Miroslav Katětov

О кольцах непрерывных функций и размерности бикомпактов

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 75 (1950), No. 1, 1--16

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122346

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 75 (1950)

# О КОЛЬЦАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ И РАЗМЕРНОСТИ БИКОМПАКТОВ.

МИРОСЛАВ КАТЕТОВ (Прага)

(Поступило в редакцию 29/IX 1949 г.)

Основной результат (см. теоремы 4 и 5) настоящей статьи, являющийся (см. замечание 2 к теореме 5) в некотором смысле обобщением известной теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывной функции полиномами, можно высказать, ограничиваясь менее общим случаем, следующим образом: размерность компакта $P$ равна аналитической размерности кольца $C(P)$ непрерывных функций в $P$. При этом аналитической размерностью топологизированного кольца $C$ называется, грубо говоря, наименьшая мощность множества $M \subset C$ такого, что, исходя из элементов множества $M$, можно при помощи алгебраических операций (включая отыскание корней полинома) и предельного перехода получить все кольцо $C$.

Теорема 4 доказывается в настоящей статье только для бикомпактов. Вопрос о возможности ее распространения (м. б. в видоизмененной форме) на подходящий класс не-бикомпактных пространств остается открытым.

Статья состоит из двух параграфов. Первый содержит, так сказать, чисто топологическую часть основной теоремы; во втором рассматривается кольцо непрерывных функций на бикомпакте.

## § 1.

Обозначения и термины. Буквы $m$, $n$, $p$ обозначают целые числа $\geqq 0$, $P$ — вполне регулярное непустое топологическое пространство, $R$ — непустое метрическое пространство (с метрикой $\varrho$). Если мощность $\mathfrak{m}$ отлична от 0, то $P^{\mathfrak{m}}$ обозначает топологическое произведение $\mathfrak{m}$ экземпляров пространства $P$; $P^0$ обозначает одноточечное пространство. $C(P, R)$ обозначает множество ограниченных непрерывных отображений $P$ в $R$ с метрикой $\varrho(f, g) = \sup_{x \in P} \varrho(f(x), g(x))$.

Пространство действительных чисел обозначим через $E$; вместо $C(P, E)$ пишем $C(P)$; $C(P)$ является одновременно кольцом; мы будем его изучать в § 2.

Система $\mathfrak{A}$ множеств $A \subset P$ называется покрытием пространства $P$, если соединение всех $A \in \mathfrak{A}$ есть $P$. Мы будем иметь дело только с конечными открытыми, т. е. состоящими из открытых множеств, покрытиями (сокращение: к. о. п.). Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — покрытия пространства $P$, и $\mathfrak{B}$ вписано в $\mathfrak{A}$, т. е. любое $B \in \mathfrak{B}$ содержится в некотором $A \in \mathfrak{A}$, то пишем $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$. Если $M \subset P$, $\mathfrak{A}$ есть покрытие $P$ и существуют $M_i \subset P$ такие, что (при $i \neq j$) $M_i M_j = 0$, $\sum_1^p M_i = M$ и каждое $M_i$ содержится в некотором $A \in \mathfrak{A}$, то пишем $\delta(M) < \mathfrak{A}$.

Как обычно, мы называем бикомпактом бикомпактное (т. е. такое, что каждое открытое покрытие содержит конечное покрытие) хаусдорфово пространство, компактом — метризуемый бикомпакт.

Индуктивную размерность (размерность в урысон-менгеровском смысле) пространства $P$ обозначаем через $\dim P$.

Лемма 1. *Если $P$ — бикомпакт и открытое $G \subset P$ содержит пересечение $F$ системы $\mathfrak{M}$ замкнутых множеств, то существует конечная система $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$, пересечение которой содержится в $G$.*

Доказательство. Так как $F \subset G$, то открытые множества $(P - M) + G$, $M \in \mathfrak{M}$, покрывают $P$, и потому, вследствие бикомпактности $P$, для подходящих $M_i \in \mathfrak{M}$ имеем $G + \sum_1^p(P - M_i) = P$, $\prod_1^p M_i \subset G$.

Лемма 2. *Если пространство $P$ нормально, $M \subset P$ замкнуто, $\delta(M) < \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ есть конечное открытое покрытие $P$, то для некоторого открытого $G \supset M$ имеем $\delta(\overline{G}) < \mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть $M = \sum_1^p M_i$, $\overline{M}_i M_j = 0$ (при $i \neq j$), $M_i \subset A_i \in \mathfrak{A}$. Легко установить, что $M_i$ замкнуты; следовательно, существуют открытые $G_i \supset M_i$, $H_i \supset M - M_i$, такие, что $\overline{G}_i \overline{H}_i = 0$, $\overline{G}_i \subset A_i$. Множество $G = \sum_1^p \Gamma_i$, где $\Gamma_i = G_i \Pi_{j \neq i} H_j$, имеет требуемые свойства.

Лемма 3. *Пусть $P$ нормально, $\mathfrak{A}$ есть его конечное открытое покрытие, $M_i \subset P$ ($i = 1, \dots m$) замкнуты, $M_i M_j = 0$ при $i \neq j$, и каждое $M_i$ содержится в некотором $A \in \mathfrak{A}$. Тогда существует такое конечное покрытие $\mathfrak{B}$ пространства $P$, что 1. если $B \in \mathfrak{B}$, $M_i \subset A \in \mathfrak{A}$, $M_i B \neq 0$, то $B \subset A$; 2. если $i \neq j$, $B \in \mathfrak{B}$, $B' \in \mathfrak{B}$; $M_i B \neq 0$, $M_j B' \neq 0$, то $BB' = 0$.*

Доказательство. I. Пусть $m = 2$. Обозначим (при $i = 1, 2$) через $H_i$ перечение всех $A \in \mathfrak{A}$, $A \supset M_i$ и найдем открытое $G_i$ такое, что $M_i \subset G_i \subset \overline{G}_i \subset H_i$. Найдем далее открытые $U_i$,

$V_i$ ($i = 1, 2$) такие, что $M_i \subset U_i \subset \overline{U}_i \subset V_i$, $\overline{V}_1\overline{V}_2 = 0$. Очевидно, $\{H_1, P - \overline{G}_1\}$, $\{H_2, P - \overline{G}_2\}$, $\{V_1, P - \overline{U}_1 - \overline{U}_2, V_2\}$ суть покрытия и любое к. о. п. $\mathfrak{C}$, вписанное в них, имеет требуемые свойства. II. Если $m > 2$, то для каждой пары $M_k$, $M_l$ ($k \neq l$) найдем $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_{kl}$ указанным образом и возьмем к. о. п. $\mathfrak{B}$, вписанное во все $\mathfrak{C}_{kl}$.

Лемма 4. *Если $P$ нормально, $M \subset P$ замкнуто, $\mathfrak{A}$ — конечное открытое покрытие $P$, $\delta(M) < \mathfrak{A}$, то существует конечное открытое покрытие $\mathfrak{B}$ пространства $P$, обладающее следующим свойством: если $S \subset P$, $\delta(S) < \mathfrak{B}$, то $\delta(M + S) < \mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть $M = \sum_1^p M_i$, $\overline{M}_i M_j = 0$ при $i \neq j$, $M_i \subset A_i \in \mathfrak{A}$. Очевидно, $M_i$ замкнуты. Применив лемму 3, получим, как легко установить, покрытие $\mathfrak{B}$ с требуемыми свойствами.

Лемма 5. *Ко всякому конечному открытому покрытию $\mathfrak{A}$ компакта $K$ существует $\alpha > 0$ такое, чро любое $M \subset K$, имеющее диаметр $< \alpha$, содержится в некотором $A \in \mathfrak{A}$.*

Лемма 5 известна: см. напр.*) *1*, гл. I, [8 : 34].

Лемма 6. *Если $\mathfrak{A}$ есть конечное открытое покрытие бикомпакта $P$, $M \subset P$ замкнуто, $f \in C(P, R)$ и $\delta(Mf^{-1}(y)) < \mathfrak{A}$ для любого $y \in R$, то при подходящем $\varepsilon > 0$ существуют открытые $G_i \subset P$ ($i = 1, \ldots p$), обладающие следующими свойствами: (1) $\sum_1^p G_i \supset M$; (2) $\delta(\overline{G}_i) < \mathfrak{A}$; (3) если $g \in C(P, R)$, $\varrho(f, g) < \varepsilon$, то для любого $y \in R$ множество $Bg^{-1}(y)$, где $B = \sum_1^p G_i$, содержится в некотором $G_i$ и, следовательно, $\delta(Bg^{-1}(y)) < \mathfrak{A}$.*

Доказательство. Согласно лемме 2, для любого $y \in R$ существует такое открытое $V \supset Mf^{-1}(y)$, что $\delta(\overline{V}) < \mathfrak{A}$. Так как, очевидно, $Mf^{-1}(y)$ является пересечением всех $\overline{H}f^{-1}(\overline{U})$, где $H$ есть открытая окрестность $M$ в $P$, $U$ есть открытая окрестность $y$ в $R$, то, по лемме 1, для подходящих $H = H(y)$, $U = U(y)$ множество $\overline{H}f^{-1}(\overline{U})$ содержится в $V$ и, следовательно, $\delta(\overline{H}f^{-1}(\overline{U})) < \mathfrak{A}$. Так как $f(P) \subset R$ компактно, то существуют такие $y_i \in R$ ($i = 1, \ldots p$), что $\sum_1^p U(y_i) \supset f(P)$. В силу леммы 5, существует такое $\varepsilon > 0$, что любое $S \subset f(P)$, имеющее диаметр $< 2\varepsilon$, содержится в одном из множеств $U(y_i)$. Из этого следует: если $g \in C$ ($P, R$), $\varrho(f, g) < \varepsilon$, то при любом $y \in R$ множество $g^{-1}(y)$ содержится в подходящем $\Gamma_i = f^{-1}(U(y_i))$. Множества $G_i = \Gamma_i \cdot \prod_1^p H(y_i)$ имеют, как легко установить, указанные в лемме свойства.

---

*) Цифры, выделенные курсивом, означают ссылки на список литературы, приведенный в конце статьи.

Из леммы 6 вытекает

Лемма 7. *Если $\mathfrak{A}$ — конечное открытое покрытие бикомпакта $P$, $M \subset P$ замкнуто, то множество $f \in C(P, R)$ таких, что $\delta(Mf^{-1}(y)) < \mathfrak{A}$ для любого $y \in R$, открыто в $C(P, R)$.*

Определение. Мы говорим, что $M \subset P$ имеет в $P$ *свойство $\Delta(R)$*, если для любого конечного открытого покрытия $\mathfrak{A}$ пространства $P$ и любого $f \in C(P, R)$, $\varepsilon > 0$ существует такое $g \in C(P, R)$, что $\varrho(f, g) < \varepsilon$ и $\delta(Mg^{-1}(y)) < \mathfrak{A}$ для любого $y \in R$.

Очевидно, если $M$ имеет в $P$ свойство $\Delta(R)$, то каждое $M_1 \subset M$ имеет в $P$ свойство $\Delta(R)$. Легко установить, что для бикомпактного $M$ наличие свойства $\Delta(R)$ в $P \supset M$ зависит только от $M$, но не от $P$; однако мы не будем этим пользоваться.

Лемма 8. *Если замкнутые $M_i \subset P$ имеют в бикомпакте $P$ свойство $\Delta(R)$, то $M = \sum_1^p M_i$ также имеет в $P$ свойство $\Delta(R)$.*

Доказательство. Конечно, достаточно ограничится случаем $p = 2$. Пусть даны к. о. п. $\mathfrak{A}$, $f \in C(P, R)$, $\varepsilon > 0$. Существует такое $g \in C(P, R)$, что $\varrho(f, g) < \frac{1}{2}\varepsilon$ и $\delta(M_1 g^{-1}(y)) < \mathfrak{A}$ для любого $y \in R$. В силу леммы 6, при подходящем $\eta$, $0 < \eta < \frac{1}{2}\varepsilon$, существуют такие открытые множества $G_i \subset P$ $(i = 1, \dots n)$, что (1) $\sum_1^n G_i \supset M_1$, (2) $\delta(\overline{G_i}) < \mathfrak{A}$ $(i = 1, \dots n)$, (3) если $h \in C(P, R)$, $\varrho(g, h) < \eta$, $y \in R$, то $M_1 h^{-1}(y)$ содержится в каком-то $G_i$ $(i = 1, \dots n)$. Так как бикомпакт всегда является нормальным пространством, то из леммы 4 вытекает, что существует к. о. п. $\mathfrak{B}$, имеющее следующее свойство: если $S \subset P$, $\delta(S) < \mathfrak{B}$, то $\delta(\overline{G_i} + S) < \mathfrak{A}$ $(i = 1, \dots n)$. Так как $M_2$ имеет свойство $\Delta(R)$, существует такое $h \in C(P, R)$, что (1) $\varrho(g, h) < \eta$ и, следовательно, $\varrho(f, h) < \varepsilon$, (2) $\delta(M_2 h^{-1}(y)) < \mathfrak{B}$ для любого $y \in R$, из чего на основании свойства (3) множеств $G_i$ вытекает $\delta(M_1 h^{-1}(y) + M_2 h^{-1}(y)) < \mathfrak{A}$, т. е. $\delta(Mh^{-1}(y)) < \mathfrak{A}$ для любого $y \in R$. Следовательно, $M$ имеет в $P$ свойство $\Delta(R)$.

Лемма 9. *Пусть $P$ — бикомпакт, $M \subset P$ замкнуто, и каждая точка $x \in M$ имеет произвольно малые окрестности, пересечения границ которых с $M$ имеют в $P$ свойство $\Delta(R)$. Тогда $M$ имеет в $P$ свойство $\Delta(R \times E)$.*

Доказательство. Пусть даны: к. о. п. $\mathfrak{A}$ пространства $P$, $f \in C(P, R \times E)$, $\varepsilon > 0$. Определим $g \in C(P, R)$, $\varphi \in C(P, E)$, полагая для любого $x \in P$ $f(x) = (g(x), \varphi(x))$, и подыщем для каждого $x \in M$ такую открытую окрестность (в $P$) $H = H(x)$, что $\overline{H}$ содержится в каком-то $A \in \mathfrak{A}$, множество $M(\overline{H} - H)$ имеет в $P$ свойство $\Delta(R)$, и $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{1}{6}\varepsilon$ для любого $y \in \overline{H}$. Так как $M$ бикомпактно, существуют такие $x_j \in M$, что, полагая $H_j = H(x_j)$, $\Gamma = \sum_1^p H_j$, имеем $\Gamma \supset M$. Обозначим через $\mathfrak{G}$

систему всех непустых множеств вида $\prod_1^p \Gamma_j$, где при $j = 1, \dots p$ либо $\Gamma_j = H_j$ либо $\Gamma_j = \Gamma - \overline{H}_j$. Легко установить, что (1) $\mathfrak{G}$ состоит из непересекающихся открытых множеств $G_i$ ($i = 1, \dots m$), (2) $\sum_1^m \overline{G}_i = \overline{\Gamma} \supset M$, (3) каждое $\overline{G}_i$ содержится в каком-нибудь $A \in \mathfrak{A}$, (4) как вытекает из леммы 8 и из того, что граница пересечения или соединения конечного числа открытых множеств содержится в соединении границ этих множеств, множество $F = \sum_1^m (M\overline{G}_i - G_i) \subset \sum_1^p (M\overline{H}_j - H_j)$ имеет в $P$ свойство $\Delta(R)$, (5) $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ для любых $x \in G_i$, $y \in \overline{G}_i$ ($i = 1, \dots m$).

Из (4) и леммы 6 вытекает, что существует открытое $U \supset F$ и $h \in C(P, R)$, имеющие то свойство, что $\varrho(g, h) < \frac{1}{2}\varepsilon$ и $\delta(\overline{U}h^{-1}(y)) < \mathfrak{A}$ для любого $y \in R$. Подыскав такое $\sigma \in C(P)$, что $0 \leq \sigma(x) \leq 1$ для каждого $x \in P$, $\sigma(x) = 0$ при $x \in P - U$, $\sigma(x) = 1$ при $x \in F$, и полагая для каждого $x \in P$ $\psi(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\varepsilon\sigma(x)$, $s(x) = (h(x), \psi(x))$, получаем $\psi \in C(P)$, $s \in C(P, R \times E)$, причем расстояние $s$ от $f$ в $C(P, R \times E)$ менее $\varepsilon$.

Пусть теперь $z = (y, t) \in R \times E$. Тогда, при любом данном $i = 1, \dots m$, либо $M\overline{G}_i s^{-1}(z) \subset P - F$ либо $M\overline{G}_i s^{-1}(z) \subset U$, так как в случае $a \in FM\overline{G}_i s^{-1}(z)$, $b \in M\overline{G}_i s^{-1}(z) - U$ мы бы имели $\varphi(a) + \frac{1}{2}\varepsilon = \psi(a) = \psi(b) = \varphi(b)$, что противоречит свойству (5) множеств $G_i$. Следовательно, ввиду того, что $G_i G_j = 0$ при $i \neq j$, множества $M\overline{G}_i s^{-1}(z)$, $M\overline{G}_j s^{-1}(z)$, $i \neq j$, могут пересекаться только в том случае, если они оба содержатся в $U$. Из этого вытекает на основании свойства (3) множеств $G_i$ и ввиду $\delta(\overline{U}h^{-1}(y)) < \mathfrak{A}$, $\delta(\overline{U}s^{-1}(z)) < \mathfrak{A}$, что $\delta(Ms^{-1}(z)) < \mathfrak{A}$, что и доказывает лемму.

Замечание. В самом конце приведенного доказательства мы использовали следующий очевидный факт: *если $K \subset P$, $K = \sum_1^n K_i$, $K_i$ замкнуты в $K$ и непересекаются, $\delta(K_i) < \mathfrak{A}$ ($i = 1, \dots n$), причем $\mathfrak{A}$ — к. о. п. пространства $P$, то $\delta(K) < \mathfrak{A}$.* В нашем случае, $K_i$ ($i = 1, n \dots 1$) суть $M\overline{G}_i s^{-1}(z)$, не содержащиеся в $U$, $K_n$ есть соединение множеств $M\overline{G}_i s^{-1}(z)$, содержащихся в $U$, и, как легко видеть, $K = \sum_1^n K_i = Ms^{-1}(z)$.

Лемма 10. *Для того, чтобы бикомпакт $K \subset P$ имел размерность $\leq 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\delta(K) < \mathfrak{A}$ для любого конечного открытого покрытия $\mathfrak{A}$ пространства $P$.*

Доказательство. Если $\dim K = 0$, то при данном $\mathfrak{A}$ подыщем для каждого $x \in K$ такое множество $G = G(x) \subset K$, что $x \in G$, $G$ и $K - G$ открыты (и одновременно замкнуты) в $K$, $G$ содержится в каком-нибудь $A \in \mathfrak{A}$. Так как $K$ бикомпактно, существуют $x_j \in K$ $(j = 1, \dots p)$ такие, что, полагая $G_j = G(x_j)$, имеем $\sum_1^p G_j = K$. Тогда множества $\prod_1^m \Gamma_j$, где или $\Gamma_j = G_j$, или $\Gamma_j = K - G_j$, замкнуты и попарно не пересекаются, их соединение есть $K$, и каждое из них содержится в каком-нибудь $A \in \mathfrak{A}$. Итак, $\delta(K) < \mathfrak{A}$.

Пусть $\delta(K) < \mathfrak{A}$ для любого к. о. п. $\mathfrak{A}$. Пусть $G \subset K$ открыто в $K$, $x \in G$. Существуют такие открытые в $P$ множества $U$, $V$, что $G = KU$, $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. Тогда $\{U, P - \overline{V}\}$ есть к. о. п. пространства $P$, так что существуют такие $K_i$, что $\sum_1^n K_i = K$, $K_i \overline{K_j} = 0$ при $i \neq j$, каждое $K_i$ содержится или в $U$ или в $P - \overline{V}$. Соединение $H$ всех $K_i$, содержащихся в $U$, открыто и замкнуто в $K$ и содержится в $G$. Итак, $a$ имеет произвольно малые окрестности, граница которых пуста.

Лемма 11. *Любой бикомпакт $P$ размерности $\leq n$ имеет в $P$ свойство $\Delta(E^n)$.*

Доказательство. Если $n = 0$, то утверждение содержится в лемме 10. Если утверждение доказано для $n$, то для $n + 1$ оно вытекает из леммы 9.

Лемма 12. *Бикомпакт $P$ имеет размерность $\leq 0$ тогда и только тогда, когда ни одно связное $S \subset P$ не содержит более одной точки.*

Доказательство. Легко установить, что условие необходимо. Пусть оно выполнено. Возьмем $a \in P$ и обозначим через $S$ пересечение всех тех $M \subset P$, которые одновременно открыты и замкнуты и содержат $a$. Предположим, что $S$ не связно; тогда существуют непустые замкнутые $S_1$, $S_2$ такие, что $a \in S_1$, $S_1 + S_2 = S$, $S_1 S_2 = 0$, и, следовательно, существуют такие открытые $G_1 \supset S_1$, $G_2 \supset S_2$, что $\overline{G_1}\,\overline{G_2} = 0$. Из леммы 1 теперь вытекает: существует такое открытое и замкнутое $M_0 \subset P$, что $a \in M_0 \subset G_1 + G_2$,. Тогда $M_0 G_1$ открыто и замкнуто, $a \in M_0 G_1$, $S - MG_0 \supset S_2 \neq 0$, что противоречит определению $S$. Итак, $S$ связно и, следовательно, $S = (a)$, из чего, на основании леммы 1, следует, что $a$ имеет произвольно малые окрестности с пустой границей.

Определение. Отображение $f$ пространства $P$ в некоторое множество $T$ называется *легким*, если $\dim f^{-1}(y) \leq 0$ для любого $y \in T$.

Лемма 13. *Если $R$ — полное метрическое пространство, то пространство $C(P, R)$ является полным.*

Доказательство: лемма известна (см. напр. *1*, гл. I, (7 : 31)) в случае, если $R$ — компакт. В случае полного $R$ доказательство не изменяется.

Лемма 14. *Если бикомпакт $K$ допускает легкое непрерывное отображение в хаусдорфово пространство счетного веса*[1]) *и имеет в некотором $P \supset K$ свойство $\Delta(R)$, где $R$ — полное метрическое пространство, то $K$ допускает легкое непрерывное отображение в $R$.*

Доказательство. Пусть $\varphi$ — непрерывное легкое отображение пространства $K$ в хаусдорфово пространство счетного веса $Q$. Пространство $T = \varphi(P) \subset Q$ бикомпактно (как непрерывный образ бикомпакта), имеет счетный вес и, следовательно, метризуемо (см. напр. *1*, гл. *b*, (4 : 42)). Выберем определенную метрику в $T$, найдем к. о. п. $\mathfrak{B}_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) пространства $T$, состоящие из (непустых) множеств диаметра $< n^{-1}$, обозначим через $\mathfrak{A}_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) систему множеств $\varphi^{-1}(B)$, $B \in \mathfrak{B}_n$, и подыщем, что, очевидно, возможно, к. о. п. $\mathfrak{A}_n^*$ ($n = 1, 2, \ldots$) пространства $P$ такие, что $\mathfrak{A}_n$ состоит из всех непустых $KA$, где $A \in \mathfrak{A}_n^*$. Обозначим через $D_n$ множество всех $f \in C(P, R)$ таких, что $\delta(Kf^{-1}(y)) < \mathfrak{A}_n^*$ для любого $y \in R$. Согласно лемме 7, $D_n$ открыто; так как $K$ имеет в $P$ свойство $\Delta(R)$, $D_n$ плотно в $C(P, R)$. Так как, согласно лемме 13, $C(P, R)$ полно, то по теореме Бэра[2]) получаем: пересечение $D$ множеств $D_n$ непусто, т. е. существует такое $f \in C(P, R)$, что $\delta(Kf^{-1}(y)) < \mathfrak{A}^*_n$ для любого $y \in R$ и $n = 1, 2, \ldots$

Пусть $S \subset Kf^{-1}(y)$, $S$ непусто и связно. Тогда для любого $n = 1, 2, \ldots$ множество $S$ содержится в каком-то $A \in \mathfrak{A}^*_n$ (это вытекает из $\delta(S) < \mathfrak{A}^*_n$ и связности $S$) и, следовательно, $\varphi(S)$ содержится в каком-то $B \in \mathfrak{B}_n$, из чего следует, что $\varphi(S)$ одноточечно. Итак, $S \subset \varphi^{-1}(y)$ для подходящего $y \in T$ и потому, в силу леммы 12, $S$ одноточечно. Мы доказали, что всякое непустое связное $S \subset Kf^{-1}(y)$ одноточечно. Из леммы 12 теперь вытекает, что $\dim Kf^{-1}(y) \leqq 0$. Следовательно, $f$ является легким отображением.

Лемма 15. *Если бикомпакт $P$ допускает легкое непрерывное отображение $\varphi$ на бикомпакт $Q$ размерности $\leqq n$, то $\dim P \leqq n$.*

Доказательство. Если $n = 0$, то из леммы 12 вытекает: если $S \subset P$ связно, $S \neq 0$, то $\varphi(S)$ связно, следовательно, $\varphi(S) = (y)$, $S \subset \varphi^{-1}(y)$, $S$ одноточечно; следовательно, $\dim P \leqq 0$. Пусть $n = m + 1$ и лемма доказана для $m$. Пусть $G \subset P$ открыто, $a \in G$. Множество $A = \varphi^{-1}(\varphi(a))$ имеет размерность 0, так что существуют такие открытые $U$, $V$, что $a \in U \subset G$,

[1]) Весом пространства $P$ называется наименьшая мощность его открытой базы, т. е. системы $\mathfrak{B}$ открытых множеств такой, что для любого открытого $G \subset P$ и любого $x \in G$ существует такое $B \in \mathfrak{B}$, что $a \in B \subset P$.

[2]) Теорема Бэра утверждает: пересечение счетного числа открытых плотных подмножеств полного метрического пространства $R$ плотно в $R$.

$A \subset U + V$, $\overline{U}\overline{V} = 0$. Так как $A$ есть пересечение множеств $\varphi^{-1}(\overline{H})$, где $H$ — окрестность точки $\varphi(a)$ в $Q$, то, как легко установить, исходя из леммы 1, существует такая открытая окрестность $H_0$ точки $\varphi(a)$, что $\varphi^{-1}(\overline{H_0}) \subset U + V^1$ и $\dim(\overline{H}_0 - H_0) \leqq m$. По индукционному предположению, $\dim\varphi^{-1}(\overline{H}_0 - H_0) \leqq m$; очевидно, $a \in U\varphi^{-1}(H_0) \supset G$; легко установить, что граница множества $U\varphi^{-1}(H_0)$ содержится в $\varphi^{-1}(\overline{H}_0 - H_0)$ и, следовательно,[3]) имеет размерность $\leqq m$. Итак, $a$ имеет произвольно малые окрестности, размерность границ которых не превышает $m$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{m}$ — *наименьшая мощность такая, что (непустой) бикомпакт* $P$ *допускает непрерывное легкое отображение в* $E^{\mathfrak{m}}$. *Если* $\mathfrak{m} < \aleph_0$, *то* $\dim P = \mathfrak{m}$, *если* $\mathfrak{m} = \aleph_0$, *то размерность* $P$ *бесконечна.*

Доказательство. Если $\mathfrak{m} \leqq \aleph_0$, $\dim P = n$, то из лемм 11 и 14 вытекает $\mathfrak{m} \leqq n$. Из леммы 15 (и из того, что $\dim Q \leqq n$ для любого $Q \subset E^n$) вытекает, что $\dim P \leqq \mathfrak{m}$, если $\mathfrak{m} < \aleph_0$.

Замечание. В случае $\mathfrak{m} < \aleph_0$ о размерности $P$ нельзя сказать ничего определенного (кроме того, что она $> 0$), как показывает пример пространства $T^n$, где $T$ — упорядоченное (словарно) пространство пар $(\xi, t)$, где $\xi$ — порядковое число $\leqq \omega_1$ ($\omega_1$ = первое несчетное порядковое число), $0 \leqq t < 1$, и $t = 0$ при $\xi = \omega_1$.

## § 2.

Переходим теперь к кольцам непрерывных функций, причем определения выскажем для более общего случая.

Определения. Пусть $C$ — коммутативное кольцо с единицей, в котором для любых $\lambda \in E$, $x \in C$ определено произведение $\lambda x \in C$, удовлетворяющее обычным аксиомам.

Если $C$ одновременно является топологическим пространством, причем операции $x + y$, $xy$, $\lambda x$ непрерывны, назовем $C$ (*комутативным действительным*) *аналитическим кольцом*. Пример аналитического кольца: $C(P)$ с очевидным определением операций. Подкольцо $C_1 \subset C$ назовем *алгебраически замкнутым*, если $C_1$ содержит единицу кольца $C$, с $x$ содержит $\lambda x$, $\lambda \in E$, и с $a_i$ $(i = 1, \ldots n)$ содержит каждое $x \in C$ такое, что $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$. Если $C_1$ алгебраически замкнуто и $\overline{C_1} = C_1$, назовем $C_1$ *аналитически замкнутым* подкольцом. Если $M \subset C$ и $C$ является единственным аналитическим замкнутым подколь-

---

[3]) Как вытекает из следующей известной и легко доказываемой теоремы: если $F$ и $F_1 \subset F$ — бикомпакты, $\dim F \leqq n$, то $\dim F_1 \leqq \dim F$.

цом, содержащим $M$, назовем $M$ *аналитической базой* кольца $C$. Наименьшую мощность аналитической базы кольца $C$ обозначим через $\dim C$ и назовем *аналитической размерностью*[4]) кольца $C$.

Следующая давно известная лемма является непосредственным обобщением теоремы Вейерштрасса. См. напр. *2*, Theorem 3, а также *3*, стр. 135.

Лемма 16. *Для любой непрерывной функции на компакте $K \subset E^n$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такой полином (с действительными коэффициентами) $Q(x_1, \dots x_n)$, что $|f(x_1, \dots x_n) - Q(x_1, \dots x_n)| < \varepsilon$ для любого $(x_1, \dots x_n) \in K$.*

Теорема 2. *Пусть $P$ — непустой бикомпакт, $C_1$ — подкольцо кольца $C(P)$, содержащее все постоянные. Тогда $\overline{C}_1$ состоит из тех $x \in C(P)$, которые обладают следующим свойством: если $t_1 \in P$, $t_2 \in P$ и $y(t_1) = y(t_2)$ для любого $y \in C_1$, то $x(t_1) = x(t_2)$.*

Замечание. Это — несколько обобщенная известная теорема Стона (см. *4*, Theorem 82, а также *3*, Theorem 4, *5*, Corollary 2). Приведенное здесь доказательство отличается от доказательства Стона.

Доказательство. Очевидно, всякое $x \in \overline{C}_1$ обладает указанным свойством. Пусть $x \in C(P)$ имеет это свойство; докажем, что $x \in \overline{C}_1$. Пусть $\varepsilon > 0$. Мы утверждаем: существуют такие $x_i \in C_1$ $(i = 1, \dots n)$, что $|x(t) - x(t')| < \varepsilon$, если только $x_i(t) = x_i(t')$ $(i = 1, \dots n)$. Это вытекает из того, что пересечение всех $M_y$, где $M_y$ обозначает (при $y \in C_1$) множество таких $(t, t') \in P \times P$, что $|x(t) - x(t')| \geqq \varepsilon$, $y(t) = y(t')$, пусто, а множества $M_y$ замкнуты в $P \times P$, так что, в силу бикомпактности $P \times P$, уже пересечение конечного числа подходящих $M_y$ пусто.

Полагая для каждого $t \in P$ $\varphi(t) = (x_1(t), \dots x_n(t)) \in E^n$, так что $\varphi \in C(P, E^n)$, и, полагая далее для каждого $\alpha \in H = \varphi(P)$ $G(\alpha) = \sup x(\varphi^{-1}(\alpha))$, $g(\alpha) = \inf x(\varphi^{-1}(\alpha))$, мы получаем, как легко установить, используя бикомпактность $P$, полунепрерывную сверху функцию $G$ и полунепрерывную снизу функцию $g$ в $H$. Очевидно, $|G(\alpha) - g(\alpha)| \leqq \varepsilon$, т. е. $G(\alpha) \leqq g(\alpha) + \varepsilon$, для любого $\alpha \in H$.

По известной теореме (см. напр. *5*, 36.2.6), из этого следует существование такой непрерывной функции $f$ в $H$, что $G(\alpha) \leqq f(\alpha) \leqq g(\alpha) + \varepsilon$ для любого $\alpha \in H$. Полагая $F(t) = f(\varphi(t))$ для каждого $t \in P$, получаем $|x(t) - F(t)| \leqq \varepsilon$ для любого $t \in P$. Так как $H \subset E_n$, очевидно, является компактом, то (в силу

[4]) Итак, символ dim имеет два различные значения, но там, где мы его употребляем, всегда ясно, которое из них имеется в виду.

леммы 15) существует такой полином $Q(\zeta_1, \dots \zeta_n)$, что $|f(\zeta_1, \dots \dots \zeta_n) - Q(\zeta_1, \dots \zeta_n)| < \varepsilon$ для любого $(\zeta_1, \dots \zeta_n) \in H$. Полагая $y(t) = Q(x_1(t), \dots x_n(t))$ для каждого $t \in P$, имеем $|x(t) - y(t)| < 2\varepsilon$ (для любого $t \in P$) и $y \in C_1$, так как $y = Q(x_1, \dots x_n)$, $x_i \in C$. Следовательно, так как $\varepsilon$ было произвольным, $x \in \overline{C}_1$.

Лемма 17. *Если $S \subset P$ связно, то кольцо $C_1$ функций $x \in C(P)$ таких, что $x(t_1) = x(t_2)$ для любых $t_1 \in S$, $t_2 \in S$, является аналитически замкнутым.*

Доказательство. Очевидно $\overline{C_1} = C_1$. Пусть $a_i \in C_1$, $x \in C(P)$, $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$. Выберем $t_0 \in S$ и положим $\alpha_i = a_i(t_0)$. Очевидно, $x(S)$ связно и содержится в множестве действительных корней полинома $\xi^n + \alpha_1 \xi^{n-1} + \dots + \alpha_n$, т. е. одноточечно, так что $x \in C_1$.

Лемма 18. *Если $P$ — бикомпакт, $C_1$ — алгебраически замкнутое подкольцо кольца $C(P)$, то для любого $t_0 \in P$ множество $t \in P$ таких, что $x(t) = x(t_0)$ для всякого $x \in C_1$, является связным.*

Доказательство. Пусть $t_0 \in P$. Обозначив через $A$ указанное в лемме множество, предположим, что $A$ не связно. Пусть $A = A_1 + A_2$, $A_1$, $A_2$ замкнуты и непусты, $A_1 A_2 = 0$. Существуют открытые $H_i \supset A_i$ такие, что $\overline{H}_1 \overline{H}_2 = 0$. Обозначим (для $x \in C_1$ таких, что $x(t_0) = 0$) через $A(x)$ множество всех $t \in P$ таких, что $x(t) = 0$; тогда, очевидно, $A$ есть пересечение множеств $A(x)$, так что, согласно лемме 1, существуют такие $a_i \in C_1$ $(i = 1, \dots m)$, что $a_i(t_0) = 0$ и пересечение множеств $A(a_i)$ содержится в $H = H_1 + H_2$. Следовательно, $A \subset a^{-1}(0) \subset \subset H$, где $a = \sum_1^m a_i^2 \in C_1$. Легко установить, используя лемму 1, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ замыкание множества $G$ всех $t \in H_1$ таких, что $|a(t)| < \varepsilon$, содержится в $H_1$. Полагая $b = e - \varepsilon^{-1} a$, где $e$ означает единицу кольца $C(P)$, и полагая далее $z(t) = b(t)$, если $t \in G$, $z(t) = -b(t)$, если $t \in P - G$, получаем $b \in C_1$, $z \in C(P)$, $z^2 - b^2 = 0$ и, следовательно, $z \in C_1$. Далее получаем $z(t_0) = 1$ (так как $t_0 \in G$), но одновременно, $z(t) = -1$, если $t \in A_2 \subset A$. Таким образом, мы приходим к противоречию; следовательно, $A$ связно.

Лемма 19. *Если $P$ — непустой бикомпакт, то для того, чтобы $M \subset C(P)$ было аналитической базой кольца $C(P)$, необходимо и достаточно, чтобы каждое непустое связное $S \subset P$ такое, что $x(t_1) = x(t_2)$ для любых $x \in M$, $t_1 \in S$, $t_2 \in S$ было одноточечным.*

Доказательство. I. Если связное $S \subset P$ содержит более одной точки, но все $x(S)$, где $x \in M$, одноточечны, то, в силу леммы 17, кольцо $z \in C(P)$ таких, что $z(S)$ одноточечно, аналитически замкнуто, содержит $M$ и отлично от $C(P)$. Из этого следует необходимость условия. II. Пусть условие выполняется и пусть $M \subset C_1 \subset C(P)$, $C_1$ — аналитически замкнутое подкольцо. Тогда из леммы 18 вытекает: если $t_1 \in P$, $t_2 \in P$, $x(t_1) = x(t_2)$ для любого $x \in C_1$, то $t_1 = t_2$. Следовательно, в силу теоремы 2, $\overline{C_1} = C(P)$, т. е. $C_1 = C(P)$, так что $M$ — аналитическая база.

Теорема 3. *Если $P$ — непустой бикомпакт, то аналитическая размерность кольца $C(P)$ равна наименьшему $\mathfrak{m}$ такому, что $P$ допускает легкое непрерывное отображение в $E^{\mathfrak{m}}$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{m} = 0$, то $\dim P = 0$, так что, согласно лемме 12, всякое непустое связное $S \subset P$ одноточечно, и потому, в силу леммы 19, пустое множество является аналитической базой кольца $C(P)$, $\dim C(P) = 0$. Если $\mathfrak{m} > 0$ и $\varphi$ — легкое непрерывное отображение $P$ в $E^{\mathfrak{m}}$ то, ставя в соответствие каждому $t \in P$ определенную „координату" точки $\varphi(t) \in E^{\mathfrak{m}}$, получаем всякий раз действительную непрерывную функцию в $P$. Множество $M \subset C(P)$ этих функций имеет мощность $\leq \mathfrak{m}$ и является, как вытекает из лемм 19 и 12, аналитической базой кольца $C(P)$, так что $\dim C(P) \leq \mathfrak{m}$.

Если $\dim C(P) = 0$, то, в силу лемм 19 и 12, $\dim P = 0$, так что $\mathfrak{m} = 0$. Пусть $M$ — непустая аналитическая база кольца $C(P)$. При любом $t \in P$ обозначим через $\varphi(t)$ точку пространства $E^{M}$ с координатами $(\varphi(t))_x = x(t)$. Легко установить, что отображение $\varphi$ пространства $P$ в $E^{M}$ непрерывно. Из лемм 19 и 12 вытекает, что $\varphi$ — легкое отображение, следовательно, $\mathfrak{m} \leq \dim C(P)$.

Итак, теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть $P$ — непустой бикомпакт. Если $\dim P < \aleph_0$, то $\dim P = \dim C(P)$; если $\dim C(P) = \aleph_0$, то размерность $P$ бесконечна.*

Доказательство: вытекает из теоремы 1 и 3.

Замечание. В случае $\dim C(P) > \aleph_0$ о размерности $P$ нельзя сказать — кроме того, что она $> 0$ — ничего определенного (см. замечание к теореме 1).

Теорема 5. *Если $P$ — непустой компакт, то размерность $P$ и аналитическая размерность $C(P)$ или конечны и равны, или обе бесконечны.*

Доказательство: вытекает из теоремы 3, как так компакт имеет счетный вес и, следовательно, допускает не только легкое, но даже гомеоморфное отображение в $E^{\aleph_0}$.

Замечание. Из теоремы 5 (и предшествующих лемм) можно вывести, например, следующее утверждение, которое мы, однако не будем здесь доказывать (и потому также не уточняем употребленный в нем термин „алгебраическая функция"): если компакт $P$ имеет размерность 1, то существует такая непрерывная действительная функция $g$ в $P$, что любая непрерывная функция в $P$ является пределом равномерно сходящейся последовательности алгебраических функций от $g$. Это, очевидно, — обобщение теоремы Вейерштрасса.

## ЛИТЕРАТУРА.


1. П. С. Александров, Комбинаторная топология.
2. N. Dunford and I. Segal: Semigroups of operators and the Weierstrass theorem, Bull. Amer. Math. Soc. *52* (1946), 911—914.
3. C. de la Vallée Poussin: Cours d'Analyse infinitésimale, t. II, ème éd. (1912).
4. M. H. Stone: Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc. *41* (1937), 375—481.
5. E. Hewitt: Certain generalizations of the Weierstrass approximation theorem, Duke Math. J. *14* (1947), 419—427.
6. H. Hahn: Reelle Funktionen I (1932).


# On rings of continuous functions and the dimension of compact spaces

(Abstract of the preceding article.)

## Notation and definitions.

$P$ denotes a (non-void) completely regular topological space; $R$ denotes a (non-void) metric space. $P^{\mathfrak{m}}$ has, for a cardinal $\mathfrak{m} > 0$, the customary meaning; $P^0$ denotes a space containing exactly one point. $C(P, R)$ denotes the metric space of all bounded mappings (mapping = = continuous transformation) of $P$ into $R$ with the metric $\varrho(f, g) = = \sup_{x \epsilon P} \varrho(f(x), g(x))$ . $E$ denotes the space of real numbers; instead of $C(P, E)$, $C(P)$ is written. The inductive (Menger-Urysohn) dimension of $P$ is denoted by $\dim P$ (the same notation is used for the analytical dimension of a ring, see below). A mapping $f$ of $P$ into a space $Q$ is called light if $\dim f^{-1}(y) \leqq 0$, for any $y \epsilon Q$.

If $M \subset P$, $\mathfrak{A}$ is a finite open covering (abbreviated f. o. c.) of $P$ and there exist $M_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ such that $\Sigma_1^p M_i = M$, $\overline{M_i M_j} = \emptyset$, for $i \neq j$, and every $M_i$ is contained in some $A \epsilon \mathfrak{A}$, then we write $\delta(M) < \mathfrak{A}$. If $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ are f. o. coverings of $P$ and every $B \epsilon \mathfrak{B}$ is contained in some $A \epsilon \mathfrak{A}$, we write $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$.

Let $C$ be a commutative ring with a unit $e$ and with (real) scalar multiplication (i. e. $\lambda x \epsilon C$ is defined, for any $\lambda \epsilon E$, $x \epsilon C$, and satisfies well known axioms). Let $C$ be, simultaneously, a topological space such that the operations $x + y$, $xy$, $\lambda x$ are continuous. Then $C$ will be called a (*real commutative*) *analytical ring*. Clearly, $C(P)$, with the obvious definition of addition and multiplication, is an analytical ring. A subring

$C_1 \subset C$ is called *algebraically closed* if (1) $\lambda e \in C_1$, for any $\lambda \in E$, (2) $x \in C_1$ whenever $x \in C$, $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, $a_i \in C_1$; if, moreover, $\overline{C_1} = C_1$, then $C_1$ is said to be analytically closed. $M \subset C$ is said to be an analytical base of $C$ if there exists no analytically closed subring $C_1 \neq C$ containing $M$. The least cardinal number of an analytical base is called the analytical dimension of $C$ and denoted by $\dim C$.

## Main results.

Theorem 1. *Let $P$ be a (non-void) compact*[5]) *space and let $\mathfrak{m}$ be the least cardinal such that $P$ admits of a light mapping into $E^{\mathfrak{m}}$. If $\mathfrak{m} < \aleph_0$, then* $\dim P = \mathfrak{m}$; *if $\mathfrak{m} = \aleph_0$, then $P$ is infinite-dimensional.*

Remark. If $\mathfrak{m} > \aleph_0$, then $P$ may possess arbitrary dimension (except $\dim P = 0$).

Theorem 2. *Let $P$ be (non-void) compact and let $C_1 \subset C(P)$ be a subring containing all constants. Then $\overline{C_1}$ consists of all $x \in C(P)$ such that $x(t_1) = x(t_2)$ whenever $t_1 \in P$, $t_2 \in P$ and, for any $y \in C_1$, $y(t_1) = y(t_2)$.*

Theorem 3. *If $P$ is a (non-void) compact space, then* $\dim C(P)$ *is equal to the least $\mathfrak{m}$ such that $P$ admits of a light mapping into $E^{\mathfrak{m}}$.*

Theorem 4. *Let $P$ be (non-void) compact. If* $\dim C(P) < \aleph_0$, *then* $\dim P = \dim C(P)$; *if* $\dim C(P) = \aleph_0$, *then $P$ is infinite- dimensional.*

Theorem 5. *If $P$ is (non-void) compact metrizabte, then either* $\dim P$ *and* $\dim C(P)$ *are equal and finite, or they are both infinite.*

Theorem 1 is implied by Lemmas 11, 14, and 15. Theorem 2 is, essentially, the well known Stone-Weierstrass theorem (*4*, Theorem 82; cf. *3*, Theorem 3, and *5*, Corollary 2) in a slightly generalized form. Theorem 3 follows from Lemma 19 which is a consequence of Lemmas 17 and 18 and Theorem 2. Theorems 1 and 3 imply Theorem 4 which contains Theorem 5 as a special case.

## Lemmas and proofs.

In this summary, we indicate all lemmas; known or easy proofs are omitted.

Lemma 1. *Let $P$ be compact. If an open set $G \subset P$ contains the intersection of a family $\mathfrak{M}$ of closed sets, then it contains the intersection of a finite $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$.*

Lemma 2. *If $P$ is normal, $M \subset P$ is closed, $\delta(M) < \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ being a f. o. c. of $P$, then $\delta(\overline{G}) < \mathfrak{A}$ for some open $G \supset M$.*

Lemma 3. *If $\mathfrak{A}$ is a f. o. c. of a normal $P$, $M_i \subset P$ $(i = 1, \ldots, p)$ are disjoint closed sets, and every $M_i$ is contained in some $A \in \mathfrak{A}$, then there*

[5]) We call a space compact (= bicompact) if every open covering contains a f. o. c.

*exists a f. o. c.* $\mathfrak{B}$ *such that* (1) $B \subset A$ *whenever* $B \in \mathfrak{B}$, $BM_i \neq 0$, $M_i \subset A \in \mathfrak{A}$, (2) $BB' = 0$ *whenever* $B \in \mathfrak{B}$, $B' \in \mathfrak{B}$, $M_iB \neq 0$, $M_jB' \neq 0$, $i \neq j$.

Lemma 3 implies:

Lemma 4. *If* $\mathfrak{A}$ *is a f. o. c. of a normal* $P$, $M \subset P$ *is closed,* $\delta(M) < \mathfrak{A}$, *then, for some f. o. c.* $\mathfrak{B}$ *of* $P$, *we have* $\delta(M + S) < \mathfrak{A}$ *whenever* $S \subset P$, $\delta(S) < \mathfrak{B}$.

Lemma 5. *There exists, for any f. o. c.* $\mathfrak{A}$ *of a compact metric space* $K$, *a real number* $\alpha > 0$ *such that every set* $M \subset K$ *of diameter* $< \alpha$ *is contained in some* $A \in \mathfrak{A}$.

Lemma 6. *If* $\mathfrak{A}$ *is a f. o. c. of a compact* $P$, $M \subset P$ *is closed,* $f \in C(P, R)$, *and, for any* $y \in R$, $\delta(Mf^{-1}(y)) < \mathfrak{A}$, *then there exist, for some* $\varepsilon > 0$, *open sets* $G_i \subset P$ $(i = 1, \ldots, p)$ *such that* (1) $\Sigma_1^p G_i \supset M$; (2) $\delta(\overline{G_i}) < \mathfrak{A}$; (3) *if* $g \in C(P, R)$, $\varrho(f, g) < \varepsilon$, $y \in R$, *then* $Bg^{-1}(y)$, *where* $B = \Sigma_1^p \overline{G_i}$, *is contained in some* $G_i$ *(and, therefore,* $\delta(Bg^{-1}(y)) < \mathfrak{A}$).

Proof. There exist, by Lemmas 1 and 2, for any $y \in R$, an open set $H = H(y) \subset P$ and an open set $U = U(y) \subset R$ such that $M \subset H$, $y \in U$, $\delta(\overline{H}f^{-1}(U)) < \mathfrak{A}$. For appropriate $y_i$, we have $\Sigma_1^p U(y_i) \supset f(P)$. By Lemma 5, there exists $\varepsilon > 0$ such that every set $S \subset f(P)$ of diameter $< 2\varepsilon$ is contained in some $U(y_i)$. Hence, for any $g \in C(P, R)$ such that $\varrho(f, g) < \varepsilon$, every $g^{-1}(y)$ is contained in some $\Gamma_i = f^{-1}(y_i)$. The sets $G_i = \Gamma_i \Pi_1^p H(y_i)$ possess properties indicated in the lemma.

Lemma 6 implies:

Lemma 7. *If* $\mathfrak{A}$ *is a f. o. c. of a compact* $P$, $M \subset P$ *is closed, then the set of all* $f \in C(P, R)$ *such that, for any* $y \in R$, $\delta(Mf^{-1}(y)) < \mathfrak{A}$ *is open in* $C(P, R)$.

Definition. A set $M \subset P$ is said to have property $\Delta(R)$ in $P$ if, for any f. o. c. $\mathfrak{A}$ of $P$, any $f \in C(P, R)$ and $\varepsilon > 0$, there exists $g \in C(P, R)$ such that $\varrho(f, g) < \varepsilon$ and, for any $y \in R$, $\delta(Mg^{-1}(y)) < \mathfrak{A}$.

Lemma 8. *If* $P$ *is compact,* $M_i \subset P$ *are closed and have property* $\Delta(R)$ *in* $P$, *then* $M = \Sigma_1^p M_i$ *has property* $\Delta(R)$ *in* $P$ *as well.*

Proof. Let $p = 2$. Let $\mathfrak{A}$ be a f. o. c. of $P$, $f \in C(P, R)$, $\varepsilon > 0$. Let $g \in C(P, R)$ be such that $\varrho(f, g) < \frac{1}{2}\varepsilon$ and $\delta(M_1g^{-1}(y)) < \mathfrak{A}$, for any $y \in R$. By Lemma 6, there exist, for some $\eta$, $0 < \eta < \frac{1}{2}\varepsilon$, open sets $G_i \subset P$ $(i = 1, \ldots, n)$ such that (1) $\Sigma_1^n G_i \supset M_1$, (2) $\delta(\overline{G_i}) < \mathfrak{A}$, (3) if $h \in C(P, R)$, $\varrho(g, h) < \eta$, $y \in R$, then $M_1h^{-1}(y) \supset G_i$, for some $i$. Lemma 4 implies that there exists a f. o. c. $\mathfrak{B}$ such that $\delta(\overline{G_i} + S) < \mathfrak{A}$ whenever $\delta(S) < \mathfrak{B}$, $i = 1, \ldots, n$. There exists $h \in C(P, R)$ such that $\varrho(g, h) < \eta$ and, for any $y \in R$, $\delta(M_2h^{-1}(y)) < \mathfrak{B}$. It is easy to see that $\varrho(f, h) < \varepsilon$ and, for any $y \in R$, $\delta(Mh^{-1}(y)) < \mathfrak{A}$.

Lemma 9. *Let* $P$ *be compact; let* $M \subset P$ *be closed and let every* $x \in M$ *possess arbitrarily small neighborhoods whose boundaries intersect* $M$ *in sets possessing property* $\Delta(R)$ *in* $P$. *Then* $M$ *has property* $\Delta(R \times E)$ *in* $P$.

Proof. Let $\mathfrak{A}$ be a f. o. c. of $P$, $f \in C(P, R \times E)$, $\varepsilon < 0$. Let, for every $x \in P$, $f(x) = (g(x), \varphi(x))$; then $g \in C(P, R)$, $\varphi \in C(P)$. It is easy to find open $G_i \subset P$ ($i = 1, \ldots, m$) such that (1) $G_i G_j = 0$, for $i \neq j$, (2) $\overline{\Gamma} \supset M$, where $\Gamma = \Sigma_1^m G_i$, (3) every $G_i$ is contained in some $A \in \mathfrak{A}$, (4) $F = \Sigma_1^m (M\overline{G}_i - G_i)$ has property $\Delta(R)$ in $P$, (5) $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ whenever $x \in \overline{G}_i$, $y \in \overline{G}_i$. Then, by Lemma 6, there exists $h \in C(P, R)$ and an open $U \supset F$ such that (1) $\varrho(g, h) < \frac{1}{2}\varepsilon$, (2) $\delta(\overline{U}h^{-1}(y)) < \mathfrak{A}$, for any $y \in R$. Let $\sigma \in C(P)$ be such that, $\sigma(P - U) = (0)$, $\sigma(F) = (1)$, and $0 \leqq \sigma(x) \leqq 1$, for any $x \in P$. Put $\psi = \varphi + \frac{1}{2}\varepsilon\sigma$, $s(x) = (h(x), \psi(x))$, for any $x \in P$. Then $s \in C(P, R \times E)$ and the distance between $s$ and $f$ is $< \varepsilon$. If $z \in R \times E$, then, for any $i = 1, \ldots, m$, either $M\overline{G}_i s^{-1}(z) \subset P - F$ or $M\overline{G}_i s^{-1}(z) \subset U$ (for otherwise $\varphi(a) + \frac{1}{2}\varepsilon = \psi(a) = \psi(b) = \varphi(b)$, for some $a \in F\overline{G}_i s^{-1}(z)$, $b \in \overline{G}_i s^{-1}(z) - U$, which contradicts property (5) of $G_i$). Therefore $M\overline{G}_i s^{-1}(z)$, $M\overline{G}_j s^{-1}(z)$, $i \neq j$, cannot have common points unless they are both contained in $U$ (for their intersection is necessarily contained in $F$). From this, and from properties (3) of $G_i$, (2) of $U$, $\delta(Ms^{-1}(z)) < \mathfrak{A}$ is easily deduced.

Lemma 10. *If $P$ is compact, $K \subset P$ is closed, then* $\dim K \leqq 0$ *if and only if $\delta(K) < \mathfrak{A}$, for any f. o. c. $\mathfrak{A}$ of $P$.*

Lemma 11. *If $P$ is compact,* $\dim P \leqq n$, *then $P$ has property $\Delta(E^n)$ in $P$.*

Proof: if $n = 0$, follows from Lemma 10; if proved for $n$, follows, for $n + 1$, from Lemma 9.

Lemma 12. *Let $P$ be compact. Then* $\dim P \leqq 0$ *if, and only if, every connected $S \subset P$ contains one point at most.*

Lemma 13. *If $R$ is complete, then $C(P, R)$ is complete.*

Lemma 14. *Let $K$ be a compact space and let $R$ be complete. If $K$ has property $\Delta(R)$ in a space $P \supset K$ and admits of a light mapping $\varphi$ into a Hausdorff space $Q$ possessing a countable base, then $K$ admits of a light mapping into $R$.*

Proof. The space $T = \varphi(P) \subset Q$ is metrizable. Choose a metric in $T$ and let $\mathfrak{B}_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) be a f. o. c. of $P$ consisting of (non-void) sets of diameter $< n^{-1}$. Let $\mathfrak{A}_n$ consist of all $\varphi^{-1}(B)$, $B \in \mathfrak{B}_n$, and let $\mathfrak{A}_n^*$ be a f. o. c. of $P$ such that $\mathfrak{A}_n$ consists of all non-void $KA$, $A \in \mathfrak{A}_n^*$; let $D_n$ consist of all $f \in C(P, R)$ such that, for any $y \in R$, $\delta(Kf^{-1}(y)) < \mathfrak{A}_n^*$. Since $K$ has property $\Delta(R)$ in $P$ we obtain, by Lemmas 7 and 13 and Baire's Theorem, $\Pi_1^\infty D_n \neq \emptyset$. Choose $f \in \Pi_1^\infty D_n$. Then $\delta(Kf^{-1}(y)) < \mathfrak{A}_n^*$, for any $y \in R$, $n = 1, 2, \ldots$ It is now easy to show that every connected $S \subset Kf^{-1}(y)$ contains one point at most, and therefore $\dim Kf^{-1}(y) \leqq 0$. Hence $f$ is a light mapping.

Lemma 15. *If a compact space $P$ admits of a light mapping onto a compact $Q$ such that* $\dim Q \leqq n$, *then* $\dim P \leqq n$.

**Lemma 16.** *There exists, for any compact $K \subset E^n$, $f \in C(K)$, and $\varepsilon > 0$, a real polynomial $Q(x_1, \dots x_n)$ such that $|f(x_1, \dots, x_n) - Q(x_1, \dots \dots x_n)| < \varepsilon$ whenever $(x_1, \dots x_n) \in K$.*

**Lemma 17.** *If $S \subset P$ is a non-void connected set, then the subring $C_1 \subset C(P)$ consisting of all $x \in C(P)$ such that $x(t_1) = x(t_2)$, for any $t_i \in S$, is analytically closed.*

**Lemma 18.** *If $P$ is compact, $C_1$ is an algebraically closed subring of $C(P)$, then, for any $t_0 \in P$, the set of all $t \in P$ such that $x(t) = x(t_0)$ whenever $x \in C_1$ is connected.*

**Proof.** Suppose that, for some $t_0 \in P$, the set $A$ of $t \in P$ such that, for any $x \in C_1$, $x(t) = x(t_0)$ is not connected and, therefore, $A = A_1 + A_2$, $A_i \neq 0$ closed, $A_1 A_2 = 0$. Let $H_i \subset P$ be open, $H_i \supset A_i$, $\overline{H_1}\overline{H_2} = 0$. Let (cf. Lemma 1) $a_i \in C_1$, $a_i(t_0) = 0$, $a = \Sigma_1^n a_i^2$, $A \subset a^{-1}(0) \subset H_1 + H_2$, and choose $\varepsilon > 0$ such that $\overline{G} \subset H_1$, $G$ being the set of all $t \in H_1$ such that $a(t) < \varepsilon$. Putting, for any $t \in P$, $b(t) = 1 - \varepsilon^{-1}a(t)$, $z(t) = \pm\, b(t)$ according to whether $t \in G$ or $t$ non $\in G$ we obtain $b \in C_1$, $z \in C(P)$, $z^2 - b^2$, hence $z \in C_1$. Clearly, $z(t) = 1$ if $t \in A_1$, $z(t) = -1$ if $t \in A_2$. This is a contradiction.

**Lemma 19.** *If $P$ is a (non-void) compact space, then $M \subset C(P)$ is an analytic base of $C(P)$ if, and only if, every connected $S \subset P$ such that, for any $t_1 \in S$, $t_2 \in S$, $x \in M$, $x(t_1) = x(t_2)$ contains one point at most.*

This follows from Lemmas 17 and 18 and Theorem 2.

## O okruzích spojitých funkcí a dimensi kompaktních prostorů

(Obsah předešlého článku.)

Hlavním výsledkem článku je věta:

*Nechť $P$ je (neprázdný) kompaktní ($=$ bikompaktní) prostor. Je-li* $\dim C(P) < \aleph_0$, *pak* $\dim P = \dim C(P)$; *je-li* $\dim C(P) = \aleph_0$, *pak $P$ má nekonečnou dimensi.*

V této větě značí $\dim P$ induktivní (Menger-Urysohnovu) dimensi prostoru $P$; $\dim C(P)$ značí analytickou dimensi okruhu $C(P)$ spojitých reálných funkcí v prostoru $P$, t. j. nejmenší mohutnost množiny $M \subset C(P)$ takové, že neexistuje analyticky uzavřený okruh $C_1 \subset C(P)$, obsahující $M$ a různý od $C(P)$. Přitom nazýváme polokruh $C_1 \subset C(P)$ analyticky uzavřeným, když $\overline{C_1} = C_1$, $C_1$ obsahuje všechny konstanty a $x \in C_1$, kdykoli $x \in C(P)$, $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$, $a_i \in C_1$.