Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 17 (1888), No. 6, 284--294

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122355

se čára $\xi_2 = m\xi_1 + n$ čáry $\xi_1^2 + \xi_2^2 = R^2$, leží bod dotyku na čáře $\xi_2 = -\frac{1}{m}\xi_1$; první a třetí z těchto rovnic udávají dle 4. ellipsy, druhá rovnice dle 6. rovnoramennou hyperbolu, a přihlíží-li se blíže ku poloze a osám těchto tří čar, lze vysloviti poučku: *Buďtež E a E' dvě ellipsy o středech O a O', jejichž osy ve směru přímky OO' jsou 2a a 2a', kdežto druhé jich osy jsou stejné a $= 2\sqrt{aa'}$. Pohybuje-li se ellipsa E' ve směru osy OO', a sestrojí-li se pro každou její polohu rovnoramenná hyperbola soustředná s pevnou ellipsou E a dotýkající se ellipsy E' souměrně ve dvou bodech, leží veškeré tyto body dotyku v ellipse E.*

Prof. *V. Řehořovský.*

Úlohy.

Řešení úlohy 22.

Buďtež a, b, c kořeny rovnice

(1) $$x^3 + px^2 + qx + r = 0;$$

potom jest

$$p = -(a + b + c)$$
$$q = ab + bc + ca$$
$$r = -abc.$$

Položíme-li

$$y = x + \frac{1}{x}$$

čili

(2) $$x^2 - xy + 1 = 0,$$

bude

$$x^3 = x^2y - x$$

a rovnice (1) nabude touto substitucí podoby

(3) $$(y + p)x^2 + (q - 1)x + r = 0.$$

Vyloučením x z rovnice (2) a (3) povstane

$$ry^3 + (pr + q)y^2 + (p - 3r + pq + rq)y + (p - r)^2 + (q - 1)^2 = 0;$$

z této pak rovnice plyne

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)\left(c + \frac{1}{c}\right) = -\frac{(p - r)^2 + (q - 1)^2}{r}$$

aneb se zřetelem k hodnotám p, q, r

$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)=(a+b+c-abc)^2+(ab+bc+ca-1)^2$, což bylo dokázati.

Řešení úlohy této zaslali pp.: *Karel Petr* a *Ludvík Novotný* z VIII. tř. v Chrudimi, *Karel Herzán* ze VII. tř. r. v Karlíně, *K. Klír* a *Bohumil V. Dědek* ze VII. tř. české real. šk. v Praze, *Ant. Legner* ze VII. tř. g. v Příbrami a *Boh. Novák* ze VII. tř. g. v Táboře.

Řešení úlohy 23.

(Zaslal p. *Karel Herzán,* stud. VII. tř. r. v Karlíně.)

Abychom vyloučili úhel α z rovnic

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=a\sqrt{\sin 2\alpha} \tag{1}$$

$$x\sin\alpha-y\cos\alpha=-\frac{a\cos 2\alpha}{\sqrt{\sin 2\alpha}}, \tag{2}$$

násobme rovnici (1) hodnotou $\cos\alpha$, (2) pak hodnotou $\sin\alpha$ a sečtěme; obdržíme tak

$$x=\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{\sin 2\alpha}}.$$

Vyloučivše x z rovnic (1) a (2) způsobem podobným, najdeme

$$y=\frac{a\cos\alpha}{\sqrt{\sin 2\alpha}}$$

a tedy znásobením posledních dvou rovnic

$$xy=\frac{a^2}{2}. \tag{3}$$

Poznámka. Rovnice (1) náleží tečně hyperboly stanovené rovnicí (3); rovnice (2) značí příslušnou normálu.

Řešení úlohy této zaslali pp.: *VáclavKraus* z VIII. tř. v Č. Budějovicích, *Karel Petr* a *Ludvík Novotný* z VIII. tř. g. v Chrudimi, *K. Klír* ze VII. tř. české v. real. šk. v Praze a *Ant. Legner* zeVII. tř. g. v Příbrami.

Řešení úlohy 24.

(Zaslal p. *Jan Petříček,* stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Jest patrno, že v trojúhelníku rovnostranném neb rovnoramenném jest žádanou příčkou osa souměrnosti v trojúhelníku.

Snadně lze též poznati, že ve trojúhelníku různostranném nemůže příčka taková jíti vrcholem, nýbrž musí protínati dvě strany trojúhelníka v různých bodech. Budiž velikost stran i úhlů trojúhelníka ABC označena způsobem obvyklým; hledaná příčka protínej na př. stranu BC v bodě D, stranu AC v bodě E tak, že jest

$$CD = x, \quad CE = y, \quad DE = z.$$

Dle požadavků vyslovených v úloze má býti

$$x + y + z = (a - x) + (b - y) + c + z,$$

$$xy \sin \gamma = \frac{1}{2} ab \sin \gamma.$$

Klademe-li $a + b + c = 2s$, lze rovnice poslední psáti v této jednoduché podobě

$$x + y = s, \quad xy = \frac{1}{2} ab.$$

Obě neznámé jsou tedy kořeny rovnice

$$x^2 - sx + \frac{1}{2} ab = 0,$$

i můžeme je odtud bez obtíží vypočítati i sestrojiti; kořeny ty jsou vždy realné. Omezení úlohy vyžaduje, aby bylo $x < a$, $y < b$, čili

$$s + \sqrt{s^2 - 2ab} < 2a, \quad s - \sqrt{s^2 - 2ab} < 2b.$$

Tyto podmínky značně se zjednoduší užitím hodnoty s a odstraněním odmocnin; vyjde pak

$$a > c > b.$$

Uvážíme-li, že x a y smíme vzájemně vyměniti, poznáváme správnost tohoto konečného výsledku:

V trojúhelníku různostranném jsou žádané příčky vždy možny dvě; obě protínají nejdelší a nejkratší stranu trojúhelníka a jsou souměrny ku ose půlící úhel těchto stran.

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Karel Klír* ze VII. tř. české real. šk. v Praze, *Karel Herzán* ze VII. tř. r. v Karlíně a *Karel Petr* z VIII. tř. v Chrudimi.

Řešení úlohy 25.

Daný kužel měj poloměr r, výšku v a stranu s; v základně jeho jest dána tětiva $2y$, k níž přísluší středový úhel 2α.

Položíme-li tětivou touto rovinu, která od základny odchýlena jest o týž úhel jako strany kužele, protíná tato rovina oblinu kuželovou v oblouku parabolickém. Roviny takové jsou možny dvě; z těch volme onu, která protíná výšku kužele. Nazveme x výšku úseče parabolické, omezené obloukem parabolickým a tětivou $2y$; plocha této úseče jest

$$P = \frac{4}{3}xy.$$

Poněvadž však $y = r \sin\alpha$, a

$$x : s = r(1 + \cos\alpha) : 2r,$$

můžeme též klásti

$$P = \frac{2}{3} rs \sin\alpha\,(1 + \cos\alpha);$$

toť žádaný výraz pro plochu parabolického řezu. Řezem tím dělí se kužel v části K_1, K_2, z nichž budiž K_1 část ta, která téme kužele obsahuje. Tato část skládá se ze dvou kuželů o společném temeni; základna jednoho jest úseč U omezená tětivou $2y$ s kruhovým obloukem příslušným k středovému úhlu 2α, základnou druhého jest řez P. Značí-li tedy t vzdálenost roviny sečné od temene kužele, jest

$$K_1 = \frac{1}{3}Uv + \frac{1}{3}Pt.$$

Ježto pak

$$U = \frac{\pi r^2 \alpha}{180} - \frac{r^2 \sin\alpha}{2},$$

a mimo to

$$t : r(1 - \cos\alpha) = v : s,$$

najdeme dosazením těchto hodnot po krátké úpravě

$$K_1 = \frac{r^2 v}{540}\,[\pi\alpha - 90 \sin 2\alpha + 120 \sin^3\alpha].$$

Odečtouce tento výraz od celého obsahu kužele, obdržíme

$$K_2 = \frac{r^2 v}{540}\,[(180 - \alpha)\,\pi + 90 \sin 2\alpha - 120 \sin^3\alpha].$$

Při $\alpha = 60^0$ jest plocha parabolického řezu P maximum; v případě tom jest

$$K_1 = \frac{\pi r^2 v}{9}, \quad K_2 = \frac{2\pi r^2 v}{9},$$

a tedy

$$K_1 : K_2 = 1 : 2.$$

Řešení úlohy této zaslali pp.: *Karel Herzán* ze VII. tř. r. v Karlíně a *Karel Petr* z VIII. tř. v Chrudimi.

Řešení úlohy 26.

(Zaslal p. *Karel Petr*, stud. VIII. tř. v Chrudimi.)

Mějme trojúhelník abc, ve kterém $ac = bc$; vrchol a pohybuj se po přímce X a vrchol b po přímce $Y \perp X$. Stálé témě c měj vzhledem ku osám těmto souřadnice

$$x_3 = m, \quad y_3 = n.$$

Značí-li r délku ramene ac, budou souřadnice bodu a

$$x_1 = m \pm \sqrt{r^2 - n^2}, \quad y_1 = 0$$

a souřadnice bodu b

$$x_2 = 0, \quad y_2 = n \pm \sqrt{r^2 - m^2}.$$

Souřadnice těžiště trojúhelníka abc jsou pak

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{1}{3}(2m \pm \sqrt{r^2 - n^2}),$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{1}{3}(2n \pm \sqrt{r^2 - m^2}).$$

Abychom z těchto dvou rovnic vyloučili proměnné r, dejme jim podobu

$$3x - 2m = \sqrt{r^2 - n^2}$$

$$3y - 2n = \sqrt{r^2 - m^2}$$

a zdvojmocnivše je, odečtěme druhou od prvé. Tak obdržíme

$$3(x^2 - y^2) - 4(mx - ny) + m^2 - n^2 = 0$$

čili

$$\left(x - \frac{2}{3}m\right)^2 - \left(y - \frac{2}{3}n\right)^2 = \frac{m^2 - n^2}{9};$$

jest tedy geom. místem těžiště hyperbola pravoúhlá, jejíž střed má souřadnice $\frac{2}{3}m$, $\frac{2}{3}n$, jejíž osy jsou rovnoběžny s osami souřadnými a která prochází stálým temenem c.

Je-li $m > n$, má realná osa délku $\frac{1}{3}\sqrt{m^2 - n^2}$ a jest rovnoběžna ku X; je-li $m < n$, jest délka realné osy $\frac{1}{3}\sqrt{n^2 - m^2}$

a směr její rovnoběžný ku Y; je-li však $m = n$, rozpadne se hyperbola ve dvé kolmých přímek určených rovnicemi

$$x + y = \frac{2}{3}(m + n)$$

$$x - y = \frac{2}{3}(m - n).$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *K. Klír* ze VII. tř. č. real. šk. v Praze, *Karel Herzán* ze VII. tř. r. v Karlíně a *Ludvík Novotný* z VIII. tř. g. v Chrudimi.

Řešení úlohy 13., 17., 18., 19. a 20. zaslal též p. *Václav Kadlec*, stud. VII. tř. české real. šk. v Praze, řešení úlohy 13. p. *Jan Fišera*, stud. VII. tř. g. v Roudnici, řešení úlohy 19. p. *Karel Herzán*, stud. VII. tř. r. v Karlíně a řešení úlohy 16. a 21. p. *Ludvík Novotný*, stud. VIII. tř. g. v Chrudimi.

Řešení cenné úlohy.*)

a) *Rozbor*. Hledaný trojúhelník budiž ABC, daná strana $AB = c$, daný úhel $ACB = \gamma$, a mediany AD, BE, CF, které protínají se v bodu M, nechť vyhovují podmínce $\overline{AD}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{CF}^2$.

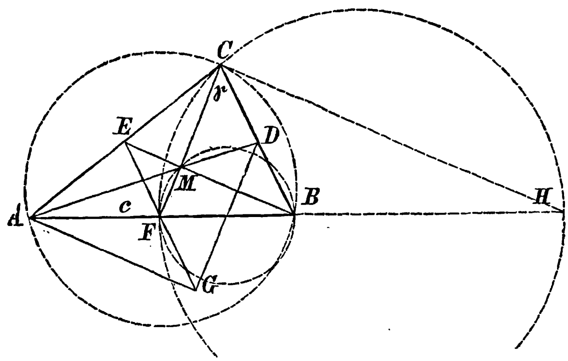
Najdeme-li dvě místa geometrická vrcholu C, která lze snadno sestrojiti, bude průsečík jejich třetím vrcholem C trojúhelníka ABC, jehož dva vrcholy A, B jsou známy. Jedním geom. místem vrcholu C jest kruhový oblouk ACB, neboť vrcholy A, B jsou stálé, a velikosť úhlu $ACB = \gamma$ jest též stálá. Druhé místo měřické vrcholu C vyšetříme takto:

Je-li F středem strany AB, vysvítá ze stálého poměru $\frac{FM}{FC} = \frac{1}{3}$, že geom. místem bodu M jest křivka podobná a stejně položená s geom. místem vrcholu C vzhledem ku středu podobnosti F a poměru $\frac{FM}{FC} = \frac{1}{3}$. Vyšetříme-li tedy měřické místo bodu M, snadno najdeme též geom. místo vrcholu C. K tomu cíli prodlužme EF o $FG = EF = CD$, a sestrojme trojúhelník

*) Viz str. 192.

ADG. Strana AG jest souměrně položena s medianou BE vzhledem ku středu F, i jest tedy

(1) $\qquad\qquad BE = AG, \quad AG \parallel EB.$



V rovnoběžníku CDGF, jehož strany CD a FG jsou stejnosměrny s příčkou EF a jí se rovnají, jest

(2) $\qquad\qquad CF = DG, \quad DG \parallel CF.$

Platíli podmínka $\overline{AD}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{CF}^2$, nebo dle rovnic (1), 2), $\overline{AD}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{DG}^2$, jest trojúhelník ADG při G pravoúhlý. Dále jest dle stejnosměrnosti (1), (2) úhel $BMF = AGD = 90^0$, a protože vrcholy B, F trojúhelníka BMF jsou stálé, jest měř. místem bodu M kružnice mající BF za průměr. Nyní jest patrno, že hledaným měř. místem vrcholu C jest kružnice FCH podobně položená s kružnicí BMF vzhledem ku středu podobnosti F a poměru $\frac{FC}{FM} = 3$.

Sestrojení. Vyrýsujme stranu $AB = c$, její střed F a kruhový oblouk ACB, jehož obvodový úhel ACB rovná se danému úhlu γ. Prodlužme FB o $BH = 2 . FB$ a sestrojme kružnici FCH, ve které jest FH průměrem čili FCH úhlem pravým. Kružnice tato protíná kruhový oblouk ACB ve vrcholu C hledaného trojúhelníka ABC.

Důkaz. Ježto $AB = c$ a $\sphericalangle ACB = \gamma$, jest dvěma podmínkám vyhověno. Zbývá nám pouze dokázati, že mediany AD, BF a CF vyhovují podmínce $\overline{AD}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{CF}^2$.

Dle sestrojení jest $\frac{FM}{FC} = \frac{FB}{FH} = \frac{1}{3}$,

tedy $$\sphericalangle FMB = FCH = 90^0.$$

Dle rovnice této a stejnosměrnosti (1) a (2)

$$\sphericalangle AGD = BMF = 90^0,$$

pročež z trojúhelníka pravoúhlého ADG obdržíme

$$\overline{AD}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{DG}^2.$$

Z rovnice této a rovnic (1) a (2) obdržíme konečně

$$\overline{AD}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{CF}^2,$$

čímž jest i poslední podmínce vyhověno.

Omezení. Kruhový oblouk ACB a kružnice FCH mají toliko jediný bod C společný, a proto má úloha toliko jedno řešení.

b) Táž měřická místa BMF a FCH, která jsme při rozboru našli, můžemo též snadno obdržeti použitím analytické geometrie.

Budiž F počátkem a AB osou X pravoúhlé soustavy souřadnic. Položme $AD = m_a$, $BE = m_b$, $CF = m_c$.

Souřadnice x, y bodu M vyhovují podmínkám

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{9} m_c^2,$$

$$x^2 + y^2 - cx + \frac{c^2}{4} = \frac{4}{9} m_b^2,$$

$$x^2 + y^2 + cx + \frac{c^2}{4} = \frac{4}{9} m_a^2.$$

Z rovnic těchto a podmínky

$$m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$$

můžeme m_a, m_b, m_c vyloučiti, čímž obdržíme pro měř. místo bodu M rovnici

$$2(x^2 + y^2) - cx = 0,$$

které přísluší kružnice BMF průměru BF.

Z rovnice předešlé a rovnic

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{1}{3},$$

obdržíme rovnici geom. místa vrcholu C (ξ, η)

$$2(\xi^2 + \eta^2) - 3c\xi = 0.$$

Z rovnice této vysvítá, že geom. místem vrcholu C jest též kružnice FCH.

Řešení druhé.

Rozbor. Mediany AD, BE, CF trojúhelníka ABC nechť protínají se v bodu M, a v trojúhelníku BDM budiž vedena mediana DN || CF, potom jest

$$MD = \frac{AD}{3}, \quad MN = \frac{BE}{3}, \quad DN = \frac{CF}{3},$$

tedy, platí-li podmínka

$$\overline{AD}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{CF}^2,$$
$$\overline{MD}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{DN}^2,$$

pročež jest $\sphericalangle MND = 90^0$, a poněvadž DN || CM, jest též $\sphericalangle BMC = 90^0$.

Trojúhelník pravoúhlý BMC má svůj střed v bodu D, a proto jest

$$MD = BD = CD,$$

odkudž

(1) $$AD = 3 \,.\, MD = 3 \,.\, BD = 3 \,.\, CD.$$

Nyní lze určiti směr mediany AD a strany AB. Za účelem tím učiňme CD′ = D′B′ ve straně CB, a v rameni AC stanovme bod A′ tak, aby

(2) $$A'D' = 3 \,.\, B'D' = 3 \,.\, CD',$$

potom jest dle (1) a (2)

$$\frac{AD}{A'D'} = \frac{CD}{CD'},$$

tedy $$AD \parallel A'D'$$

a protože dle (1) a (2)

$$\frac{AD}{A'D'} = \frac{BD}{B'D'},$$

jest $$AB \parallel A'B'.$$

Známým směrem A′B′ a délkou strany AB jest její poloha v daném úhlu ACB určena.

Sestrojení. Narýsujme úhel ACB $= \gamma$, v rameni BC učiňme CD′ = D′B′, a z bodu D′ poloměrem A′D′ = 3.CD′ sestrojme kruhový oblouk, který rameno AC bude protínati v bodu A′.

Veďme příčku A′B′ a učiňme v ní A″B′ = AB = c. Pak sestrojme příčku AA″ || B′C v úhlu B′A′C a příčku AB || A′B′ v úhlu A′CB′, tím obdržíme žádaný trojúhelník ABC.

Důkaz. Dle sestrojení jest

$$\sphericalangle ACB = \gamma, \quad AB \parallel A''B', \quad AA'' \parallel BB', \quad A''B' = c,$$

tedy $$AB = A''B' = c.$$

I jest nám pouze dokázati, že

$$\overline{AD}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{CF}^2.$$

Protože AD jest medianou trojúhelníka ABC, jest

$$BC = 2 \, . \, BD,$$

a ježto dle sestrojení $AB \parallel A'B'$ a $B'C = 2 \, . \, B'D'$,

bude $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C} = \frac{BD}{B'D'},$$

pročež $$AD \parallel A'D'.$$

Ze stejnosměrnosti této plyne dále, že

$$\frac{AD}{CD} = \frac{A'D'}{CD'},$$

a jelikož v úměře této $A'D' = 3 \, . \, CD'$ dle sestrojení, jest v ní též $$AD = 3 \, . \, CD = 3 \, . \, BD,$$

odkudž $$MD = CD = BD.$$

Z rovnosti této vysvítá dále, že trojúhelník BMC jest při M pravoúhlý, tedy

$$\overline{BC}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2$$

avšak $BC = 2 \, . \, MD = AM$, neboť jest DM medianou trojúhelníka pravoúhlého BMC a AD medianou trojúhelníka ABC, pročež

$$\overline{AM}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2.$$

Násobíme-li rovnici tuto $\frac{4}{9}$, a uvážíme-li, že $AD = \frac{2}{3} AM$, $BE = \frac{2}{3} BM$, $CF = \frac{2}{3} CM$, obdržíme

$$\overline{AD}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{CF}^2.$$

Omezení. Kruhový oblouk poloměrem $D'A' > CD'$ sestrojený může míti s ramenem AC toliko jediný bod A' společný, i lze tedy dle sestrojení obdržeti v úhlu ACB toliko jednu stranu AB žádaného trojúhelníka. Úloha jest tedy jednoznačně určena.

Pan *Václav Jeřábek*, professor c. k. české vyšší reálné školy v Brně, který úlohu tuto navrhl, uznal, že za řešení, úplně vyhovující dostati mají ceny, výborem J. Č. M. vypsané, studující:

Josef Borový ze VI. tř. české reálky v Praze,
Karel Herzán ze VII. tř. české reálky v Karlíně,
Otakar Kádner z VIII. tř. městské střední školy v Praze,
Antonín Legner ze VII. tř. g. v Příbrami,
Arnošt Mádl z VIII. tř. g. v Novém Bydžově,
Jan Minks z VIII. tř. něm. g. v Kroměříži,
Frant. Nušl z VIII. tř. g. v Jindř. Hradci,
Karel Petr z VIII. tř. g. v Chrudími,
Jan Petříček ze VII. tř. r. v Hradci Králové,
Ladislav Tacheci ze VI. tř. české reálky v Praze,
Karel Tůma ze VII. tř. české reálky v Praze,
Frant. Výšek ze VII. tř. g. městské stř. šk. v Praze,
Frant. Zelinka ze VII. tř. české reálky v Brně,
Karel Zikmund z VIII. tř. městské stř. školy v Praze.

Mimo to podali ještě správné řešení:

Lud. Brabec ze VII. tř. r. měst. stř. šk. v Praze,
V. Čáslavský ze VII. tř. r. měst. stř. šk. v Praze,
Bohumil Dědek ze VII. tř. české reálky v Praze,
Jaroslav Heller ze VII. tř. r. měst. stř. šk. v Praze,
Karel Klír ze VII. tř. české reálky v Praze,
Josef Král ze VII. tř. g. v Klatovech,
Jan Křižensky ze VII. tř. české reálky v Praze,
Jan Kučera ze VII. tř. r. měst. stř. šk. v Praze,
Jaroslav Ších ze VII. tř. české reálky v Brně,
Frant. Škorpil ze VII. tř. české reálky v Praze,
Josef Vančura z VIII. tř. g. v Budějovicích,
St. Züngl ze VII. tř. české reálky v Praze,
Gustav Baštýř ze VII. tř. akad. g. v Praze.

Ostatní řešitelé, jichž nejmenujeme, podali řešení úlohy buď částečně neb úplně chybné.

Věstník literární.

A. Hlídka programů.

Patnáctá roční zpráva o českoslovanské akademii obchodní v Praze za rok školní 1886—1887. *Rozprava o účtu běžném a účtu z úroků.* Napsal prof. *Josef Smolík.*