Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Rudolf Hruša

Drobnosti z trigonometrie

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 1, 81--87

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122383

Drobnosti z trigonometrie.

Podává **Rudolf Hruša**, c. k. professor.

Trigonometrické řešení úlohy: Vypočísti strany a obsah různoběžníku, dány-li obě úhlopříčny u, v a vnitřní úhly α, β, γ, provádí se na základě relací:

$$\begin{aligned} u^2 \sin^2(\alpha+\beta) &= a^2 \sin^2\beta + c^2 \sin^2\delta \\ &+ 2ac \sin\beta \sin\delta \cos(\alpha+\beta) \\ v^2 \sin^2(\alpha+\beta) &= c^2 \sin^2\gamma + a^2 \sin^2\alpha \\ &+ 2ac \sin\alpha \sin\gamma \cos(\alpha+\beta). \end{aligned} \qquad (1)$$

Odvození těch rovnic najde čtenář ve článku: „Příspěvek ku geometrii čtyřúhelníku, Časopis, XLIII., p. 231., r. 1914" *).

Postup řešení se zjednoduší zavedením úhlu sevřeného úhlopříčnami ω, který se dá snadno vypočísti. Plocha různoběžníku se dá dvojím způsobem vyjádřiti úhlopříčnami, a sice:

$$P = \tfrac{1}{2} u \,.\, v \sin\omega = \frac{u^2 \sin\alpha \sin\gamma - v^2 \sin\beta \sin\delta}{2\sin(\alpha+\gamma)}.$$

Poslední formule byla uvedena ve shora citovaném článku pod číslem 3. Úhel ω jest dán formulí:

$$\sin\omega = \frac{u^2 \sin\alpha \sin\gamma - v^2 \sin\beta \sin\delta}{uv \sin(\alpha+\gamma)}. \qquad (2)$$

Strany a, c se vypočtou z rovnic soustavy (1).

Řešení těchto kanonických rovnic provádí se tím způsobem, že se z nich odvodí rovnice homogenní. K tomu cíli

*) Příloha z r. 1914, p. 71, 72.

třeba násobiti horní rovnici veličinou v^2, dolní pak veličinou u^2 a odečísti, a tím se obdrží rovnice:

$$a^2 (v^2 \sin^2 \beta - u^2 \sin^2 \alpha) + c^2 (v^2 \sin^2 \delta - u^2 \sin^2 \gamma)$$
$$+ 2ac (v^2 \sin \beta \sin \delta - u^2 \sin \alpha \sin \gamma) \cos (\alpha + \beta) = 0.$$

Z této homogenní rovnice dá se vypočísti poměr $z = \frac{a}{c}$. Zavede-li se tento poměr jako nová neznámá, vyjde tato kvadratická rovnice:

$$z^2 [v^2 \sin^2 \beta - u^2 \sin^2 \alpha] + 2z [v^2 \sin \beta \sin \delta - u^2 \sin \alpha \sin \gamma]$$
$$\cos (\alpha + \beta) + v^2 \sin^2 \delta - u^2 \sin^2 \gamma = 0. \qquad (3)$$

Diskriminant Δ této rovnice jest dán formulí

$$\Delta = (v^2 \sin \beta \sin \delta - u^2 \sin \alpha \sin \gamma)^2 \cos^2 (\alpha + \beta)$$
$$- [v^2 \sin^2 \beta - u^2 \sin^2 \alpha] . [v^2 \sin^2 \delta - u^2 \sin^2 \gamma].$$

Postupnou úpravou se obdrží:

$$\Delta = (v^2 \sin \beta \sin \delta - u^2 \sin \alpha \sin \gamma)^2 \cos^2 (\alpha + \beta)$$
$$- v^4 \sin^2 \beta \sin^2 \delta - u^4 \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma$$
$$+ u^2 v^2 [\sin^2 \alpha \sin^2 \delta + \sin^2 \beta \sin^2 \gamma]$$
$$= (v^2 \sin \beta \sin \delta - u^2 \sin \alpha \sin \gamma)^2 \cos^2 (\alpha + \beta)$$
$$- (v^2 \sin \beta \sin \delta - u^2 \sin \alpha \sin \gamma)^2$$
$$+ u^2 v^2 (\sin \alpha \sin \delta - \sin \beta \sin \gamma)^2.$$

Konečně se dospěje k formuli:

$$\Delta = u^2 v^2 (\sin \alpha \sin \delta - \sin \beta \sin \gamma)^2$$
$$- (v^2 \sin \beta \sin \delta - u^2 \sin \alpha \sin \gamma)^2 \sin^2 (\alpha + \beta).$$

Z formule (2) plyne vztah:

$$uv \sin (\alpha + \gamma) \sin \omega = u^2 \sin \alpha \sin \gamma - v^2 \sin \beta . \sin \delta.$$

Vedle toho jest platný vztah:

$$\sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \delta = \sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha + \gamma).$$

(Příspěvek ku geometrii čtyřúhelníku p. 232, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky XLIII.)

Následkem toho formule pro diskriminant se postupně takto změní:

$$\Delta = u^2 v^2 \sin^2 (\alpha + \beta) \sin^2 (\alpha + \gamma)$$
$$- u^2 v^2 \sin^2 (\alpha + \beta) \sin^2 (\alpha + \gamma) \sin^2 \omega. \qquad (4)$$
$$\Delta = u^2 v^2 \sin^2 (\alpha + \beta) \sin^2 (\alpha + \gamma) \cos^2 \omega.$$

Rovnice (3) dá se psáti ve tvaru:

$$z^2 (v^2 \sin^2 \beta - u^2 \sin^2 \alpha) - 2zuv \sin (\alpha + \gamma) \cos (\alpha + \beta) \sin \omega + v^2 \sin^2 \delta - u^2 \sin^2 \gamma = 0. \qquad (3a)$$

Řešením této rovnice se obdrží postupně:

$$z = \frac{uv \sin (\alpha + \gamma) \cos (\alpha + \beta) \sin \omega \pm \sqrt{\Delta}}{v^2 \sin^2 \beta - u^2 \sin^2 \alpha}$$

$$z = \frac{uv \sin(\alpha + \gamma) \cos(\alpha + \beta) \sin \omega \pm uv \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \gamma) \cos \omega}{v^2 \sin^2 \beta - u^2 \sin^2 \alpha}.$$

Rovnice (3) má tedy tyto dva kořeny:

$$z_1 = \frac{uv \sin (\alpha + \gamma) \sin (\omega + \alpha + \beta)}{v^2 \sin^2 \beta - u^2 \sin^2 \alpha}, \quad z_2 = \frac{uv \sin (\alpha + \gamma) \sin (\omega - \alpha - \beta)}{v^2 \sin^2 \beta - u^2 \sin^2 \alpha}. \qquad (5)$$

Užitím rovnice $a = cz$ z relací (1) plynou formule pro strany a, c a sice:

$$a = \frac{uz \sin (\alpha + \beta)}{\sqrt{R}}, \quad c = \frac{u \sin (\alpha + \beta)}{\sqrt{R}} \qquad (6)$$

$$R = z^2 \sin^2 \beta + \sin^2 \delta + 2z \sin \beta \,.\, \sin \delta \cos (\alpha + \beta).$$

Způsobem zcela obdobným se vypočítá z rovnic:

$$\begin{aligned} u^2 \sin^2 (\beta + \gamma) &= b^2 \sin^2 \beta + d^2 \sin^2 \delta \\ &\quad + 2bd \sin \beta \sin \delta \cos (\beta + \gamma) \\ v^2 \sin^2 (\beta + \gamma) &= b^2 \sin^2 \gamma + d^2 \sin^2 \alpha \\ &\quad + 2bd \sin \alpha \sin \gamma \cos (\beta + \gamma) \end{aligned} \qquad (1a)$$

poměr $\frac{b}{d} = t$ a sice obdrží se tyto hodnoty:

$$t_1 = \frac{uv \sin (\alpha + \gamma) \sin (\omega + \beta + \gamma)}{v^2 \sin^2 \beta - u^2 \sin^2 \gamma}, \quad t_2 = \frac{uv \sin (\alpha + \gamma) \sin (\omega - \beta - \gamma)}{v^2 \sin^2 \beta - u^2 \sin^2 \gamma}. \qquad (5a)$$

Strany b, d jsou stanoveny relacemi:

$$b = \frac{tu \sin (\beta + \gamma)}{\sqrt{Q}}, \quad d = \frac{u \sin (\beta + \gamma)}{\sqrt{Q}}. \qquad (6a)$$

$$Q = t^2 \sin^2 \beta + \sin^2 \delta + 2t \sin \beta \sin \delta \cos (\beta + \gamma).$$

Veličiny t, z jsou v podstatě kladné; proto dlužno ze dvou hodnot, které dává rovnice (2) pro úhel ω, voliti právě onu, která splňuje podmínky:

$$sin(\omega + \alpha + \beta) > 0, \qquad sin(\omega + \beta + \gamma) > 0$$

nebo

$$sin(\omega - \alpha - \beta) > 0, \qquad sin(\omega - \beta - \gamma) > 0$$

při supposicích:

$$v^2 \sin^2 \beta > u^2 \sin^2 \alpha$$
$$v^2 \sin^2 \beta > u^2 \sin^2 \gamma.$$

V opačném případě dlužno hořejší podmínky obrátiti.

Předložený úkol má dvě reálná řešení, je-li splněna podmínka:

$$u^2 \sin \alpha \sin \gamma - v^2 \sin \beta \sin \delta < uv \sin(\alpha + \gamma),$$

jedno reálné řešení v tom případě, že platí vztah:

$$u^2 \sin \alpha \sin \gamma - v^2 \sin \beta \sin \delta = uv \sin(\alpha + \gamma).$$

Úkol nemá žádného reálného řešení, když existuje vztah:

$$u^2 \sin \alpha \sin \gamma - v^2 \sin \beta \sin \delta > uv \sin(\alpha + \gamma).$$

Strany b, d se vypočítají ze známých stran a, c způsobem snazším, než bylo shora uvedeno.

2. Úkol: Vypočísti strany a plochu lichoběžníku $ABCD$, dány-li jeho úhlopříčny u, v svými délkami a vnitřní úhly α, β, $\gamma = 180 - \beta$, $\delta = 180 - \alpha$, jest zvláštním případem předešlého a řeší se týmž postupem.

V tomto případě existuje jednodušší způsob řešení, kde se však rovněž používá úhlu ω.

Plocha lichoběžníku dá se dvojím způsobem vyjádřiti úhlopříčnami u, v a sice:

$$L = \frac{(u^2 - v^2) \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\beta - \alpha)} = \tfrac{1}{2} uv \sin \omega$$

(srv. rovnici $3a$ svrchu zmíněného pojednání na str. 232, XLIII.).

Srovnáním obou formulí obdrží se rovnice pro úhel ω, z níž řešením plyne:

$$\sin \omega = \frac{(u^2 - v^2) \sin \alpha \sin \beta}{uv \sin(\beta - \alpha)}. \qquad (7)$$

Strana $AB \parallel CD$ budiž prodloužena do bodu G směrem přes B tak, že $BG = DC$.

Strany trojúhelníku AGC jsou:

$$\overline{AG} = a + c, \quad \overline{AC} = u, \quad \overline{CG} = v$$

a úhel při vrcholu C jest ω. Užitím věty kosinusové plyne tento vztah:

$$(a + c)^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos \omega.$$

Odmocňováním se obdrží:

$$a + c = \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \omega}. \tag{8}$$

Třetí formule pro plochu lichoběžníku L jest:

$$L = \frac{(a^2 - c^2) \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin (\alpha + \beta)}.$$

Srovnáním s formulí:

$$L = \frac{(u^2 - v^2) \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin (\beta - \alpha)}$$

obdrží se vztah:

$$(a^2 - c^2) \sin (\beta - \alpha) = (u^2 - v^2) \sin (\alpha + \beta). \tag{9}$$

Z rovnic (8) a (9) se postupně obdrží:

$$a - c = \frac{(u^2 - v^2) \sin (\alpha + \beta)}{\sqrt{R} \,.\, \sin (\beta - \alpha)}, \tag{10}$$

kdež jest:

$$R = u^2 + v^2 - 2uv \cos \omega.$$

Sčítáním a odčítáním z rovnic (8) a (10) odvodí se strany a, c

Ze známých úměr:

$$b : (a - c) = \sin \alpha : \sin (\alpha + \beta)$$
$$d : (a - c) = \sin \beta : \sin (\alpha + \beta)$$

plynou tyto formule pro b, d a sice:

$$b = \frac{(u^2 - v^2) \sin \alpha}{\sqrt{R} \,.\, \sin (\beta - \alpha)}, \quad d = \frac{(u^2 - v^2) \sin \beta}{\sqrt{R} \,.\, \sin (\beta - \alpha)}. \tag{11}$$

Tím úloha dokonale řešena.

Úloha má dvě reálná řešení, pokud $\sin \omega < 1$, což jest aequivalentní s nerovností:

$$\frac{u}{v} - \frac{v}{u} < \cot \alpha - \cot \beta$$

jediné reálné řešení v případě, že u, v splňují rovnici;

$$\frac{u}{v} - \frac{v}{u} = \cot \alpha - \cot \beta$$

a dvě pomyslná řešení, když u, v splňují nerovnost;

$$\frac{u}{v} - \frac{v}{u} > \cot \alpha - \cot \beta.$$

Oznamení kořenu $\sqrt{R}$ platí totéž co dříve.

Rovná-li se $\alpha = \beta$, jest buď úloha nemožná, nebo v případě $u = v$ neurčitá.

3. Konstruktivní řešení dle D. Aitoffa. (Problèmes de géométrie élémentaire groupés d'après les méthodes à employer pour leur résolution, par Ivan Alexandroff, Préface du traducteur p. VII., VIII.)

Rozbor. Kruh k_1 opsaný trojúhelníku ACD (laskavý čtenář si načrtne čtyřúhelník $ABCD$ sám) nechť protne strany další $\overline{AB}$, $\overline{CB}$ v bodech F, E. Poloměr r_1 kruhu k_1 závisí pouze na délce úhlopříčny $AC = u$ a velikosti úhlu δ, a jest bezprostředně podmínkami úkolu stanoven. Obvodový úhel příslušný tětivě EF jest $\alpha - (180 - \gamma) = \alpha + \gamma - 180^0$. Tedy rovněž tětiva EF závisí na úhlech α, γ a úhlopříčně u a jest úplně jimi určena. Budiž k_2 kruh opsaný trojúhelníku EFB; jeho poloměr r_2 závisí na délce tětivy $\overline{EF}$ a úhlu β, čili na délce úhlopříčny u a úhlech α, β, γ. Všechny jmenované veličiny jsou neodvislé od délky úhlopříčny $v = \overline{BD}$, a na tom se zakládá konstrukce čtyřúhelníku.

Konstrukce sama se provádí takto: Nad tětivou $A'C' = u$ s obvodovým úhlem δ sestrojí se kruh k_1. V bodech A', C' sestrojí se úhly α, γ tak, aby jeden pár ramen se protal na kruhovém oblouku úhlu δ, v bodě D. Tím vznikne čtyřúhelník $A'B'C'D$, který však neobsahuje úhlopříčnu v. Kruh k_1 protíná strany $B'C'$, $A'B'$ v bodech E, F. Nad tětivou $\overline{EF}$ s obvodovým úhlem β sestrojí se dále kruh k_2. Nezbývá nyní nic jiného, než do kruhů k_1, k_2 vepsati čtyřúhelník, což se provede takto: Ze středu D poloměrem v opsaný kruh protne kruh k_2 v bodech $B_1 B_2$, z nichž každý jest vrcholem čtyřúhelníků hledaných.

Přímky BE, BF stanoví druhými průseky s kruhem k_1 další dva vrcholy A, C hledaného čtyřúhelníku.

Daným podmínkám vyhovují dva čtyřúhelníky $A_1B_1C_1D$ a $A_2B_2C_2D$, jež jsou oba reálné a různé, reálné a splývající, nebo pomyslné podle toho, zda kruh ze středu D protne, dotýká se, nebo mine kruh k_2. Úloha má obecně dvě řešení.

Poněvadž strany $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ procházejí body E, F, obsahuje sestrojený čtyřúhelník ve vrcholu B úhel β. Z rovnosti úhlů $\widehat{BFB'}$ a $\widehat{BEB'}$ plyne postupně shodnost oblouků $\widehat{CC'}$ a $\widehat{AA'}$ a rovnost úseček $\overline{A'C'}$, $\overline{AC}$. Tedy sestrojený čtyřúhelník obsahuje dále obě úhlopříčky u, v a úhel δ. Poněvadž oba obvodové úhly $\widehat{DC'E}$, $\widehat{DCE}$ v kruhu k_1 mají společnou tětivu $\overline{DE}$, jsou stejné velikosti a sestrojený čtyřúhelník obsahuje daný úhel γ a tím i úhel α.

Průsek roviny s fokalní plochou rotační stupně druhého.

Napsal Dr. **Ant. Pleskot**, prof. v Plzni.

V ročníku 1913, v čísle 9tém, časopisu: „Zeitschrift für das Realschulwesen“, jest uveden od prof. H. Petterse jednoduchý důkaz známé věty: „Ortogonální průmět každého rovinného řezu rotačního paraboloidu na řídící rovinu jest kruh“.

Věta tato jest, jak známo, zvláštním případem obecné věty, jež zní: Rovinný řez rotační plochy stupně druhého, jejíž osa rotační splývá s osou ohniskovou, promítá se z ohniska této plochy rotačním kuželem.

V následujícím chceme uvésti jednoduchý elementární důkaz této věty; důkaz, nikoli však elementární, této věty jest uveden ve Fiedlerově deskriptivní geometrii, vydání III., str. 341 a násl. Budiž dána rotační plocha Φ stupně druhého: osa ohnisková budiž osou rotační. Ohniska meridianní křivky nechť jsou F_1 a F_2, při čemž může jedno z těchto ohnisek k. p. F_1 spadnouti do vzdálenosti nekonečně velké a plocha rotační přejde v paraboloid.