Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Otakar Borůvka

Poznámka o vzorci Kummerově

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 54 (1925), No. 2, 109--113

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122366

Poznámka o vzorci Kummerově.

Napsal *O. Borůvka.*

Ve svém článku „K teorii některých transcendent počtu integrálního“ ukázal jsem metodu,*) kterou lze odvoditi z Gaussova vzorce, vyjadřujícího logaritmickou derivaci funkce $\Gamma(x)$ v racionálních bodech, obecně platné trigonometrické rozvoje této funkce. Z téhož vzorce jest možno odvoditi metodou podobnou i známý vzorec Kummerův a zdá se, že metoda jest elementárnější a kratší než ostatní metody mně známé.**)

*

Přetvořme integrály

$$a_k = \int_0^1 \log \Gamma(1+x) \cos 2k x\pi \quad dx$$

$$b_k = \int_0^1 \log \Gamma(1+x) \sin 2k x\pi \quad dx,$$

v nichž k značí libovolné celistvé číslo kladné, částečnou integraci a pišme

$$-2k\pi a_k = \lim \frac{1}{\nu} \sum_{h=1}^{\nu-1} \psi\left(1+\frac{h}{\nu}\right) \sin 2k\frac{h}{\nu}\pi$$

$$2k\pi b_k = \lim \frac{1}{\nu} \sum_{h=1}^{\nu-1} \psi\left(1+\frac{h}{\nu}\right) \cos 2k\frac{h}{\nu}\pi;\text{***})$$

---

*) Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, čís. 37, str. 12.

**) Kummer, Crelleův j. svazek XXXV.; Lerch, Theorie funkce gamma (Věstník České akademie roč. VIII.); Lerch, Další studie v oboru Malmsténovských řad str. 14. (Rozpravy České akademie roč. III.).

***) Značím důsledně $\frac{d \log \Gamma(x)}{dx} = \psi(x); \; -\psi(1) = E.$

obdržíme pak snadno, užijeme-li Gaussova vzorce

$$\psi\left(1+\frac{h}{v}\right)=\frac{v}{h}-E-\log 2v-\frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\frac{h\pi}{v}+$$
$$+\sum_{\varrho=1}^{v-1}\cos\frac{2h\varrho\pi}{v}\log\sin\frac{\varrho\pi}{v},$$

platného pro racionální zlomky $\frac{h}{v}$, $o<h<v$,

$$-2k\pi a_k=\lim\sum_{h=1}^{v-1}\left[\frac{\sin 2k\frac{h}{v}\pi}{h}-\frac{\pi}{2v}\operatorname{cotg}\frac{h\pi}{v}\sin 2k\frac{h}{v}\pi\right];$$

neboť jest zřejmě

$$\sum_{h=1}^{v-1}\sin 2k\frac{h}{v}\pi=0;$$

$$\sum_{h=1}^{v-1}\sin 2k\frac{h}{v}\pi\sum_{\varrho=1}^{v-1}\cos\frac{2h\varrho\pi}{v}\log\sin\frac{\varrho\pi}{v}=0.$$

Uvážíme-li, že

$$\operatorname{cotg}\frac{h\pi}{v}=-\frac{2}{v}\sum_{\varrho=1}^{v-1}\varrho\sin 2\pi\frac{h}{v}\varrho,$$

vypočteme snadno ($o<k<v$)

$$\frac{1}{v}\sum_{h=1}^{v-1}\operatorname{cotg}\frac{h\pi}{v}\sin 2k\frac{h}{v}\pi=-\frac{1}{v^2}\sum_{\varrho=1}^{v-1}\varrho\sum_{h=1}^{v-1}$$
$$\left[\cos 2\pi\frac{h}{v}(k-\varrho)-\cos 2\pi\frac{h}{v}(k+\varrho)\right]=\frac{1}{v^2}(v^2-2kv)$$

neboť jest pro $\varrho\neq k$ a $\varrho\neq v-k$

$$\sum_{h=1}^{v-1}\left[\cos 2\pi\frac{h}{v}(k-\varrho)-\cos 2\pi\frac{h}{v}(k+\varrho)\right]=0,$$

kdežto obecně pro $\varrho=k$ resp. $\varrho=v-k$ jest týž výraz roven v resp. $-v$.

Jest tedy

$$\lim \frac{1}{\nu} \sum_{h=1}^{\nu-1} \operatorname{cotg} \frac{h\pi}{\nu} \sin 2k \frac{h}{\nu} \pi = 1.$$

Dále jest

$$\lim \sum_{h=1}^{\nu-1} \frac{\sin 2k \frac{h}{\nu} \pi}{h} = \int_0^1 \frac{\sin 2k x\pi}{x} dx =$$

$$= -2k\pi \int_0^1 \log x \cos 2k x\pi \, dx = -2k\pi \, \alpha_k,$$

takže vychází

$$a_k = \frac{1}{4k} + \alpha_k.$$

Analogicky vypočteme

$$2k\pi b_k = \lim \left[\sum_{h=\nu}^{\nu-1} \frac{\cos 2k \frac{h}{\nu} \pi}{h} + \frac{1}{\nu} \sum_{\varrho=1}^{\nu-1} \log \sin \frac{\varrho\pi}{\nu} \sum_{h=1}^{\nu-1} \cos \frac{2h\varrho\pi}{\nu} \cos \frac{2hk\pi}{\nu} \right]$$

a pak

$$\sum_{\varrho=1}^{\nu-1} \log \sin \frac{\varrho\pi}{\nu} \sum_{h=1}^{\nu-1} \cos \frac{2h\varrho\pi}{\nu} \cos \frac{2hk\pi}{\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^{\nu-1} \log \sin \frac{\varrho\pi}{\nu} \sum_{h=1}^{\nu-1} \left[\cos \frac{2\pi h}{\nu} (k+\varrho) + \cos 2\pi \frac{h}{\nu} (k-\varrho) \right] =$$

$$= \nu \log \sin \frac{k\pi}{\nu} - \sum_{\varrho=1}^{\nu-1} \log \sin \frac{\varrho\pi}{\nu}.$$

Ježto však dle známého elementárního vzorce jest

$$\prod_{\varrho=1}^{\nu-1} \sin \frac{\varrho\pi}{\nu} = \frac{\nu}{2^{\nu-1}},$$

můžeme psáti

$$2k\pi b_k = \lim\left[\sum_{h=1}^{\nu-1}\frac{\cos 2k\frac{h}{\nu}\pi}{h} + \log\sin\frac{k\pi}{\nu}\right] + \log 2 =$$

$$= \log 2k\pi + \lim\left[\sum_{h=1}^{\nu-1}\frac{\cos\frac{2kh}{\nu}\pi}{h} - \log\nu\right]$$

a pak, protože

$$\lim\left[\sum_{h=1}^{\nu-1}\frac{1}{h} - \log\nu\right] = E$$

$$2k\pi b_k = \log 2k\pi + E - 2\lim\sum_{h=1}^{\nu-1}\frac{\sin^2\frac{k\pi h}{\nu}}{h} =$$

$$= \log 2k\pi + E + 2k\pi\int_0^1 \log x \sin 2kx\pi\, dx.$$

Vychází tedy

$$b_k = \frac{\log 2\pi + E}{2k\pi} + \frac{\log k}{2k\pi} + \beta_k.$$

Z významu konstant a_k, b_k, α_k, β_k vyplývá, že

$$\log\Gamma(1+x) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos 2kx\pi + 2\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin 2kx\pi$$

$$(0 < x < 1$$

$$1 + \log x = 2\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\cos 2kx\pi + 2\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\sin 2kx\pi.$$

Vychází tedy s ohledem na známý vzorec

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$$

$$\log\Gamma(x) = a_0 + 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx\pi}{k} + (\log 2\pi + E)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx\pi}{k\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log k}{k}\sin 2kx\pi,$$

z něhož dosazením $x = \frac{1}{2}$ ihned určíme

$$a_0 + 1 = \frac{1}{2} \log 2\pi.$$

Uvážíme-li ještě, že při $0 < x < 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k x\pi}{k\pi} = \frac{1}{2} - x; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k x\pi}{k} = -\log 2 \sin x\pi,$$

nacházíme vzorec Kummerův $(0 < x < 1)$

$$\log \Gamma(x) = (\log 2\pi + E)\left(\frac{1}{2} - x\right) + \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{\sin x\pi} +$$
$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k} \sin 2 k x \pi.$$

*

Remarque sur la formule de Kummer.

(Extrait de l'article précédent.)

J'ai donné, dans le mémoire „*Contribution à la théorie de quelques fonctions transcendantes du calcul intégral*" une méthode pour développer en séries trigonométriques la fonction

$$\frac{d \log \Gamma(x)}{dx},$$

en partant d'une formule de Gauss. Dans la note précédente, je déduis, par une méthode analogue, la série de Kummer; cette méthode me semble plus rapide et plus élémentaire que les méthodes connues.