

G. Petrov

La méthode projective de Monge dans l'espace elliptique

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 1, 27--42

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122348>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1950

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

LA MÉTHODE PROJECTIVE DE MONGE DANS L'ESPACE ELLIPTIQUE.

G. PETROV, Praha.

(Reçu le 16 Juillet 1949.)

Dans notre travail précédent nous avons traité la construction de la méthode projective de MONGE dans l'espace hyperbolique, en utilisant le modèle projectif de CAYLEY-KLEIN.*)

L'ouvrage présent se propose d'exposer la construction de cette méthode dans l'espace elliptique en utilisant de nouveau le modèle de CAYLEY-KLEIN.

Avant d'aborder le sujet nous rappellerons quelques notions fondamentales du plan et de l'espace elliptiques qui seront nécessaires pour la suite.

La géométrie elliptique du plan se réalise sur le plan projectif entier et par conséquent aussi sur le plan euclidien entier complété par les éléments infinis, en prenant comme absolu un cercle imaginaire (O_i) défini par l'antipolarité créée par le cercle (O_r) ayant même centre et rayon que le module du rayon du cercle imaginaire (O_i). -

Le cercle (O_r) s'appelle le substitut réel du cercle imaginaire (O_i). Tous les points du plan euclidien complété, y compris les points à l'infini, se traitent comme des points réels du plan elliptique. De même on traite les droites du plan euclidien, y compris leurs points à l'infini, comme des droites du plan elliptique.

Il en résulte que:

Les droites du plan elliptique sont fermées et que deux droites quelconques du plan elliptique se coupent en un point déterminé.

Pour abrégé on désignera par *el* les éléments et les opérations du plan elliptique et par *Eu* ceux du plan euclidien.

On appelle égalité *el* chaque transformation homographique du plan projectif entier, qui conserve l'absolu (O_i) c'est-à-dire qui conserve l'antipolarité créée par le substitut réel (O_r) de (O_i).

On dit que deux droites \overline{AB} et $\overline{A'B'}$ sont égales quand il existe une égalité *el* qui transforme $A \rightarrow A'$ et $B \rightarrow B'$.

*) Voir VI (cf. la Bibliographie placée à la fin de cet article).

Si U_i et V_i sont les points de rencontre de la droite AB avec (O_i) et $U_i'V_i'$ ceux de $A'B'$ avec (O_i) , on a alors:

$$(ABU_iV_i) = (A'B'U_i'V_i').$$

Si A et B sont deux points *el* et que la droite qui les joint coupe (O_i) en U_i et V_i , on définit la longueur *el* de la droite AB ou la distance entre les points *el* A et B par le nombre

$$l(AB) = \frac{c_e \cdot i}{2} [\ln(U_iV_iAB),]$$

c_e étant le rayon de (O_r) .

De la définition ci-dessus il résulte que la longueur *el* d'une droite et par conséquent la distance entre deux points *el* est toujours finie, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'éléments à l'infini dans le plan.

Deux points sur une droite elliptique définissent deux droites elliptiques qui se complètent et dont l'ensemble a comme longueur π pour $c_e = 1$. Si l'une a comme longueur *el* a l'autre aura $\pi - a$.

Ces deux longueurs sont égales seulement dans le cas où les points A et B sont conjugués harmoniques par rapport aux points principaux U_i, V_i de la droite *el* AB . Dans ce cas les points *el* A et B sont dits orthogonaux.

Deux points *el* orthogonaux sont conjugués dans l'antiinvolution créée par (O_r) . Les deux segments *el* définis par les points A et B ont pour milieux S et S' . Ces milieux constituent aussi un couple de points orthogonaux. Les points S et S' sont le couple conjugué harmonique à la fois par rapport aux deux couples de

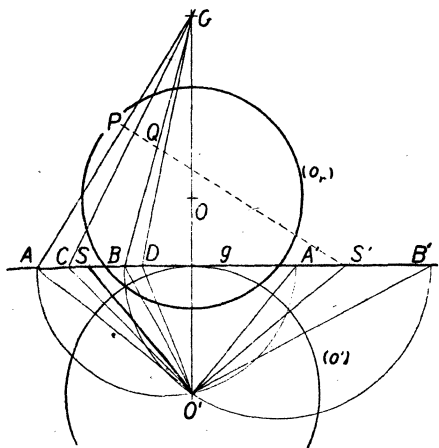


Fig. 1.

points AB et $A'B'$ où A' et B' sont des points *el* orthogonaux correspondant à A et B (fig. 1).

Sur la fig. 1 on a de même la résolution du problème de la translation du segment *el*: AB sur la droite AB , A venant en C .

Ici on utilise le fait que la translation *el* sur une droite *el* est identique à la translation *el* sur un cercle euclidien. On trouve le centre de ce dernier en utilisant la propriété que, de ce point, on voit sous l'angle $\frac{1}{2}\pi$ le segment dont les extrémités sont deux points orthogonaux. Le rayon du cercle est la distance du point d'intersection trouvé à la droite. Le rayon du cercle est égal à $\sqrt{r^2 + a^2}$, où r est le rayon de (O_r) et a la distance de la

droite du centre O de (O_r) . Son centre se trouve sur la droite, passant par O et est orthogonal à la droite AB . Tous les points orthogonaux à un point el donné G , se trouvent sur la droite, polaire du point el G par rapport à l'absolu (O_i) c'est-à-dire antipolaire par rapport au substitut réel (O_r) de l'absolu (O_i) (fig. 1, G et g).

Deux angles el (a, \hat{b}) et (c, \hat{d}) sont el égaux quand il existe une égalité el qui transforme $a \rightarrow c$ et $b \rightarrow d$ et par conséquent $u_i \rightarrow u_i'$ et $v_i \rightarrow v_i'$ où u_i' et v_i' sont les tangentes à (O_i) du point $S = a \times b$ et u_i', v_i' celles de $S' = c \times d$.

On a

$$(abu_i v_i) = (cd u_i' v_i').$$

La grandeur el de l'angle (a, \hat{b}) est donnée par

$$\omega(a, \hat{b}) = \frac{1}{2} i \ln(abu_i v_i).$$

Deux droites el a et b sont el perpendiculaires quand elles sont conjuguées harmoniques par rapport à u_i et v_i ; en d'autres termes quand elles sont conjuguées dans l'antiinvolution créée par (O_r) .

On appellera le segment el sur l'antipolaire du sommet de l'angle el , limité par les points de rencontre avec les côtés de l'angle, segment correspondant à l'angle el . Des définitions ci-dessus, il résulte que deux angles sont égaux quand leurs segments correspondants sont égaux, ou, en termes plus généraux:

Dans la géométrie elliptique il existe un dualisme entre la mesure des segments et les angles en remplaçant les termes point et segment par droite et angle.

Comme exemple on prendra:

I. Toute droite el perpendiculaire à la droite el p passe par le pôle P de cette dernière par rapport à (O_i) .

D'un point el $A \neq P$ on peut mener une perpendiculaire el à p et une seule.

Tout couple de droites possède une perpendiculaire commune — la polaire par rapport à (O_i) de leur point de rencontre.

II. Tout point el orthogonal au point el P , se trouve sur la polaire de P par rapport à (O_i) .

Sur une droite el $a \neq p$ il existe un point et un seul el orthogonal à P .

Tout couple de points possède un point orthogonal commun — c'est le pôle par rapport à (O_i) de la droite qui les joint.

La rotation el d'un angle φ , défini par les droites a, b , passant par G dans le plan el α , autour du point G présente dans le plan une homographie possédant G comme point double et la droite g dont G est l'antipôle par rapport à (O_r) comme droite double; cette homographie porte a en b, c en d et a' en b' , où cd est la position de l'angle ab après la rotation, tandis que a' et b' sont conjuguées à a et b dans l'antiinvolution donnée

par (O_r) . Les droites c et d peuvent être déterminées en faisant deux fois la rotation d'angle $\frac{1}{2}\varphi$, qui est définie par G, g et les couples as, sb et $a's'$

où s est la bissectrice el de l'angle (\widehat{ab}) et s' est sa droite conjuguée.

A part cette méthode, on peut utiliser la transformation de la rotation el en une rotation eu (fig. 2), en la considérant d'abord comme une translation el sur l'antipolaire g par rapport à (O_r) du centre de rotation G et ensuite transformer la translation el en une translation isomorphe eu sur le cercle eu correspondant. La rotation effectuée, on trouve la position Q d'un point $el P$, en faisant tourner la droite $el GP$ de l'angle $el \varphi$ autour de G ce qui donne la droite $el GQ$. Les deux droites GP et GQ

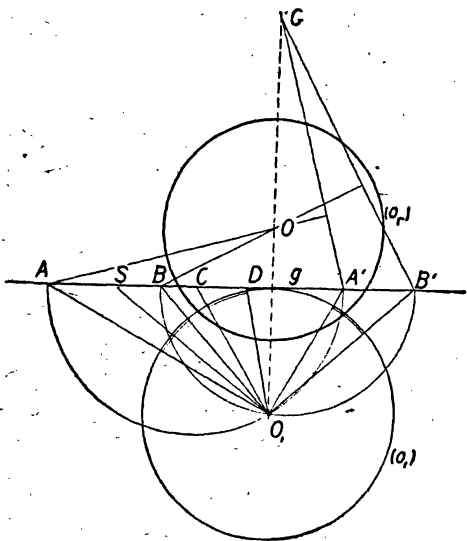


Fig. 2.

sont dans une position perspective, de centre perspectif S' , milieu el de la droite $el AB$, où A et B sont les points de rencontre de GP et GQ avec la droite $el g$.

On joint le point $el P$ avec le point $el S'$ et le point de rencontre de cette droite avec GQ est le point cherché Q .

Tout cela peut nous aider à construire un cercle $el (c)$ défini comme le lieu géométrique de tous les points el se trouvant à la même distance d'un point el fixe. On peut utiliser une autre méthode (fig. 3) si l'on connaît le centre du cercle et un point (ou le rayon). On se sert du fait que le cercle $el (c)$ est la conique, qui passe par A , par rapport à laquelle G et g sont conjugués et pour laquelle l'involution créée par (O_i) sur g coïncide avec l'involution créée par la conique cherchée. On trouve tout de suite sur la droite $a \equiv AG$ son second point de rencontre A' avec la courbe (c) , en utilisant le fait que $[AA'GG']$ forment une division harmonique. On trouve les autres points en joignant A et A' avec les couples correspondants des points conjugués sur g .

L'espace el se réalise en complétant l'espace euclidien par les éléments à l'infini. Les points el , les droites el et les plans el coïncident avec les éléments euclidiens correspondant à leurs éléments à l'infini.

Comme absolu, on prend une sphère imaginaire au rayon unité et au centre donné défini par l'antipolarité créée par la sphère réelle (Ω_r) , au même centre et au rayon égal au module du rayon de la sphère imaginaire (Ω_i) .

On appelle la sphère (Ω_r) le substitut réel de la sphère imaginaire (Ω_i) .

Dans l'espace el tout couple de plans el a une intersection réelle, toute droite et tout plan ont entre eux un point el commun et enfin tout couple de droites el se trouvant dans le même plan el se coupent. La distance entre deux points el et l'angle el entre deux droites el se définit de la même manière que dans le plan el .

Deux plans α et β forment un angle $\omega(\alpha, \beta)$ qui a comme grandeur:

$$\omega(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}i \ln(\alpha, \beta, \varphi_i, \psi_i),$$

où φ_i et ψ_i sont les plans tangents imaginaires à (Ω_i) , menés par la sécante

$$s = \alpha \times \beta.$$

Deux plans el sont el perpendiculaires quand ils sont conjugués par rapport à (Ω_i) , c'est-à-dire quand l'un passe par l'antipôle de l'autre par rapport à (Ω_r) .

Une droite el est el perpendiculaire à un plan el quand elle passe par l'antipôle de ce dernier par rapport à (Ω_r) , c'est-à-dire que tous les plans el perpendiculaires à un plan el se coupent suivant son antipôle par rapport à (Ω_r) .

Les pôles par rapport à (Ω_i) des plans passant par une droite el donnée g , se trouvent sur une droite el g' . Les droites g et g' sont conjuguées dans l'antiinvolution créée par le substitut réel (Ω_r) . Les plans el passant par une droite el sont perpendiculaires à sa conjuguée, c'est-à-dire à la polaire de cette droite.

Toute droite coupant deux droites conjuguées est perpendiculaire à ces deux droites.

Si l'on a une droite el a et un point el A qui n'est situé ni sur elle, ni sur sa droite conjuguée a' ,

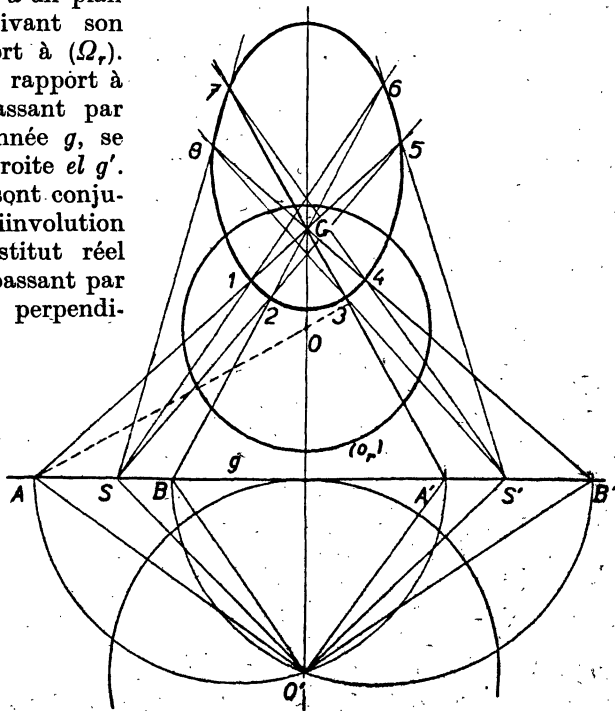


Fig. 3.

alors il existe une droite et une seule passant par A et perpendiculaire à a ; c'est précisément la droite d'intersection des plans aA et $a'A$. Si la droite el g est la perpendiculaire commune aux deux droites concourantes el , alors il en résulte que sa droite conjuguée g' est aussi perpendiculaire à a et à b .

En effet, pour que la droite el a soit perpendiculaire à g , il faut qu'elle coupe g' , mais il faut aussi que b coupe g' . Réciproquement puisque a et b coupent g , ils sont el perpendiculaires à g' .

Si deux droites el gauches possèdent deux perpendiculaires communes de même longueur el , il en résulte que toute perpendiculaire issue d'un point quelconque d'une des droites sur l'autre, sera une el perpendiculaire commune et aura toujours cette même longueur. Si deux droites el gauches ont deux perpendiculaires communes qui ne sont pas polaires entre elles, il en résulte que toute perpendiculaire issue d'un point arbitraire de l'une des droites sur l'autre, sera perpendiculaire el commune et aura aussi la même longueur. Deux droites gauches possédant un nombre infini de perpendiculaires communes de même longueur, s'appellent parallèles de CLIFFORD.

Par un point el donné, on peut tracer deux parallèles de CLIFFORD et deux seulement; on appellera l'une d'elles droite, et l'autre gauche.

Le lieu géométrique des points el se trouvant à la même distance d'une droite el donnée a , distance égale à r ($r < \frac{1}{2}\pi$), s'appelle surface de CLIFFORD, à l'axe a et au rayon r , et se désigne par $C(a, r)$. Il correspond à un cylindre eu .

La surface $C(a, r)$ de CLIFFORD correspond à la surface de CLIFFORD $C(a', \frac{1}{2}\pi - r)$; la droite a' est el conjuguée à la droite el a . Le plan el perpendiculaire à a coupe $C(a, r)$ suivant un cercle el dont le centre est sur a — ce plan s'appelle de première espèce — et le plan el passant par a suivant un cercle el dont le centre est sur a' — il s'appelle de seconde espèce. Par chaque point de la surface de CLIFFORD passent deux parallèles de CLIFFORD par rapport à l'axe a . Ces droites el s'appellent génératrices rectilignes de la surface de CLIFFORD. Deux génératrices rectilignes de la surface de CLIFFORD ou bien se coupent, ou bien sont des parallèles de CLIFFORD.

Tout groupe de trois droites de CLIFFORD, parallèles entre elles, détermine la surface de CLIFFORD dont elles sont les génératrices. La rotation el d'une droite el o dans l'espace el est définie, comme dans le plan el , par la transformation homographique qui conserve (Ω_i) et qui est déterminée par: la droite o prise comme p -axe, c'est-à-dire pour droite double dont tous les points sont doubles; sa droite conjuguée o' par rapport à (Ω_i) , prise comme l -axe, c'est-à-dire pour droite double, telle que tous les plans qui la contiennent sont doubles; les couples de plans $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ comme couples de plans correspondants, donc formant l'angle de rotation; les couples de points: AB ; CD et $A'B'$ comme couples de points correspondants dans la homographie ω_0 , sur o' , où AB , CD sont les traces de O' .

correspondant aux plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, et $A'B'$ correspondent à A, B , dans l'antiinvolution créée par (Ω_r) sur o' . Ici il faut observer qu'on peut trouver les plans $el \gamma, \delta$ en connaissant seulement les plans α, β , en effectuant deux fois de suite la rotation de la moitié de l'angle formé par les plans α et β , rotation el définie par les couples de plans: $\alpha\varepsilon, \varepsilon\beta$ où ε est le plan bissecteur des plans $el \alpha$ et β .

La correspondance qui existe entre les points d'un couple de plans correspondants α et β est une homologie dont l'axe est identique à l'axe de rotation et dont le centre est le pôle E par rapport à (Ω_i) du plan bissecteur des plans α et β . Ce pôle est le point situé sur O' et conjugué harmonique par rapport aux couples $AB, A'B'$ et se trouvant sur les droites AB contenant les points A' et B' .

Or, pour la construction de la méthode projective de Monge dans l'espace el , on choisit pour surface absolue la sphère imaginaire (Ω_i) ayant comme substitut réel la sphère réelle (Ω_r) au centre O et au rayon unité.

Comme plans projectifs on choisit deux plans el perpendiculaires qu'on peut considérer comme étant diamétraux pour (Ω_i) et par conséquent pour (Ω_r) sans limiter de cette façon la généralité de la méthode. Ceci est vrai, parce qu'il existe une égalité el qui transforme deux plans perpendiculaires quelconques en deux plans perpendiculaires, diamétraux pour (Ω_i) . Leur intersection, l'antipolaire de cette intersection et l'antiinvolution créée sur elle par (Ω_i) se transforment respectivement en un diamètre de (Ω_r) , son antipolaire à l'infini et l'antiinvolution absolue créée sur elle par (Ω_i) .

L'antiinvolution créée par (Ω_r) sur une droite à l'infini quelconque coïncide avec l'antiinvolution absolue de la métrique euclidienne. Il s'en suit que les angles el formés par deux plans diamétraux pour (Ω_r) sont égaux aux angles euclidiens correspondantes, c'est-à-dire que deux plans perpendiculaires diamétraux pour (Ω_r) sont de même perpendiculaires au sens euclidien et qu'une rotation el autour du diamètre de (Ω_r) coïncide avec la rotation euclidienne autour de ce même diamètre.

Imaginons qu'un des plans de projection soit placé horizontalement (on le désignera par μ et l'on l'appellera plan horizontal ou 1^{er} plan de projection), l'autre plan ν vertical (on l'appellera plan vertical ou second plan de projection). Le diamètre suivant lequel se coupent les deux plans de projection el sera pris comme axe des x . L'axe des x sépare les deux plans el en deux demi-plans dont on considère l'un comme positif et l'autre comme négatif.

On obtient les deux projections P_1 et P_2 d'un point $el P$, en projetant ce dernier orthogonalement sur les plans de projection μ et ν . Dans ce cas la projection est en même temps elliptique et euclidienne orthogonale, parce que l'antipôle d'un plan diamétral pour (Ω_r) est le point à l'infini du diamètre perpendiculaire.

On appelle les droites P_1P et P_2P droites el projetées. Elles définissent un plan qui est perpendiculaire aussi bien elliptiquement qu'eucli-

diennement à μ et ν . Par conséquent il est perpendiculaire aussi à l'axe des x et coupe ce dernier au point $el P'$. Les points $el P', P_1, P, P_2$ sont les sommets d'un rectangle dont les côtés opposés ne sont pas égaux; $P'P_1 \neq P_2P$ et $P'P_2 \neq P_1P$; en d'autres termes $P'P_1$ et $P'P_2$ ne déterminent pas les rapports du point $el P$ avec les plans projetés $el \mu$ et ν . Pour obtenir les images du point $el P$ seulement sur le premier plan projeté el on effectue seulement une rotation el de ν autour l'axe des x , jusqu'à μ , de telle façon que le demi-plan positif de ν coïncide avec le demi-plan négatif el de μ .

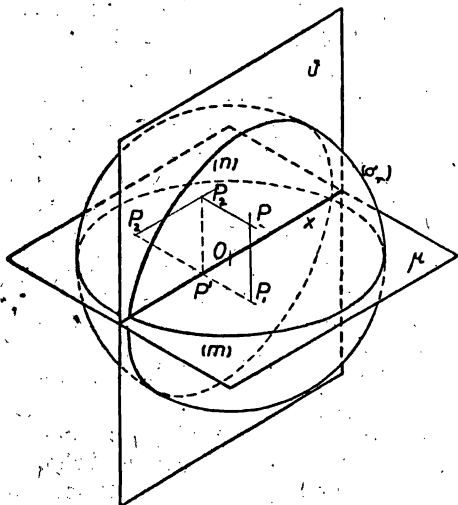


Fig. 4.

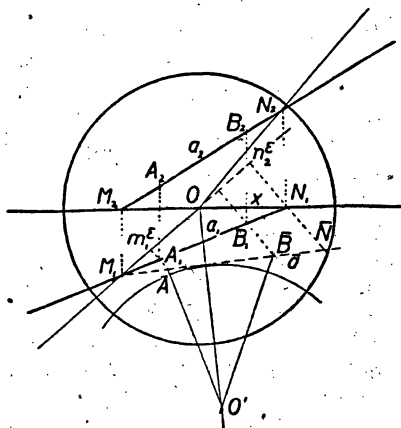


Fig. 5.

Puisque, comme nous avons démontré, la rotation el autour de l'axe des x coïncide avec la rotation euclidienne, la représentation des points du plan el coïncide avec leurs représentations dans le plan euclidien (fig. 4).

Après la superposition de ν avec μ les droites $P'P_1$ et $P'P_2$ se trouveront nécessairement sur une droite qui est perpendiculaire aussi bien dans le sens elliptique qu'euclidien à l'axe des x .

On a alors le résultat suivant. Les projections $el P_1$ et P_2 d'un point $el P$ se trouvent sur une même droite el perpendiculaire à l'axe des x . On appellera cette droite *ordinale*. Inversement si l'on a deux points $el P_1$ et P_2 situés dans μ , qui se trouvent sur une droite perpendiculaire aussi bien dans le sens elliptique qu'euclidien, à l'axe des x ; il en résulte qu'ils sont les images d'un même point. Et alors, par la rotation inverse autour de l'axe des x , on obtient la seconde projection P_2 du point $el P$ sur ν . On trace de P_1 et de P_2 les perpendiculaires à μ et ν . Elles se coupent au point

cherché P , parce qu'elles se trouvent dans le plan P_2P_1P perpendiculaire à l'axe des x . La projection orthogonale el d'une droite el est la droite el suivant laquelle le plan el défini par le pôle du plan projeté el et la droite donnée coupe le plan el . Dans la projection de l'espace el de MONGE, une droite el est définie par ses projections sur les deux plans el de projection.

Un plan el est défini par trois points el , ou deux droites el , ou par un point et une droite el .

D'une manière générale, on considérera un plan comme défini, si l'on connaît les projections des éléments nommés ci-dessus. Cependant, le plus souvent on définira un plan $el \alpha$ par les deux droites el suivant lesquelles il coupe les plans el de projection. Ces droites s'appelleront les traces du plan el et on les désignera par m_1^α et n_2^α . Il faut noter que les traces d'un plan $el \alpha$ se coupent sur l'axe des x . Les problèmes d'incidence de deux éléments de l'espace el dans la méthode projective de MONGE exposée ci-dessus sont identiques à ceux de l'espace euclidien. Pour cette raison, ici, on s'occupera uniquement des problèmes métriques fondamentaux.

A cause de la dualité qui existe entre la mesure des droites el et des angles el on examinera seulement le problème de la construction de la vraie grandeur d'un segment el . Cependant il faut noter que le substitut réel de l'absolu d'un plan est un cercle eu dont le centre est la trace de la perpendiculaire menée du centre O de la surface absolue sur le plan et de rayon $\sqrt{r^2 + a^2}$; r est le rayon de la surface absolue et a est la distance du plan el au centre O .

Ceci dit on obtient la vraie grandeur el d'une droite, en faisant tourner le plan el défini par la droite et le centre O jusqu'à l'un des plans de projection et l'on obtient de cette manière la grandeur cherchée du segment el (fig. 5). Il faut noter que cette rotation est en même temps el et euclidienne parce qu'elle s'effectue autour d'un diamètre de (Ω_r) .

Si l'on veut amener un segment donné el sur une droite el donnée, on agit de la même manière, c'est-à-dire on amène la droite jusqu'au plan de projection, on la superpose avec la droite qui porte AB et ensuite on ramène la droite donnée à sa position initiale.

On a vu qu'une droite est perpendiculaire à un plan dans le cas où elle passe par l'antipôle de ce dernier par rapport à (Ω_r) . Ainsi l'antipôle A d'un plan donné α par rapport à (Ω_r) se projette comme l'antipôle de la trace correspondante du plan par rapport au substitut réel de l'absolu du plan projetée.

La droite projetant l'antipôle A apparaît comme étant l'antipolaire de la trace correspondante, parce qu'elle joint les antipôles correspondants des deux plans el passant par elle, c'est-à-dire les antipôles du plan donné α et du plan de projection.

Alors la droite projetée A coupe le plan projeté à l'antipôle de la trace correspondante par rapport au cercle qui est le substitut réel de l'absolu du plan de projection.

a et b en construisant par les points el A, B, C de la droite el a les plans α, β, γ perpendiculaires el à a , c'est-à-dire $\alpha = Aa'$; $\beta = Ba'$ et $\gamma = Ca'$; et les plans el α', β', γ' , perpendiculaires el à b , c'est-à-dire $\alpha' = Ab'$; $\beta' = Bb'$, $\gamma' = Cb'$, a' et b' sont les antipolaires de a et b par rapport à (Ω_r) .

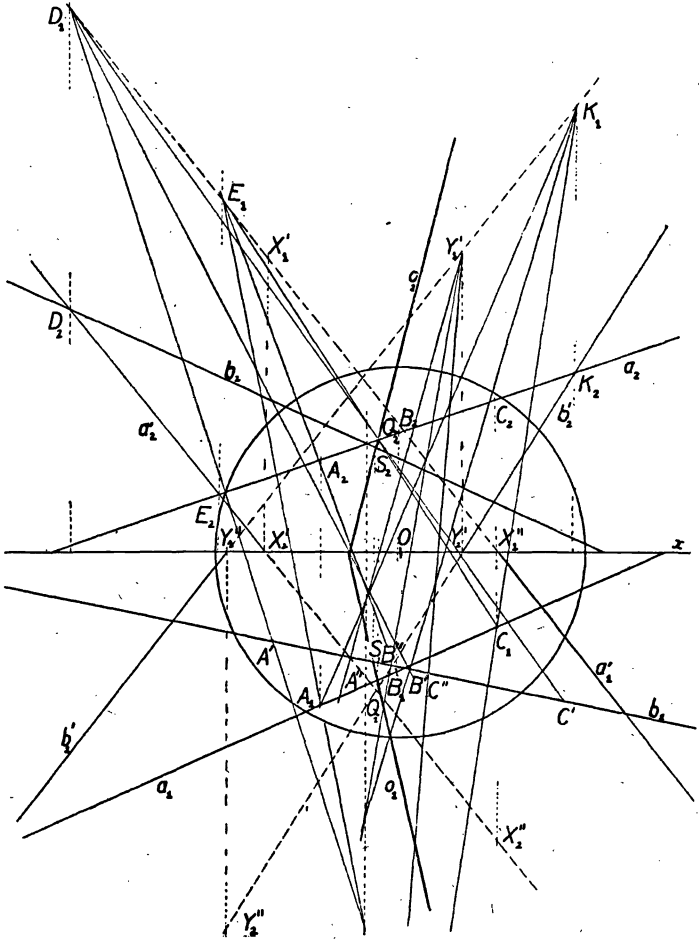


Fig. 8.

Les traces de α, β, γ sur b , c'est-à-dire $a \times b = A'$; $\beta \times b = B'$; $\gamma \times b = C'$ et de $\alpha' \beta' \gamma'$ sur b , c'est-à-dire $\alpha' \times b = A''$; $\beta' \times b = B''$; $\gamma' \times b = C''$, définissent sur la droite b deux suites homographiques $A'B'C' \dots \overline{\wedge} A''B''C'' \dots$. On détermine les éléments doubles S et R de

l'homographie ci-dessus. On trouve les traces Q et P de la droite b' sur les plans Sa' et Ra' . Les droites SQ et PR sont les axes cherchés (fig. 8).

La justification de la construction ci-dessus résulte des remarques suivantes. Les axes cherchés des droites a et b doivent couper aussi leurs antipolaires a' et b' par rapport à (Ω, γ) , c'est-à-dire qu'il faut construire les transversales communes à quatre droites gauches a, b, a', b' . Les trois droites a, a', b' définissent un hyperboloïde à une nappe.

On cherche les intersections de la droite b avec cet hyperboloïde. Les deux génératrices de l'autre système qui passent par ces intersections sont les transversales cherchées aux quatre droites gauches a, b, a', b' . Pour définir les intersections cherchées, on utilise la propriété de l'hyperboloïde qu'un point d'une génératrice quelconque associé à deux génératrices du même système forme un couple de plans qui coupent une droite arbitraire en deux points correspondants d'une homographie dont les éléments doubles représentent les traces cherchées.

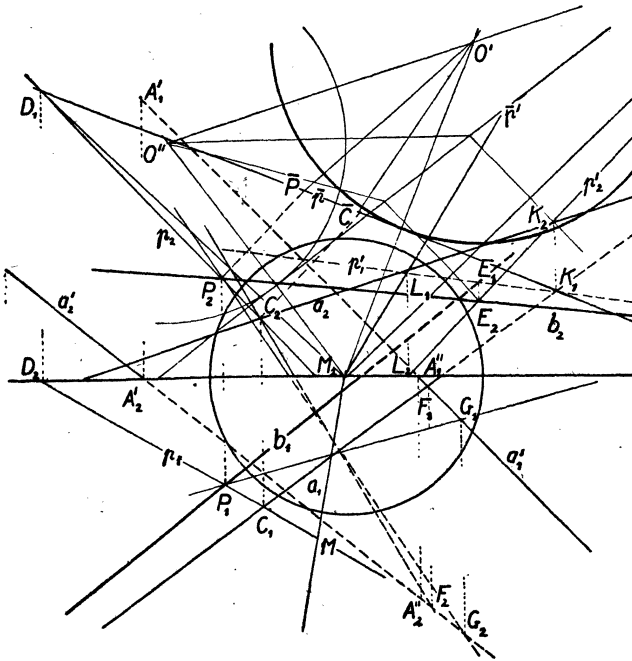


Fig. 9.

On fait cette construction à partir des points de la droite a et des deux droites a', b' et l'on obtient les faisceaux des plans perspectifs $\alpha\beta\gamma \overline{\wedge} \alpha'\beta'\gamma'$. Les deux faisceaux rencontrent la droite b suivant deux ponctuelles homographiques $A'B'C' \overline{\wedge} A''B''C''$. On en construit les élé-

ments doubles R et S . Les droites $Ra' \times Rb' \equiv o$ et $Sa' \times Sb' \equiv t$, sont les droites cherchées.

4. Construire les parallèles de CLIFFORD d'une droite $el a$ par le point $el P$.

On construit la droite $el p$ rencontrant la droite $el a$ à l'angle el droit et passant par le point $el P$. On construit encore l'antipolaire p' de p par rapport à (Ω_r) . La droite $el p'$ coupe la droite $el a$ parce que la droite $el p$, comme étant perpendiculaire à a , coupe aussi a' . Il en résulte que b' coupe aussi a et a' , c'est-à-dire que la droite el non seulement coupe la droite a au point $el K$, mais aussi qu'elle lui est perpendiculaire.

On porte de part et d'autre du point $K = a \times p'$ la distance el du point P à la droite $el a$ et l'on obtient ainsi les points $el E$ et F . Les droites $el AE$ et $el AF$ sont les parallèles de CLIFFORD cherchées (fig. 9).

On peut représenter une surface de CLIFFORD en représentant successivement les deux familles de parallèles de CLIFFORD à l'axe: on commence par représenter les deux parallèles passant par le point donné A , ensuite on choisit un point sur une de ces deux droites et on représente la parallèle de l'autre famille passant par le point choisi.

On représente ici la surface de CLIFFORD d'axe O , perpendiculaire à μ et passant par O (fig. 10). On prend le point A qui définit le rayon de la surface de CLIFFORD, sur le plan tangent à (Ω_r) au point de rencontre avec l'axe O de la surface de CLIFFORD. Alors le cercle sur lequel se coupe la surface de CLIFFORD et le plan passant par A et perpendiculaire à l'axe O , est un cercle euclidien qui a pour centre le point de contact.

Les antipolaires des droites se trouvant dans ce plan et passant par le point de contact seront des droites qui se trouvent dans le plan tangent à l'intersection de l'axe O et de (Ω_r) et dans le plan perpendiculaire à ces droites.

De même, le rayon du cercle suivant lequel cette tangente coupe la surface de CLIFFORD est égal au

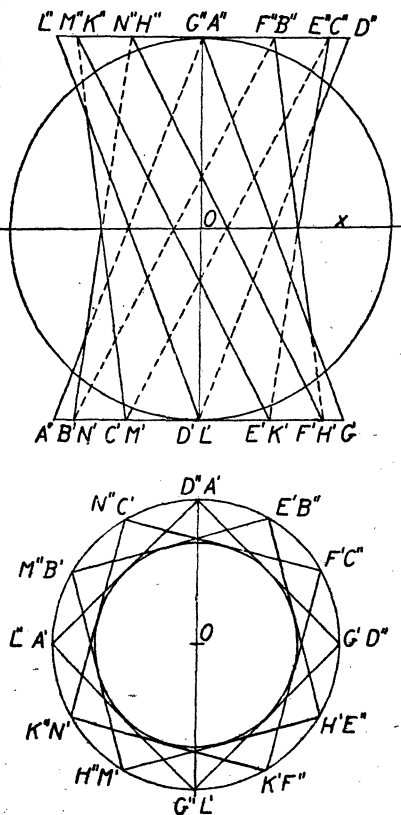


Fig. 10.

rayon du premier cercle. On joint les points correspondants qui donnent les parallèles de CLIFFORD de o et par conséquent les génératrices de la surface. Sur la figure, la première projection de ces deux cercles est placée au-dessous pour faciliter la compréhension. Dans ce cas, la surface de CLIFFORD coïncide avec un hyperboloïde de révolution à une nappe et d'axe o .

Au début de ce travail on a vu qu'une rotation el autour d'un axe donné o est définie, si l'on se donne l'axe et l'angle el de rotation, ce dernier étant défini par un couple de plans formant cet angle.

On examinera encore la rotation el du point el donné A autour d'une droite el donnée o , de l'angle donné φ , défini par les points doubles X et Y , sur la droite o' conjuguée de o par rapport à (Ω_i) .

Pour déterminer l'homographie ω_0 sur la droite o' on trouve le milieu el Z de la droite XY , c'est-à-dire le point conjugué harmonique du couple de points XY et $X'Y'$ qui se trouve sur la droite XY ne contenant pas X' et Y' ; X' et Y' sont conjugués dans l'antiinvolution créée sur o' par le substitut réel (Ω_r) de la surface absolue (Ω_i) .

Alors en effectuant deux fois la transformation homographique définie par les couples XZ, ZY et $X'Z'$ ou par $XZX'V \overline{\wedge} ZYZ'T$ et $XZX'R \overline{\wedge} ZYZ'W$, on définit le couple de points V et W . Les couples de points el $XY, X'Y'$ et VW définissent l'homographie $\omega_0: XX'V \overline{\wedge} YY'W$. Pour effectuer la rotation el du point el A autour de la droite el o de l'angle el donné on détermine la trace A' de la droite el o' sur le plan el $\alpha = Ao$. On construit le point el \bar{A}' correspondant au point el A' dans l'homographie ω_0 , c'est-à-dire qu'on a $XX'VA' \overline{\wedge} YY'W\bar{A}'$. La position \bar{A} du point el A après la rotation, se trouve dans le plan el $\bar{\alpha} = \bar{A}o$. On a vu que la correspondance créée entre les plans el α et el $\bar{\alpha}$ est une homographie dont l'axe est identique à l'axe de rotation O et dont le centre est le pôle U du plan el bissecteur des plans α et $\bar{\alpha}$. Le point el U se trouve au point O' du segment AB qui contient les points A' et B' et qui est l'un des deux points conjugués harmoniques par rapport à AB et $A'B'$ à la fois.

Puis on définit le point U . Le point A est la trace de la droite el AU sur le plan el $\bar{\alpha} = \bar{A}o$. Il faut noter que les points el A et \bar{A} se trouvent dans un plan el ρ , qui passe par o' et qui, par conséquent, est perpendiculaire à o . Alors, on peut obtenir \bar{A} en effectuant la rotation el dans le plan el ρ autour du point el S , intersection de l'axe et du plan ρ . La rotation el dans le plan el ρ est une transformation homographique plane, définie par le point double S , la droite double o' et l'homographie ω_0 , sur o' déterminée par les couples de points homologues $XY, X'Y'$ et VW . En outre, $\bar{A}A$ coupe o' au point U défini ci-dessus. Alors la rotation el du point el A autour de la droite o peut être considérée comme étant une rotation dans le plan ρ , el perpendiculaire à o , que l'on appellera plan el de rotation, autour du point S qui, de son côté, sera le centre el de rotation et la distance SA sera le rayon de la rotation el .

Sur la fig. 11 est représentée la rotation el autour de l'axe o , pris dans la position la plus générale. Dans cette représentation on construit tout d'abord le plan el de rotation ρ . On trouve le centre de la rotation qui est la trace de o sur ρ . On fait tourner le plan de rotation ρ jusqu'à μ , en utilisant l'homologie qui existe dans ce cas entre ρ et μ , et dont le centre est l'antipôle par rapport à (Ω_r) du plan el qui les bissecte. Dans μ on effectue la rotation el autour du centre de rotation S et ensuite on ramène la nouvelle position obtenue après cette rotation dans ρ . Pour obtenir la rotation d'une droite el ou d'un plan el , il suffit d'effectuer la rotation des points el correspondants qui les déterminent.

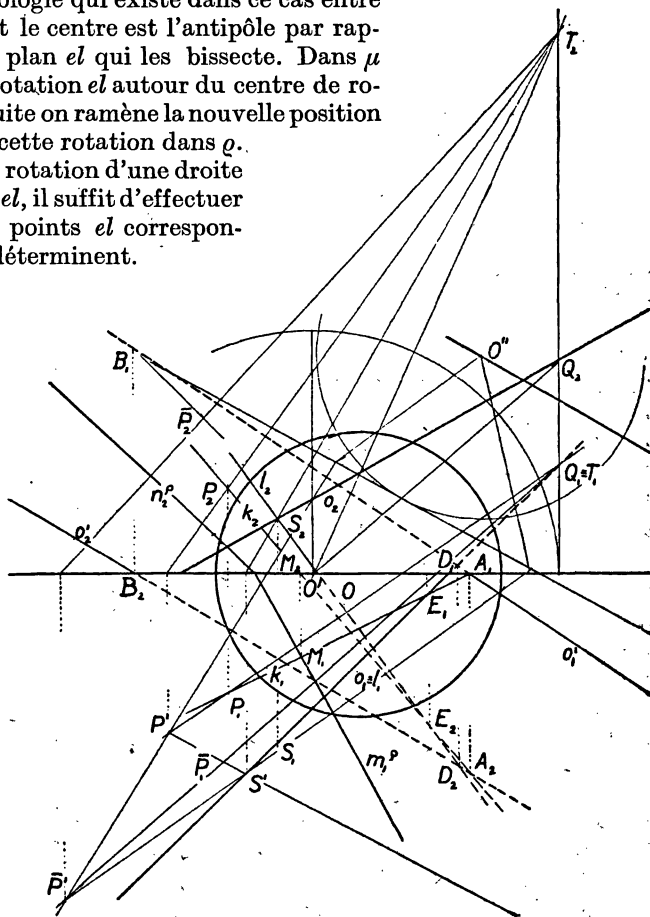


Fig. 11.

Par les constructions faites jusqu'à présent, on a essayé de poser les bases de la méthode projective de MONGE dans le modèle projectif de l'espace elliptique.

BIBLIOGRAPHIE.

1. ВОГОМОЛОВ С. А., Введение в неевклидову геометрию Римана — Москва 1934.
2. ВОЛЬБЕРГ, Начертательная геометрия — Москва 1947.
3. HOFMANN L., Abstrakte Standpunkte in der darstellenden Geometrie mit

- Anwendungen auf die gebräulichen Zweibildersysteme und die Reliefperspektive. Sitz. Ber. Wien **135**, p. 531.
4. HOHENBERG F., Parallelprojektionen in nichteuklidischen Räumen. Mh. f. Math. u. Phys. **42**, p. 425—435.
 5. KRUPPA E., Darstellende Geometrie im Kugelgebüsch, Sitz. Ber., Wien **140**, p. 369—397.
 6. PETROV G., La méthode projective de Monge dans l'espace hyperbolique, Annuaire de l'université de Varna, Bulgarie, t. IV (1948—49).

Mongeova projekce v eliptickém prostoru.

(Obsah předěšlého článku.)

Předmětem článku jsou základy MONGEOVY projekce v eliptickém prostoru pomocí CAYLEY-KLEINOVA modelu.

Za absolutní plochu el. prostoru volíme imaginární kouli (Ω_i), jejímž reálným zástupcem je jednotková koule (Ω_r) se středem v počátku. Za průmětny volíme dvě k sobě kolmé el. roviny procházející počátkem, což není na újmu obecnosti. Antiinvoluce indukovaná koulí (Ω_r) na kterékoli přímce v nekonečnu splývá s absolutní antiinvolucí eukl. geometrie. Tudíž pro-diametrální roviny koule (Ω_r) jsou el. úhly rovny jejich eukl. úhlům. El. průměty P_1 a P_2 libovolného bodu P jsou totožné s eukl. kolmými průměty. Jako obvykle otočíme druhou průmětnu o pravý úhel kolem průsečnice s první průmětnou, abychom dostali oba průměty do jediné nákrasny. Přímka je definována svými dvěma průměty, rovina zpravidla oběma svými stopami.

Incidenční úlohy se v MONGEOVĚ projekci řeší pro el. prostor ovšem stejně jako pro eukl. Proto stačí se zabývatí základními metrickými úlohami. V el. rovině máme dualitu mezi délkami úseček a úhly přímek. Dále je důležité, že reálný zástupce absolutní křivky el. roviny je eukl. kružnice, jejíž střed je v patě kolmice spuštěné z počátku na rovinu a jejíž poloměr je $\sqrt{r^2 + a^2}$; r je poloměr jednotkové koule a a je vzdálenost el. roviny od počátku. Proto skutečná velikost el. úsečky se obdrží, otočíme-li rovinu určenou el. přímkou a počátkem do jedné průmětny. El. přímka je kolmá na el. rovinu, jestliže prochází antipólem této roviny vzhledem k (Ω_r). Proto průmětem antipólu A dané el. roviny α vzhledem k (Ω_r) je antipól příslušné stopy roviny vzhledem k reálnému zástupci absolutní křivky promítané roviny. Průměty el. kolmic k el. rovině α procházejí antipóly příslušné stopy roviny vzhledem k absolutní křivce průmětny.

V článku jsou řešeny tyto základní úlohy: 1. konstrukce skutečné velikosti vzdálenosti el. bodu P od el. roviny α ; 2. konstrukce el. přímky, která prochází daným bodem a protíná danou přímkou pod pravým el. úhlem; 3. konstrukce os dvou el. mimoběžek; 4. konstrukce CLIFFORDOVY rovnoběžky k dané přímce procházející daným bodem; 5. konstrukce CLIFFORDOVY plochy s danou osou procházející daným bodem; 6. konstrukce el. rotace daného bodu kolem dané přímky o daný el. úhel φ .