Josef Kaucký

K aplikacím symbolického počtu na diferenciální rovnice

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 54 (1925), No. 4, 327--330

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122318

K aplikacím symbolického počtu na diferenciální rovnice.

Napsal *Jos. Kaucký.*

1. Vyjděme z rovnice

$$\frac{f(\theta)}{F(\theta)}\,\varphi(x) = \sum \frac{\varphi(x)}{\theta - r}\left[\frac{f(r)}{F(r)}\right], \text{[1]} \tag{1}$$

kde θ je libovolná distributivní operace. Výraz na levé straně rovnice (1) značí řešení rovnice

$$F(\theta)\,y(x) = f(\theta)\,\varphi(x); \tag{2}$$

$\varphi(x)$ je daná funkce, $f(x)$ a $F(x)$ jsou polynomy, z nichž $F(x)$ je stupně vyššího než $f(x)$. Dále značí symbol

$$\frac{\varphi(x)}{\theta - r}$$

řešení rovnice

$$(\theta - r)\,y(x) = \varphi(x), \tag{3}$$

kde r je konstanta. Konečně součet Σ se vztahuje k residuím funkce $\dfrac{\varphi(x)}{\theta - r} \cdot \dfrac{f(r)}{F(r)}$ vzhledem k pólům $\dfrac{f(r)}{F(r)}$.

2. Předně je patrno, že lze, bez újmy na obecnosti, položiti

$$f(x) = 1,$$

existuje-li vůbec symbol

$$f(\theta)\,\varphi(x) = \psi(x).$$

Položme dále

$$\theta = D = \frac{\partial}{\partial x}$$

a uvažujme řešení rovnice

$$(D - r)\,y(x) = \varphi(x), \tag{4}$$

pro něž platí

$$y(0) = 0.$$

---

[1] Viz můj článek „O redukci dvou součtů“, Časopis, 54. Str. 210 rovnice (26).

Vidíme, že

$$y(x) = \int_0^x e^{r(x-z)} \varphi(z)\, dz,$$

kterýžto výraz vložen do (1) dává

$$\frac{\varphi(x)}{F(D)} = \int_0^x \left\{ \sum e^{r(x-z)} \left[\frac{1}{F(r)} \right] \right\} \varphi(z)\, dz. \tag{5}$$

Je-li pro jednoduchost

$$F(r) = a(r - r_1) \ldots (r - r_n) \tag{5'}$$

a položíme-li

$$A_\nu = \frac{1}{F'(r_\nu)},$$

přejde rovnice (5) v následující

$$\frac{\varphi(x)}{F(D)} = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \int_0^x e^{r_\nu(x-z)} \varphi(z)\, dz. \tag{6}$$

3. Z obecných vzorců (5) a (6), pro specielní případy $\varphi(x)$, lze obdržeti řadu užitečných vzorců. Tak v matematické fysice často přichází

$$\varphi(z) = f(z)\, e^{\lambda z} = e^{\lambda z} \sum_{k=0}^{l} c_k z^k, \tag{7}$$

kde λ a c_k jsou konstanty. V tomto případě získáme vzorec (9), který v poslední době udal B. B. Baker v článku „An extension of Heaviside's operational method of solving differential equations"[2]) a který zde k vůli úplnosti uvádím.

Položme

$$\varphi(z) = c_k z^k e^{\lambda z};$$

snadný výpočet dává

$$c_k \int_0^x e^{r_\nu(x-z)+\lambda z} z^k\, dz =$$

$$= c_k e^{\lambda x} \left[\frac{x^k}{\lambda - r_\nu} - \ldots + (-1)^k \frac{k!}{(\lambda - r_\nu)^{k+1}} \right] - \frac{(-1)^k k!\, c_k e^{r_\nu x}}{(\lambda - r_\nu)^{k+1}}.$$

---

[2]) Proc. Edinburg Math. Soc., Vol. 42 (1924), p. 95—103. Úvahy Bakerovy nejsou přesně zdůvodněny.

Je tedy

$$\frac{c_k x^k e^{\lambda x}}{F(D)} =$$

$$= c_k \left\{ e^{\lambda x} \left[x^k \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_\nu}{\lambda - r_\nu} - k x^{k-1} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_\nu}{(\lambda - r_\nu)^2} + \ldots \right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots + (-1)^k k! \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_\nu}{(\lambda - r_\nu)^{k+1}} \right] - (-1)^k k! \sum_{\nu=1}^{\nu} \frac{A_\nu e^{r_\nu x}}{(\lambda - r_\nu)^{k+1}} \right\}.$$

Předpokládejme, že lze psáti

$$\frac{1}{F(x)} = N_0 + N_1 (x - \lambda) + N_2 (x - \lambda)^2 + \ldots ;$$

pak

$$N_k = (-1)^k \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_\nu}{(\lambda - r_\nu)^{k+1}}$$

a

$$\frac{c_k x^k e^{\lambda x}}{F(D)} = e^{\lambda x} \sum_{\nu=0}^{k} N_\nu \frac{d^\nu (c_k x^k)}{dx^\nu} - (-1)^k c_k k! \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_\nu e^{r_\nu x}}{(\lambda - r_\nu)^{k+1}}. \quad (8)$$

Sečteme-li výrazy (8), které dostaneme, klademe-li $k = 0, 1, \ldots l$, máme konečně vzorec Baker-ův

$$\frac{f(x) e^{\lambda x}}{F(D)} = \frac{e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{l} c_k x^k}{F(D)} =$$

$$= e^{\lambda x} \sum_{\nu=0}^{l} N_\nu \frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{F'(r_\nu)} e^{r_\nu x} \sum_{k=0}^{l} \frac{c_k k!}{(r_\nu - \lambda)^{k+1}}. \quad (9)$$

Podobně bychom provedli výpočet, kdyby $F(r)$ měla vícenásobné nulové body.

Z předešlého a z úvah článku „O redukci dvou součtů" vidíme, že obecná rovnice (24) tohoto článku (str. 209) může býti užitečnou ve trojím směru. Předně volíme-li operaci Θ na př. $\Theta = \underset{\omega}{\Delta}, \Theta = D \ldots$ dostáváme formule z diferenčního, diferenciálního počtu atd. Dále lze voliti formu rozkladu (14) (tamže str. 208); při tom zvlášť výhodným je rozklad v parciální zlomky. Konečně volbou $\varphi(x)$ docházíme k specielním vzorcům.

*

Sur l'application du calcul symbolique aux équations différentielles.

(Extrait de l'article précédent.)

Partons de l'équation (1)[1], où, θ étant une opération distributive quelconque, $\frac{f(\theta)}{F(\theta)}\varphi(x)$ et $\frac{\varphi(x)}{\theta - r}$ signifient les solutions des équations (2) et (3). $F(x)$, $f(x)$ sont des polynomes, l'ordre de $f(x)$ étant inférieur à celui de $F(x)$. On peut, en général, poser $f(x) = 1$.

Soit maintenant $\theta = D = \frac{\partial}{\partial x}$ et considérons la solution de l'équation (4) pour laquelle $y(0) = 0$. $F(r)$ étant de la forme (5′), on obtient la formule (6). C'est une généralisation de la formule de B. B. Baker[2]) qui suit de (6) pour la forme (7) de $\varphi(x)$.

---

[1]) Voir mon article „Sur la réduction des sommes $\underset{\omega}{\overset{n}{S}}\varphi(x)\nabla x$ et $\underset{a}{\overset{x}{S}}\varphi(z)\underset{\omega}{\overset{n}{\Delta}} z$," Časopis, 54.

[2]) Proc. Edinburgh Math. Soc., Vol. XLII. (1924), p. 95—103, p. 212.