_a+\varrho_b+\varrho_c-\varrho=s\,sec\frac{\alpha}{2}\,sec\frac{\beta}{2}\,sec\frac{\gamma}{2}$$

a ježto

$$a=2r\,sin\,\alpha,\quad b=2r\,sin\,\beta,\quad c=2r\,sin\,\gamma$$

(r poloměr opsané kružnice), jest též

$$a+b+c=2r\,(sin\,\alpha+sin\,\beta+sin\,\gamma)=8\,r\,cos\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\beta}{2}\,cos\frac{\gamma}{2}$$

a

$$r=\tfrac{1}{4}\,s\,sec\frac{\alpha}{2}\,sec\frac{\beta}{2}\,sec\frac{\gamma}{2},$$

tudíž

$$\varrho_a+\varrho_b+\varrho_c-\varrho=4r,\quad r=\frac{\varrho_a+\varrho_b+\varrho_c-\varrho}{4}.$$

Též jest

$$\varrho_a\varrho_b\varrho_c = s^3 tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}\,tg\frac{\gamma}{2},$$

$$\triangle = \varrho s = s^2 tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}\,tg\frac{\gamma}{2}$$

neboli
$$tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}\,tg\frac{\gamma}{2} = \frac{\triangle}{s^2}$$

a
$$\varrho_a\varrho_b\varrho_c = s\,.\,\triangle.$$

Dále jest

$$\varrho_a - \varrho = \frac{\triangle}{s-a} - \frac{\triangle}{s} = \frac{a\triangle}{s(s-a)} = a\,tg\frac{\alpha}{2},$$

následovně

$$\varrho_b - \varrho = b\,tg\frac{\beta}{2},\ \varrho_c - \varrho = c\,tg\frac{\gamma}{2}$$

a
$$(\varrho_a - \varrho)\,(\varrho_b - \varrho)\,(\varrho_c - \varrho) = abc\,tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}\,tg\frac{\gamma}{2},$$

t. j. dle předešlého

$$(\varrho_a - \varrho)\ \varrho_b - \varrho)\ (\varrho_c - \varrho) = \frac{abc\triangle}{s^2}$$

anebo

$$(\varrho_b - \varrho)\,(\varrho_b - \varrho)\,(\varrho_c - \varrho) = \frac{4r\triangle^2}{s^2} = 4r\varrho^2$$

neboli

$$\left(\frac{\varrho_a}{\varrho} - 1\right)\left(\frac{\varrho_b}{\varrho} - \varrho\right)\left(\frac{\varrho_c}{\varrho} - 1\right) = \frac{4r}{\varrho} = \frac{\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c}{\varrho} - 1.$$

Upravíme-li tuto rovnici, obdržíme:

$$\varrho_a\varrho_b\varrho_c = \varrho\,(\varrho_a\varrho_b + \varrho_a\varrho_c + \varrho_b\varrho_c),$$

nebo též
$$\frac{1}{\varrho} = \left(\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c}\right),$$

z čehož
$$\varrho = \frac{\varrho_a\varrho_b\varrho_c}{\varrho_a\varrho_b + \varrho_a\varrho_c + \varrho_b\varrho_c}.$$

Jsou-li středy kružnic trojúhelníku $\triangle$ vně vepsaných o_1, o_2, o_3, jest plocha $\triangle_1$ trojúhelníku $o_1o_2o_3$:

$$\triangle_1 = \triangle\,\tfrac{1}{2}\,(a\varrho_a + b\varrho_b + c\varrho_c)$$

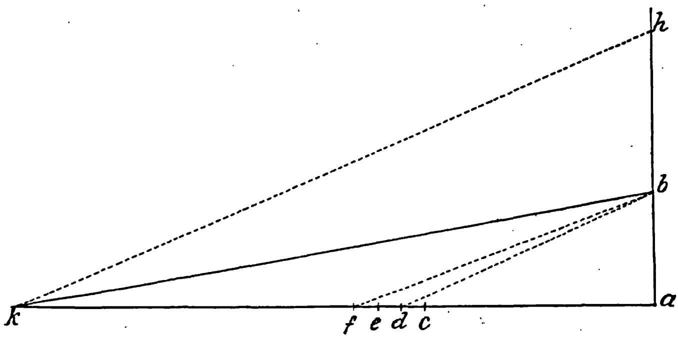
$$= \triangle\left[1 + \frac{a}{2(s-a)} + \frac{b}{2(s-b)} + \frac{c}{2(s-c)}\right]$$

a po náležité úpravě jest

$$\triangle_1 = 2rs = r\,(a + b + c).$$

Přibližně správnou rektifikaci kružnice udává Specht v Crellově journale. Narýsujme pravý úhel, na jedno rameno nanesme $\overline{ab} = r$ a na druhé rameno $\overline{ac} = 2r$; učiňme

$$\overline{cd} = \overline{de} = \overline{ef} = \frac{r}{5},$$



Obr. 3.

veďme spojnice bd, bf, sestrojme $\overline{ah} = \overline{bd}$ a $hk \parallel bf$; pak jest $\overline{bk}$ zpřímený obvod, $\triangle abk$ plocha kruhu daného poloměru r.

Z obrazce jest patrno, že

$$\overline{ad} = 2r + \frac{r}{5}, \quad \overline{af} = 2r + \frac{3}{5}r,$$

tudíž

$$\overline{bd}^2 = r^2 + \left(\frac{11r}{5}\right)^2 = r^2\left(1 + \frac{121}{25}\right), \quad bd = \frac{r}{5}\sqrt{146}.$$

Dále jest $\overline{ab} : \overline{ah} = \overline{af} : \overline{ak}$ a ježto $\overline{ah} = \overline{bd}$, jest

$$\overline{ak} = \frac{\overline{bd}\,.\,\overline{af}}{\overline{ab}} = \frac{\frac{r}{5}\sqrt{146}\,.\,\frac{13}{5}r}{r} = \frac{13\sqrt{146}}{25}r = 2\,.\,3{\cdot}141591\ldots r$$

a

$$\triangle abk = \frac{\overline{ak}\,.\,\overline{ab}}{2} = 3{\cdot}141591\ldots r^2;$$

z toho vidno, že výsledek jest přesný až k šestému místu desetinnému.

Možno poznamenati, že výraz

$$\frac{7}{10^7}+\frac{13\sqrt{146}}{25}=\left\{\begin{array}{r}0\cdot0000007\\+\,3\cdot1415919531\end{array}\right\}=3\cdot1415926531$$

liší se teprve na desátém desetinném místě od čísla π.

Je-li $$V\equiv f(x,\,y,\,a)=0$$

rovnice libovolné křivky, a veličina, kterou sice vzhledem x a y za konstantní považovati možno, ale které přece různé hodnoty přimysliti můžeme, pak přirůstá-li a o $\triangle a$, obdržíme řadu soumezných křivek, jichž průsečíky určují nám nějakou křivku, která jest obalující čarou všech těchto soumezných křivek. Jest tedy rovnice soumezné křivky

$$f(x,y,a+\triangle a)=V+\frac{\triangle V}{\triangle a}\triangle a$$

a při mezní hodnotě jest

$$f(x,\,y,\,a+da)=0\equiv V+\frac{dV}{da}\,da.$$

Abychom určili průsečíky obou soumezných poloh, řešíme rovnice $V=0$ a

$$V+\frac{dV}{da}da=0,$$

neboli $V=0,\ \dfrac{dV}{da}da=0,$ t. j. $V=0,\ \dfrac{dV}{da}=0.$

Příklady: 1. Přímka pohybuje se tak, že součet vzniklých úseků a, b na osách x a y jest veličina stálá k. Rovnice obalující čáry?

Rovnice dané přímky zní

$$V\equiv\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0.$$

Dle podmínky jest

$$a+b=k,\qquad b=k-a,$$

tudíž

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{k-a}-1=0,$$

nebo

$$V \equiv (k - a)\, x + ay - a\,(k - a) = 0;$$

pročež

$$\frac{dV}{da} = -x + y - k + 2a = 0 \quad \text{a} \quad a = \frac{x - y + k}{2}.$$

Vložíme-li tuto hodnotu do rovnice $V = 0$, obdržíme rovnici obalující křivky:

$$\left(k - \frac{x - y + k}{2}\right) x + \frac{x - y + k}{2}\, y$$

$$- \frac{x - y + k}{2}\left(k - \frac{x - y + k}{2}\right) = 0$$

a po úpravě:

$$(x - y)^2 - 2k\,(x + y) + k^2 = 0.$$

Klademe-li:

$$x - y = \eta, \qquad 2\,(x + y) - k = \xi,$$

nabudeme rovnice tvaru

$$\eta^2 = k\,\xi,$$

z čehož vidno, že hledaná křivka jest parabola.

2. Daná úsečka $\overline{ab} = 2a$ buď v ose x a půlící bod její počátkem soustavy. Koncovými body a, b veďme rovnoběžky s osou y a protínejme je libovolnou pohyblivou přímkou tak, aby součin pořadnic vzniklých na těchto rovnoběžkách byl stálou veličinou $= k^2$. Která jest obalová křivka pohybující se přímky?

Rovnice pohybující se přímky buď $y = \pm Ax + \alpha$ (α úsek její na osy y), příslušné pořadnice na rovnoběžkách s osou y pak

$$y_1 = \alpha - aA, \quad y_2 = \alpha + aA;$$

dle podmínek jest

$$y_1 y_2 = \pm k^2$$

(znaménko $+$ platí, jsou-li obě pořadnice v souhlasném směru, a $-$, jsou-li v různých směrech), tudíž

$$(\alpha - aA)\,(\alpha + aA) = \pm k^2$$

čili

$$\alpha^2 - a^2A^2 = \pm k^2$$

a

$$A = \frac{\sqrt{\alpha^2 \mp k^2}}{a}.$$

Rovnice pohybující se přímky jest tedy:

$$V \equiv \alpha - y - \frac{x\sqrt{\alpha^2 \mp k^2}}{a} = 0$$

a
$$\frac{dV}{d\alpha} = 1 - \frac{\alpha x}{a\sqrt{\alpha^2 \mp k^2}} = 0;$$

z rovnice druhé obdržíme

$$\alpha x = a\sqrt{\alpha^2 \mp k^2} \quad \text{čili} \quad \alpha^2 x^2 = a^2\alpha^2 - a^2 k^2$$

(zvolíme-li znaménko hořejší) a

$$\alpha = \frac{ak}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do rovnice první, dostaneme:

$$\frac{ak}{\sqrt{a^2 - x^2}} - y - \frac{x^2 k}{a\sqrt{a^2 - x^2}} = 0, \quad a^2 k - ay\sqrt{a^2 - x^2} - kx^2 = 0$$

a po náležité úpravě pak obdržíme:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1$$

(ellipsu), nebo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{k^2} = 1$$

(hyperbolu, zvolíme-li znaménko dolejší).

Rovnice dvou kružnic, jejichž centrála vzata jest za osu x, buďte

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2, \quad (x - a_1)^2 + y^2 = r_1^2.$$

Zvolíme-li chordálu obou kružnic za osu y, pak jest

$$a^2 - r^2 = a_1^2 - r_1^2.$$

Dotýká-li se obou kružnic třetí kružnice, jejíž rovnice jest

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

platí pro dotyk jich

$$(\alpha - a)^2 + \beta^2 = (R \pm r)^2, \quad (\alpha - a_1)^2 + \beta^2 = (R \pm r_1)^2;$$

odečteme-li první rovnici od druhé, obdržíme:

$$2(a - a_1)\,\alpha - a^2 + a_1^2 = \mp 2(r - r_1)\,R - r^2 + r_1^2$$

a ježto

$$a^2 - r^2 = a_1^2 - r_1^2,$$

jest

$$(a - a_1)\,\alpha = \mp (r - r_1)\,R.$$

Dotýká-li se třetí kružnice obou prvních ve smyslu opačném, jest

$$(\alpha - a)^2 + \beta^2 = (R \pm r)^2, \quad (\alpha - a_1)^2 + \beta^2 = (R \mp r_1)^2;$$

a odečteme-li obě rovnice:

$$2\,(a - a_1)\,\alpha - a^2 + a_1^2 = \mp\, 2\,(r + r_1)\,R - r^2 + r_1^2,$$

t. j.

$$(a - a_1)\,\alpha = \mp (r + r_1)\,R.$$

Připojme ještě čtvrtou kružnici, jejíž rovnice jest

$$(x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 = R_1^2.$$

Pro dotyk obou prvních kružnic s oběma posledními v témže smyslu obdržíme:

$$(a - a_1)\,\alpha = \mp (r - r_1)\,R, \text{ nebo } (a - a_1)\,\alpha = \mp (r + r_1)\,R$$

a

$$(a - a_1)\,\alpha_1 = \mp (r - r_1)\,R_1, \text{ nebo } (a - a_1)\,\alpha_1 = \mp (r + r_1)\,R_1.$$

Pro dotyk ve smyslu opačném máme:

$$(a - a_1)\,\alpha = \mp (r - r_1)\,R, \text{ nebo } (a - a_1)\,\alpha = \mp (r + r_1)\,R$$

a

$$(a - a_1)\,\alpha_1 = \pm (r + r_1)\,R_1, \text{ nebo } (a - a_1)\,\alpha = \pm (r + r_1)\,R_1.$$

V prvním případě jest

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{R}{R_1}, \text{ t. j. } \alpha R_1 - \alpha_1 R = 0, \text{ nebo též } \frac{\alpha_1 R - \alpha R_1}{R - R_1} = 0$$

a ve druhém:

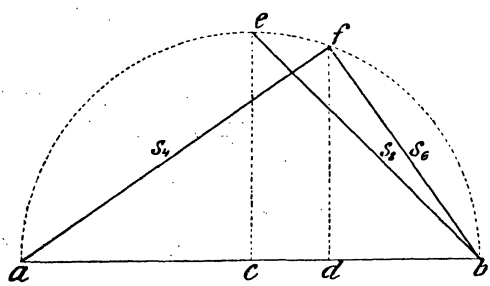
$$\frac{\alpha}{\alpha_1} = -\frac{R}{R_1}, \text{ t. j. } \alpha R_1 + \alpha_1 R = 0, \text{ nebo též } \frac{\alpha_1 R + \alpha R_1}{R + R_1} = 0.$$

Odtud plyne: Dotýkají-li se dvou kružnic jiné dvě kružnice buď v témže nebo opačném smyslu, leží v prvním případě vnější, ve druhém vnitřní bod podobnosti obou posledních kružnic na chordále obou prvních kružnic.

Jiná vyplývající poučka:

Dotýkají-li se dvou kružnic tři jiné kružnice stejným anebo protivným způsobem, pak sjednocuje se v prvním případě vnější, ve druhém vnitřní bod podobnosti prvních dvou kružnic s chordálou tří posledních kružnic.

Budiž $\overline{ab}$ průměr opsané koule pravidelnému tělesu, $\overline{ac} = \overline{cb} = r$ a $\overline{ad} = \frac{4}{3} r$. Vztyčme v c a d kolmice ce, df i jest: $\overline{af} = s_4$ (hrana pravidelného čtyrstěnu), $\overline{bf} = s_6$ (hrana krychle), $\overline{be} = s_8$ (hrana pravidelného osmistěnu).



Obr. 4.

Z obrazce jest patrno, že

$$\overline{af}^2 = \overline{ab} \,.\, \overline{ad} = 2r\,(\overline{ac} + \overline{cd}) = 2r\,(r + \frac{r}{3}) = \frac{8r^2}{3} = s_4^2,$$

t. j.

$$r = \frac{s_4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{s_4}{4}\sqrt{6}.$$

Dále jest

$$\overline{bf}^2 = \overline{ab} \,.\, \overline{bd} = 2r \,.\, \frac{2r}{3} = \frac{4r^2}{3} = s_6^2,$$

neboli

$$r = \frac{s_6\sqrt{3}}{2}$$

a

$$s_4^2 + s_6^2 = 4r^2.$$

$$\overline{be}^2 = 2r \,.\, r = 2r^2 = s_8^2 \quad \text{a} \quad r = \frac{s_8\sqrt{2}}{2}.$$

Daný kruh rozděliti na n stejných dílů tak, aby se obvod každého dílu rovnal obvodu daného kruhu.

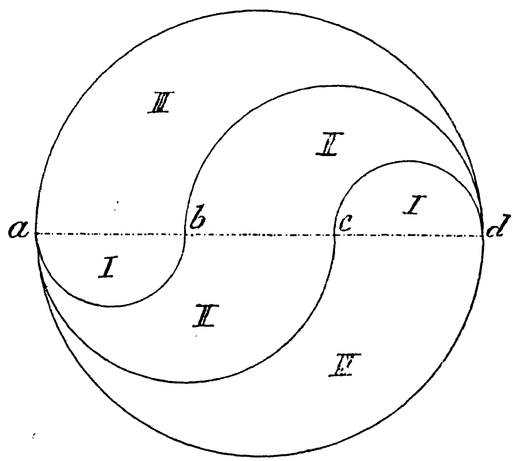
Rozdělme průměr daného kruhu na n stejných dílů, na př. na tři $\overline{ab} = \overline{bc} = \overline{cd}$ a opišme nad $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ dole a nad $\overline{bd}$, $\overline{cd}$ nahoře polokruhy, tím vznikne 6 ploch, ze kterých jsou dvě a dvě shodné: I $\cong$ I, II $\cong$ II, III $\cong$ III.

Je-li poloměr daného kruhu r, jest:

$$\text{plocha I} = \frac{1}{2}\,\pi \left(\frac{r}{3}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{18},$$

$$\text{„ II} = \frac{1}{2}\,\pi \left(\frac{2}{3}\,r\right)^2 - \frac{\pi r^2}{18} = \frac{3\pi r^2}{18},$$

$$\text{„ III} = \frac{\pi r^2}{2} - \frac{1}{2}\,\pi \left(\frac{2}{3}\,r\right)^2 = \frac{5\pi r^2}{18};$$



Obr. 5.

tudíž plocha

$$\text{I} + \text{III} = \frac{\pi r^2}{18} + \frac{5\pi r^2}{18} = \frac{\pi r^2}{3}$$

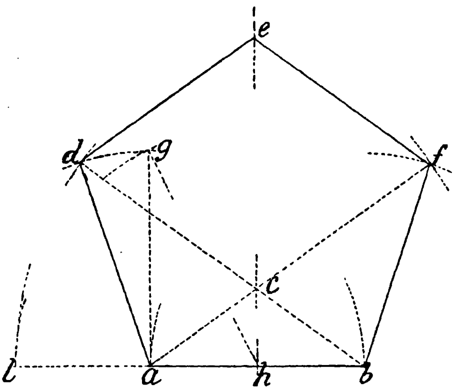
a plocha

$$\text{II} + \text{II} = 2\,.\,\frac{3\pi r^2}{18} = \frac{\pi r^2}{3} = \text{I} + \text{III}.$$

$$\text{Obvod plochy I} + \text{III} = \frac{\pi r}{3} + \pi r + \frac{2\pi r}{3} = 2\pi r.$$

$$\text{„ „ II} + \text{II} = 2\left(\frac{\pi r}{3} + \frac{2\pi r}{3}\right) = 2\pi r.$$

Budiž $\overline{ab}$ strana pravidelného pětiúhelníku; sestrojme $\overline{ag} \perp \overline{ab}$, $(\overline{ag} = \overline{ab})$, rozpůlme ab $(\overline{ah} = \overline{hb})$, opišme z bodu h oblouk $\overline{gl}$ a z bodů a, b oblouky poloměry $\overline{ab}$, $\overline{bl}$, které se protínají ve vrcholech d, f pravidelného pětiúhelníku $abfde$.



Obr. 6.

Tato konstrukce zakládá se na vlastnosti pravidelného pětiúhelníku: Dvě úhlopříčky $\overline{af}$, $\overline{bd}$ protínají se tak, že větší úsek $\overline{cd} = \overline{cf}$ jest $= \overline{ab}$ a zároveň střední měřicky úměrnou mezi celou úhlopříčkou a menším úsekem $\overline{bc}$, $\overline{ac}$, t. j.

$$\overline{bd} : \overline{cd} = \overline{cd} : \overline{bc}$$

nebo

$$\overline{bd} : \overline{ab} = \overline{ab} : \overline{bc}.$$

Z obrazce jest patrno:

$$\overline{hl}^2 = \overline{hg}^2 = \overline{ag}^2 + \overline{ah}^2 = \overline{ab}^2 + \left(\frac{ab}{2}\right)^2,$$

tudíž

$$\overline{hl}^2 - \left(\frac{ab}{2}\right)^2 = \overline{ab}^2,$$

anebo

$$\left(hl + \frac{ab}{2}\right)\left(hl - \frac{ab}{2}\right) = \overline{ab}^2 = \overline{bl} \,.\, \overline{al};$$

ježto $\overline{bl} = \overline{ab} + \overline{al}$, jest al menší úsek úhlopříčky $\overline{bl} = \overline{bd}$.