Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

O proměnlivosti součtu zvláštní nekonečné řady s nestejným označením členů

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 17 (1888), No. 6, 256--262

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122360

Při spisech Šimerkových chváliti jest původnosť myšlének i bohatosť obsahu.

Šimerka byl muž povahy veskrze šlechetné, přímé a srdečné, a milým i význačným zjevem v národním životě našem, náležeje k těm českým a moravským kněžím, kteří rozumějí velikým ideám moderním a kteří s lidem cítí, jsouce hotovi, za svobodu a práva jeho položiti i život v oběť.

Velice jest litovati, že Šimerkovi nebylo dopřáno, domoci se působiště, mathematickému talentu jeho přiměřeného, čím by jistě česká literatura mathematická od něho ještě více byla získala. *A. P.*

O proměnlivosti součtu zvláštní nekonečné řady s nestejným označením členů.

Dle Schlömilcha upravil

professor Dr. F. J. Studnička.

Jakož známo, jest algebraické sečítání úkonem záměnným čili kommutativním, jelikož součet nezávisí na pořádku, v jakém po sobě se kladou jeho sčítanci, pokud jest jich počet jen konečný. Jakmile však počet sčítanců jest nekonečně velký, nutno přihlédnouti k jich označení, jelikož se tu součet mění, zavede-li se jiný pořádek, v němž se do nekonečna střídají sčítanci positivní s negativními.

Součet řady positivních členů, na př.

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{k+i},$$

nemění se, nechť členové její co sčítanci kladou se po sobě v pořádku jakém koli. Součet téže řady střídavě + a — označených členů

$$S_1 = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{k+i}$$

mění se však změnou pořádku, v jakém positivní a negativní jeho sčítanci se kladou; jest jiný, následuje-li na př. na *dva* positivní sčítance *jeden* negativní, jest-li tedy řada tvaru

$$S_{2,1}=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+4i}+\frac{1}{k+2+4i}-\frac{1}{k+1+2i}\right),$$

a opět jiný, následují-li na př. na *dva* positivní členy *tři* negativní, jest-li tedy řada tvaru

$$S_{2,3}=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+4i}+\frac{1}{k+2+4i}-\frac{1}{k+1+6i}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{k+3+6i}-\frac{1}{k+5+6i}\right).$$

Abychom všeobecně odůvodnili tento zvláštní zjev, položme za základ řadu

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{k+i}=\int_0^1\frac{x^{k-1}}{1+x}dx,\text{*)} \tag{1}$$

a sestrojme si z nekonečného počtu jejích členů novou řadu spůsobem tím, že vždy za p po sobě jdoucích *positivních* členů jejích položíme q po sobě jdoucích členů *negativních*. Napřed však vyjděme od takovéto řady konečné

$$\begin{aligned}
S_{p,q}=&\sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{k+2i} &&-\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{k+1+2i}\\
+&\sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{k+2p+2i} &&-\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{k+2q+1+2i}\\
+&\sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{k+4p+2i} &&-\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{k+4q+1+2i}\\
+&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
+&\sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{k+(2n-2)p+2i} &&-\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{k+(2n-2)q+1+2i}.
\end{aligned}$$

*) Viz *Studnička* „O počtu integrálním", Praha, 1871, pag. 117.

Abychom si zjednali součet řady této, uvažme, že platí

$$\frac{1}{k+m}=\int_0^1 x^{k+m-1}\,dx,$$

takže bude podlé toho všeobecně

$$\sum\frac{1}{k+m}=\sum\int_0^1 x^{k+m-1}\,dx=\int_0^1\sum x^{k+m-1}\,dx,$$

a tedy v případě předcházejícím, přihlížíme-li napřed jen ke členům řady positivním,

$$\sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{k+2i}=\int_0^1 x^{k-1}\,dx\sum_{i=0}^{p-1}x^{2i},$$

$$\sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{k+2p+2i}=\int_0^1 x^{k-1}\,dx\sum_{i=0}^{p-1}x^{2p+2i},$$

$$\sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{k+4p+2i}=\int_0^1 x^{k-1}\,dx\sum_{i=0}^{p-1}x^{4p+2i},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{k+(2n-2)p+2i}=\int_0^1 x^{k-1}\,dx\sum_{i=0}^{p-1}x^{(2n-2)p+2i},$$

takže součet všech těchto členů *positivních* bude

$$\sum_{i=0}^{np-1}\frac{1}{k+2i}=\int_0^1 x^{k-1}\,dx\,(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2np-2})$$

$$=\int_0^1 x^{k-1}\,dx.\frac{1-x^{2np}}{1-x^2}.$$

Podobně obdržíme součet všech členů *negativních*

$$\sum_{i=0}^{nq-1}\frac{1}{k+1+2i}=\int_0^1 x^{k-1}\,dx\,(x+x^3+x^5+\ldots+x^{2nq-1})$$

$$=\int_0^1 x^{k-1}\,dx\,.\frac{x-x^{2nq+1}}{1-x^2}.$$

Spojíme-li tedy oba výsledky, povstane napřed

$$S_{p,q}=\int_0^1 x^{k-1}.\frac{1-x^{2np}}{1-x^2}dx-\int_0^1 x^{k-1}.\frac{x-x^{2nq+1}}{1-x^2}dx,$$

a sloučením členů na pravé straně jiným

$$S_{p,q}=\int_0^1\frac{x^{k-1}}{1+x}dx+\int_0^1 x^{k-1}.\frac{x^{2nq+1}-x^{2np}}{1-x^2}dx.$$

Prodloužíme-li pak řadu členů do nekonečna, obdržíme

$$S'=S+J_\infty,$$

kdež zvláště nutno vyšetřiti hodnotu

$$J_\infty=\lim_{n=\infty}\int_0^1 x^{k-1}.\frac{x^{2nq+1}-x^{2np}}{1-x^2}dx,$$

jelikož pak S dáno vzorcem (1). K tomu cíli položme

$$x^{2n}=y,$$

načež se obdrží, jakož snadno se pozná, napřed

$$\int_0^1 x^{k-1}\frac{x^{2n\left(q+\frac{1}{2n}\right)}-x^{2np}}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{y^{q+\frac{1}{2n}}-y^p}{n\left(1-y^{\frac{1}{n}}\right)}y^{\frac{k}{2n}-1}dy;$$

a poněvadž v algebraické analysi se učí, že

$$\lim_{n=\infty}n\left(1-y^{\frac{1}{n}}\right)=-\lim_{\varepsilon=0}\frac{y^\varepsilon-1}{\varepsilon}=-ly=l\frac{1}{y},$$

obdržíme napřed vymezením naznačeným

$$J = \frac{1}{2}\int_0 \frac{y^q - y^p}{l\frac{1}{y}} \cdot \frac{dy}{y};$$

zavedeme-li pak do integrálu tohoto

$$y = e^{-z}, \quad \text{takže} \quad l\frac{1}{y} = z, \quad \frac{dy}{y} = -dz,$$

a nové hodnoty mezní vyplynou ze schematu

y	z
0	∞
1	0

zjednáme si konečně

$$J_\infty = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-qz} - e^{-pz}}{z} dz = \frac{1}{2} l \frac{p}{q}, \text{*)}$$

I jest tedy

$$S' = S + \frac{1}{2} l \frac{p}{q}, \tag{2}$$

kdež značí

$$S = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} + \dots \tag{3}$$

a S' řadu z S odvozenou tím spůsobem, že vždy na p po sobě jdoucích členů *positivních* následuje q po sobě jdoucích členů *negativních*.

Kdybychom ve vzorci (2) položili

$$k = \frac{a}{b},$$

obdržíme, jakož snadno se možná přesvědčiti,

$$\sigma' = \sigma + \frac{1}{2b} l \frac{p}{q}, \tag{4}$$

kdež značí

$$\sigma = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \dots$$

*) ibid. pag 104.

a σ' z řady σ stejným spůsobem jest odvozeno, jako předcházející S' z řady S.]

Kdyby tedy na př. bylo

$$a=1,\ b=1,\ p=2,\ q=1,$$

naše řada tedy

$$\sigma=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots,$$

bude odvozená takto z ní řada

$$\sigma'=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\ldots;$$

a tu bude tedy podlé vzorce (4)

$$\sigma'=\sigma+\frac{1}{2}l\,2=\frac{3}{2}l\,2,$$

jelikož dle známého vzorce

$$\sigma=l\,2.$$

Jednoduchou změnou pořádku, jakým tu na členy positivní následují členové negativní, zvětšen součet o polovičku.*) A kdybychom učinili

$$p=2^m,\quad q=1,$$

obdrželi bychom ze vzorce (4)

$$\sigma'=l\,2+\frac{1}{2}\,l\,2^m=\left(1+\frac{m}{2}\right)l\,2,$$

jako by naopak pro

$$p=1,\ q=2^m$$

z téhož vzorce (4) vyplynulo

$$\sigma'=l\,2-\frac{1}{2}\,l\,2^m=\left(1-\frac{m}{2}\right)l\,2.$$

---

*) Elementární toho důkaz podán v „Časop. pro pěstov. math. a fys." R. XVI. pag. 81. *Studnička* „Poznámka o řadách nekonečných".

Z čehož proměnlivost součtu naší nekonečné řady s nestejným označením členů zřejmě se poznává.

Poznamenání. Kdyby v posledním vzorci bylo

$$m = 2, \quad \text{tedy} \quad q = 4,$$

obdrželi bychom z něho

$$\sigma' = 0;$$

jaký zjevu tohoto význam?

Přirozený kyvadlový stroj a dva nápodobené kyvadélkové strojky.

Onen objevil roku 1883 a tyto nápodobil roku 1884 P. **Cornelius Plch**, T. J. v Bohusudově.

(Dokončení.)

Odrůdy přirozeného kyvadlového stroje. *)

α) Roste-li zeměpisná šířka $\varphi = \sphericalangle$ RSM, (viz obr. 1. pag. 1.) přibližuje se místo M k točně T, a zmenšuje se tudíž poledník Mp, poloměr $m_0p = Mp$ spodního obzoru $pm_0m_1m_2 \ldots m_{12}p$, strana $\mu_0p = m_0p = Mp$ i výška Cp kužele $p\mu_0\mu_1\mu_2 \ldots \mu_0$.

1. Při $\varphi = 90^0$ splyne místo M s točnou T a s body p, C, osa SA děleného kruhu $MN_0N_1N_2 \ldots N_0$ s osou zemskou ST, a osa $pq \parallel$ SA vrchního obzoru $pH_0H_1H_2 \ldots H_0$ taktéž s osou zemskou ST; i jest pak

$$Mp = 0, \quad m_0p = 0, \quad \mu_0p = 0, \quad Cp = 0,$$

$$\sphericalangle N_0MN_1 = \gamma \sin\varphi = \gamma = \frac{360^0}{12} = 30^0,$$

$$\sphericalangle N_0MN_2 = 2\gamma \sin\varphi = 2\gamma = \frac{2.360^0}{12} = 60^0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sphericalangle N_0MN_{12} = 12\gamma \sin\varphi = 12\gamma = \frac{12.360^0}{12} = 360^0.$$

---

*) Příslušné obrazce načrtnou si laskaví čtenářové sami.