Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Arnošt Dittrich

Dvě poznámky k článku B. Hostinského o transformacích mechanických rovnic

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 54 (1925), No. 2, 152--156

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122361

Dvě poznámky k článku B. Hostinského o transformacích mechanických rovnic.

Napsal Dr. *Arnošt Dittrich.*

Hostinský zakončil výměnu názorů o principu relativnosti na str. 308—324, 401—404 tohoto časopisu z roč. 53. ze dne 29. března 1924 formálně poznámkou (str. 403), jíž poukazuje na práci, v níž obšírně pojedná o matematické stránce transformací, kterými se nemění Langrange-ovy rovnice. V Bulletin des sciences mathématiques uveřejnil r. 1924 článek »Sur les transformations des équations de la méchanique«, jenž se obírá velmi specielním případem obecných transformací mechanických rovnic.

Protože tyto obecné transformace jsou již 73 léta známy, nelze odtud nic proti relativistice vyvážiti. Naopak.[1]) Článek Hostinského dotýká se však ve dvou bodech mého článku z Láskova čísla »Methoda Hamilton-Jakobi-ho v mechanice Einsteinově« v Časop. pro pěst. mat. a Fys. r. 1923. Jen proto musím se jím zabývati.

Jedním z těchto bodů jest rovnoprávnost času t a všeobecných souřadnic q_ν, kde $\nu = 1 \ldots n$, v mechanických rovnicích. Viz mé pojednání na str. 52. dole. Hostinský dokazuje ji z Hamiltonova integrálového principu zavedením nové neodvisle proměnné místo času. V pojednání svém, jež vyšlo o rok dříve než důkaz Hostinského, pokládal jsem rovnoprávnost tu za samozřejmou. Byl jsem si totiž dávno již vědom, že rovnocennost času se souřadnicemi musila býti objevena dříve než partiální rovnice Hamilton-Jakobi-ho.

Vyjděme od rovnic kanonických. Ke každé obecné souřadnici q_ν náleží složka impulsu p_ν. Pohyb daný individualisuje pak jediná funkce

$$h(t, q_1 \ldots q_n; p_1 \ldots p_n),$$

kterou po případě píšeme kratčeji

$$h\,(t, q; p).$$

Rovnice mechanické zní pak

$$\frac{dq_\nu}{\frac{\partial h}{\partial p_\nu}} = \frac{dp_\nu}{-\frac{\partial h}{\partial q_\nu}} = dt;\ \nu = 1 \ldots n.$$

---

[1]) Viz poslední dva odstavce: Dittrich »Zu Einsteins hydromechanischen Ableitung des Theorems von Jacobi«. Astronom. Nachr. Nr. 5216, str. 120, 1922. Vytištěno v únoru 1923.

Na první pohled liší se tu čas od souřadnic tím, že mu schází analogie impulsu. Nazveme tuto veličinu — pro případ, že existje — ϑ. Lze-li vůbec takovou veličinu času přiřaditi, musí — per analogiam —

$$dt = \frac{d\vartheta}{-\frac{\partial h}{\partial t}}.$$

O jmenovateli $\partial h/\partial t$ známa však věta, která se z úplného differentiálu

$$dh = \sum_{\nu}^{1..n}\left(\frac{\partial h}{\partial q_\nu} dq_\nu + \frac{\partial h}{\partial p_\nu} dp_\nu\right) + \frac{\partial h}{\partial t} dt$$

vyvodí dosazením za dq_ν a dp_ν z kanonických rovnic. Pak totiž celá suma vypadne a zbude

$$dh = \frac{\partial h}{\partial t} dt.$$

Poněvadž

$$d\vartheta = -\frac{\partial h}{\partial t} dt,$$

jest

$$d\vartheta + dh = 0,$$

čili

$$f \equiv \vartheta + h = Const.$$

Poněvadž h nezávisí na ϑ, lze rovnice kanonické nahraditi relacemi

$$\frac{dq_\nu}{\frac{\partial f}{\partial p_\nu}} = \frac{dp_\nu}{-\frac{\partial f}{\partial q_\nu}} = \frac{dt}{\frac{\partial f}{\partial \vartheta}} = \frac{d\vartheta}{-\frac{\partial f}{\partial t}}. \qquad (1)$$

Rovnice ty jsou správné, protože pro

$$f \equiv \vartheta + h\ (t, q; p)$$

dávají

$$\frac{dq}{\frac{\partial h}{dp_\nu}} = \frac{dp}{-\frac{\partial h}{\partial q_\nu}} = \frac{dt}{1} = \frac{d\vartheta}{-\frac{\partial h}{\partial t}}.$$

Teprve forma rovnic (1) v níž čas dokonale postaven na rovno souřadnicím, zaručuje na základě teorie diferenciálních rovnic I. stupně existenci funkce souřadnic a času ϑ, kde

$$dv = \sum_{\nu}^{1..n} p_\nu\, dq_\nu + \vartheta\, dt.$$

Funkce v jest řešením partiální diferenciální rovnice I. stupně

$$\vartheta + h\,(t, q; p) = Const.$$

jinak

$$\frac{\partial v}{\partial t} + h\,(t, q; \frac{\partial v}{\partial q}) = Const,$$

jež sluje rovnicí Hamilton-Jakobi-ho. — Bez újmy obecnosti lze Const položiti rovnu nule, protože v rovnicích (1) vyskytuje se f jen derivováno. Je tedy neurčitá o aditivní konstantu.

Pro rovnocennost času se všeobecnými souřadnicemi kryje se obecný transformační problém klasické mechaniky s transformačním problémem partiální diferenciální rovnice I. stupně

$$f(x_0 \,.\,.\, x_n; p_0 \,.\,.\, p_n) = 0, \tag{2}$$

kde

$$dz = \sum_{\nu}^{0..n} p_\nu\, dx_\nu.$$

Obsahuje-li rovnice $f = O$ též odvisle. proměnnou z, lze ji zvětšením počtu neodvisle proměnných o jednu převésti zase na tvar (2) tak, že můžeme v rovnici oné viděti obecný případ partiální rovnice I. stupně.

Po nejobecnější transformaci partiální diferenciální rovnice I. stupně ptal se po prvé Jakobi (Paris C. R. 5. 1851).[2]) Jakobi udal transformace, jež dnes — po pracích Sopha Lie-ho — označujeme jako dotykové a tvrdil, že to jsou nejobecnější přeměny takové rovnice. Sophus Lie v Math. Ann. 8. (1875), str. 223[3]) se nad tím pozastavuje, že správnost tohoto tvrzení není a priori evidentní. Ale Jakobi chtěl asi říci, že jeho transformacemi lze kteroukoliv diferenciální rovnici I. stupně přeměniti v napřed ustanovenou jinou, což jest arci správné.[4])

Jakobi vychází od jistého počtu rovnic, jež neobsahují impulsy. Tyto »aequationes directrices« derivovány dají transformační rovnice impulsů. Transformace, na něž se Hostinský omezuje, jsou velmi speciálním případem těch, jimiž se Jacobi před 73 léty za-

---

[2]) Teubnerova velká encyklopaedie matematiky, sv. III., 3., seš. 4. H. Liebmann »Berührungstransformationen« str. 444 z r. 1915.

[3]) Liebmann 444, pozn. 5.

[4]) Goursat »Part. diff. I. Ordnung«. S. 287 a 276. 1893.

býval. Jsou to ty, kde počet aeq. dir. dosahuje počtu proměnných (maxima), čímž doteková transformace se specialisuje na bodovou.

Všechny transformace, jimiž se Hostinský obírá, jsou zahrnuty případem

$$X_\nu = X_\nu (x_0 \ldots x_n);\ \nu = o \ldots n. \qquad (3)$$

Jeho transformace S dostaneme, pokládáme-li x_0 a X_0 za čas, jenž se transformuje identicky dle relace

$$X_0 = x_0.$$

Bez tohoto omezení odpovídají transformace (3) oněm, jež Hostinský označuje písmenou Σ. Specialisujeme tuto na tvar

$$X_\nu = x_\nu;\ \nu = 1 \ldots n$$
$$X_0 = X_0\ (x_0),$$

dojde pouze k záměně času jinou neodvisle proměnnou, čímž prokázáno, že Newtonův »rovnoměrný tok času« (absolutního) jest pro mechaniku bezvýznamný.

Hostinský tento důsledek jeho Théorème I. zvláště dokazuje a formuluje jako Théorème II. Ale Hostinský nemusil ve svém pojednání vůbec nic dokazovati. Mohl se odvolati na rovnocennost času se souřadnicemi — asi $^3/_4$ století známou — a takový důkaz, jako na př. jím citovaný od E. J. Routha.[5])

Hostinský ve svém pojednání z dávno známé široké transformační teorie klasických rovnic, jež se opírá o práce Lagrange-ovy, Poissonovy a hlavně Jakobi-ho, znovu zpracoval malý sektor a vyzvedl z výsledků svých na konci (str. 14. sep.) větu, že obecné pohybové rovnice Einsteinovy pro gravitační pole neliší se formou od rovnic Lagrange-ových pro systém se čtyřmi stupni volnosti, bez zevních sil, jehož kinetická energie je homogenní druhého stupně ve všeobecných složkách ryvnosti.

Tuto větu, kterou Hostinský uveřejnil r. 1924 ve světovém jazyku, publikoval jsem sám v Láskově čísle našeho časopisu r. 1923.[6]) Hostinského pojednání touto větou končí, moje ji začíná. U mne použita na pohyb planet, křivení světla a transformaci pohybu planetárního v pohyb rovnoměrně-přímočarý atd. U Hostinského proveden jako příklad — případ setrvačnosti. Jako stoupenec relativity vypořádal jsem se podrobně s faktem, že rovnice Einsteinovy jsou v klasické mechanice obsaženy. Hostinský jest odpůrcem relativistiky. Ale o významu věty pro její posouzení nepřináší nic.

*

[5]) Nebo: Sommerfeld »Atombau u. Spektrallinien«. 467. 1921.
[6]) Methoda Hamilton-Jacobi-ho v mechanice Einsteinově. Tři řádky dole na str. 40. a násl.

Deux remarques à propos de l'article de M. Hostinský sur les transformations des équations mécaniques.

(Extrait de l'article précédent.)

L'équivalence du temps et des coordonnées générales de la mécanique classique a du être réconnue avant la découverte de l'équation de Hamilton-Jacobi. — Remarque sur le théorème disant que les équations d'Einstein pour le mouvement d'un point libre, dans un champ de gravitation, sont identiques, en forme, aux équations de Lagrange au cas de quatre degrés de liberté, en absence de forces extérieures et quand l'énergie cinétique est une fonction quadratique homogène des composantes générales de la vitesse.