Václav Láska

O tvaru a hutnosti země

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 1, 13--26

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122299

Ze soustav rovnic (4) a (8) vyplývá rovněž řešení úlohy *opačné*: z daných elementů geometrických pravé dráhy hvězd podvojných stanoviti zdánlivou dráhu (promítnutou na kouli nebeskou). Řešení úlohy té ponecháváme čtenáři.

O tvaru a hutnosti země.

Píše

dr. V. Láska,

docent v Praze.

V této úvaze pojednáme o tvaru a hutnosti země. Tvar zemský jeví se nám jednak jako těleso geometrické, jednak jako těleso fysikální, jehož tvůrcem a udržovatelem jest síla gravitační. Podoba země podmíněna jest úplně zákonem této síly a lze ji také jediné na základě této síly stanoviti. Pomocí kyvadla a jiných nástrojův, majících za základ zákon Newtonův, lze určiti intensitu a směr síly gravitační v kterémkoliv bodě povrchu zemského a tím i plochu hladinovou.

Vzhledem k zjednodušení úvah jest nezbytná vhodná volba soustavy souřadnic. Nejlépe doporučuje se ona soustava, při kteréž axiálné momenty prvého a druhého stupně mizejí, t. j. kdy učiněno zadost podmínkám:

$$\int x\, dm = 0, \qquad \int y\, dm = 0, \qquad \int z\, dm = 0, \tag{1}$$

$$\int xy\, dm = 0, \qquad \int yz\, dm = 0, \qquad \int zx\, dm = 0. \tag{2}$$

Bod začáteční soustavy souřadnic bude tudíž ležeti v těžišti a osy budou míti polohu hlavních os setrvačnosti.

Značí-li dm element hmoty, bude

$$dm = \Theta dxdydz, \tag{3}$$

kdež hutnost Θ jest funkcí souřadnic x, y, z.

To předpokládajíce, můžeme psáti potentiál síly gravitační v zevnějším bodu ξ, η, ζ, který ve vzdálenosti e od bodu x, y, z leží,

$$V = k^2 \int \frac{dm}{e} + \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2)\, \omega^2, \tag{4}$$

kdež značí ω úhlovou rychlost otáčecí tělesa zemského. Integrace vztahuje se na celou hmotu zemskou.

Intensita síly gravitační jest dána výrazem:

$$g = -\frac{\partial V}{\partial \varrho}, \tag{5}$$

při čemž

$$\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Položíme-li

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

bude

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{\varrho}\left\{1 - 2\frac{r}{\varrho}\cos(r\varrho) + \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2\right\}, \tag{6}$$

kdež

$$\cos(r\varrho) = \frac{x}{r}\cdot\frac{\xi}{\varrho} + \frac{y}{r}\cdot\frac{\eta}{\varrho} + \frac{z}{r}\cdot\frac{\zeta}{\varrho}.$$

Rozvedením výrazu (6) dle úkonů sférických obdržíme:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{\varrho}\sum\left(\frac{r}{\varrho}\right)^k P_k,$$

při čemž položeno

$$P_0 = 1$$
$$P_1 = \cos(r\varrho)$$
$$P_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2(r\varrho)$$
$$P_3 = \frac{3}{8}\cos(r\varrho) + \frac{5}{8}\cos 3(r\varrho),$$

. . . .

načež bude

$$\int\frac{dm}{e} = \frac{1}{\varrho}\sum\frac{1}{\varrho^k}\int r^k P_k\, dm. \tag{7}$$

Jest však

$$\int r^0 P_0\, dm = \int dm = M. \tag{8}$$

Zde značí M celou hmotu země. Dále jest vzhledem k rovnici (6)

$$\int r\mathrm{P}_1\,dm = \frac{1}{\varrho}\left\{\xi\int x dm + \eta\int y dm + \zeta\int z dm\right\},$$

z čehož plyne

$$\int r\mathrm{P}_1\,dm = 0. \tag{9}$$

Použijeme-li rovnice

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2(r\varrho) = -\frac{1}{2}[1 - 3\cos^2(r\varrho)],$$

bude dále

$$\int r^2\mathrm{P}_2 = -\frac{1}{2}\int r^2 dm + \frac{3}{2}\int r^2\cos^2(r\varrho)\,dm. \tag{10}$$

Jak výše uvedeno, jest

$$\begin{aligned}[][r\varrho\cos(r\varrho)]^2 &= (x\xi + \eta y + \xi z)^2\\ &= (r\varrho)^2 - \begin{vmatrix} x & y\\ \xi & \eta\end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} x & z\\ \xi & \zeta\end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} y & z\\ \eta & \zeta\end{vmatrix}^2\\ &= (r\varrho)^2 - \xi^2(y^2+z^2) - \eta^2(x^2+z^2) - \zeta^2(x^2+y^2)\\ &\quad + 2\xi\eta\,.\,xy + 2\xi\zeta\,.\,xz + 2\eta\zeta\,.\,yz,\end{aligned}$$

tak že bude

$$\begin{aligned}\int r^2\cos^2(r\varrho)dm &= \int r^2\,dm - \left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^2\int(y^2+z^2)dm - \ldots\\ &\quad + 2\,\frac{\xi}{\varrho}\,.\,\frac{\eta}{\varrho}\int xy\,dm + \ldots\end{aligned}$$

Integrály v posledních členech mizejí vzhledem k volbě souřadnic. Integrály

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= \int(z^2+y^2)\,dm\\ \mathrm{B} &= \int(z^2+x^2)\,dm\\ \mathrm{C} &= \int(x^2+y^2)dm\end{aligned}$$

značí hlavní momenty setrvačnosti a odůvodňují zároveň vztah

$$\int r^2 dm = \frac{1}{2}(A + B + C),$$

pomocí kterého lze rovnici (10) psáti, jak následuje:

$$\int r^2 P_2\, dm = \frac{1}{2}\left\{1 - 3\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^2\right\} A + \frac{1}{2}\left\{1 - 3\left(\frac{\eta}{\varrho}\right)^2\right\} B + \frac{1}{2}\left\{1 - 3\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^2\right\} C. \qquad (11)$$

Zavedeme-li nyní souřadnice polární

$$\xi = \varrho \cos \varphi \cos \lambda,$$
$$\eta = \varrho \cos \varphi \sin \lambda,$$
$$\zeta = \varrho \sin \varphi,$$

znamená φ zeměpisnou šířku, λ zeměpisnou délku, i obdržíme:

$$\int r^2 P_2\, dm = \frac{1}{2}(A + B - 2C) - \frac{3}{2}(A \cos^2\lambda + B \sin^2\lambda - C)\cos^2\varphi.$$

Položíme-li dále:

$$\cos^2\lambda = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\lambda),$$

$$\sin^2\lambda = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\lambda)$$

a zároveň

$$K = \frac{1}{2}(A + B - 2C),$$

obdržíme

$$\int r^2 P_2\, dm = K - \frac{3}{2}\left\{K + \frac{1}{2}(A - B)\cos 2\lambda\right\}\cos^2\varphi$$

aneb

$$\int r^2 P_2\, dm = \frac{1}{2}\left\{K - \frac{3}{2}(A - B)\cos 2\lambda\right\} + \frac{3}{2}\left\{K + \frac{1}{2}(A - B)\cos 2\lambda\right\}\sin^2\varphi. \qquad (12)$$

Dosazením příslušných hodnot do rovnice (4) obdržíme:

$$V = \frac{k^2}{\varrho} M + \frac{1}{2} \varrho^2 \cos^2\varphi \,.\, \omega^2$$

$$- \frac{k^2}{2\varrho^2} \left\{ K - \frac{3}{2} (A - B) \cos 2\lambda \right\}$$

$$+ \frac{3k^2}{2\varrho^2} \left\{ K + \frac{1}{2} (A - B) \cos 2\lambda \right\} \sin^2\varphi \qquad (13)$$

a differenciací dle ϱ

$$g = - \frac{\partial V}{\partial \varrho} = \frac{k^2}{\varrho^2} M + \varrho \cos^2\varphi\omega^2$$

$$+ \frac{k^2}{\varrho^3} \left\{ K - \frac{3}{2} (A - B) \cos 2\lambda \right\} \qquad (14)$$

$$- \frac{3k^2}{\varrho^3} \left\{ K + \frac{1}{2} (A - B) \cos 2\lambda \right\} \sin^2\varphi.$$

Pro *určitý* sféroid bude $V = V_0 =$ konstantě, tedy

$$\varrho = \frac{k^2}{V_0} M + \frac{1}{2} \frac{\varrho^3}{V_0} \cos^2\varphi\omega^2$$

$$- \frac{k^2}{2\varrho V_0} \left\{ K - \frac{3}{2} (A - B) \cos 2\lambda \right\}$$

$$+ \frac{k^2}{2\varrho V_0} \left\{ K + \frac{1}{2} (A - B) \cos 2\lambda \right\} \sin^2\varphi. \qquad (15)$$

Srovnejme vzorec (14) s empiricky odvozeným vztahem

$$g = 9{\cdot}7806 \,(1 + 0{\cdot}0052 \sin^2\varphi), \qquad (16)$$

pak poznáme, že až do mezí správnosti této poslední formule

$$A - B = 0. \qquad (17)$$

Vzhledem k tomu píšeme rovnice (14), (15) a (16) takto:

$$V = \frac{k^2}{\varrho} M + \frac{1}{2} \varrho^2\omega^2\cos^2\varphi - \frac{k^2 K}{2\varrho^2} + \frac{3k^2 K}{2\varrho^2} \sin^2\varphi\,, \qquad (13')$$

$$g = \frac{k^2}{\varrho^2} M - \varrho \cos^2\varphi \omega^2 + \frac{k^2 K}{\varrho^3} - \frac{3k^2 K}{\varrho^3} \sin^2\varphi \,, \tag{14'}$$

$$\varrho = \frac{k^2 M}{V_0} + \frac{1}{2} \frac{\varrho^2 \omega^2}{V_0} \cos^2\varphi - \frac{k^2 K^2}{2\varrho V_0} + \frac{3k^2 K}{2\varrho V_0} \sin^2\varphi. \tag{15'}$$

Položme

$$g = g_0(1 + \gamma \sin^2\varphi)\,, \tag{18}$$

$$\varrho = \varrho_0(1 - \eta \sin^2\varphi)\,, \tag{19}$$

pak obdržíme:

$$g_0 = \frac{k^2}{\varrho^2} M + \varrho\omega^2 + \frac{k^2 K}{\varrho^3}\,,$$

$$\varrho_0 = \frac{k^2 M}{V_0} + \frac{1}{2} \frac{\varrho^3 \omega^3}{V_0} - \frac{k^2 K^2}{2\varrho V_0}\,,$$

$$\gamma = \frac{2\omega^2 \varrho^3}{M k^2} - \frac{3K}{2\varrho^2 M}\,,$$

$$\eta = \frac{\omega^2 \varrho^3}{2 M k^2} + \frac{3K}{2\varrho^2 M}\,.$$

Sečtením obou posledních rovnic obdržíme dále:

$$\gamma + \eta = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 \varrho^3}{M k^2}$$

aneb

$$\gamma + \eta = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 \varrho}{g_\varrho}\,. \tag{20}$$

Rovnice ta dává nám známou větu *Clairautovu* (Théorie de la Figure de la Terre. Paris 1743.) Jest pak zřejmo

$$\eta = \frac{a - b}{a} = \text{sploštění},$$

$$\gamma = \frac{g_a - g_b}{g_a}$$

jest přibývání intensity gravitační od rovníku k pólu měřené v jednotce síly gravitační na rovníku.

Pomocí věty té vypočteme snadno sploštění tvaru zemského. Jak známo, že otáčí se země v době jednoho hvězdného dne, t. j. v době 86164·09 středních sekund jednou kolem své osy; bude tudíž

$$\omega = \frac{2\pi}{86164{\cdot}09};$$

položme dále dle Bessela pro rovník

$$\varrho = 6377397\ m,$$

a

$$g_\varrho = 9{\cdot}7806\ m,$$

pak bude

$$\frac{\omega^2 \varrho}{g_\varrho} = \frac{1^2}{288{\cdot}4}$$

a poněvadž dle rovnice (16)

$$\frac{g_a - g_b}{g_a} = 0{\cdot}0052\,,$$

bude dle poučky Clairautovy

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{288{\cdot}3}\,.$$

Co se týče číselných dat, budiž poukázáno na výtečný spisek *Listingův*: „Neue geometrische und dynamische Constanten des Erdkörpers. Götting. Nachrichten 1878.“ Z měření geodétických plyne hodnota poněkud jiná (Clarke Geodesy), totiž

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{294}\,.$$

Avšak hodnota poslednější jest velmi problematická, teprve soustavné měření, jaké zahájeno v době novější, bude moci podati správnější hodnotu. *Roche*, *Radau*, *Poincarè* a *Callandreau* dokazují, že hodnota

$$\frac{C-A}{C}=0{\cdot}003272,$$

jak ji praecesse dává, sploštění činí nemožným, které by bylo větší než

$$\frac{1}{296} \text{ neb } \frac{1}{297}.$$

Tím jest zevnější tvar země stanoven. I jest stanoviti dále hutuost vnitra země.

Velkou oporou bude nám slavná věta Stokesova (Cambridge and Dublin mathem. Journal 1849), která praví: *Potentiál na bod vnější u oběžnice točící se stejnoměrně kolem osy, jíž plocha volná jest dána, jest neodvislým od povahy vnitra.*

Odůvodnění podáváme dle Poincarèho.

Pro povrch P máme vztah

$$\frac{\partial V}{\partial n}=0, \quad \text{tudíž } V=V_0=\text{const.}$$

Patřme nyní na složení vnitřní. Pro všechny body P bude míti potentiál tvar

$$V=V_0-\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)$$

a zároveň bude dle známé poučky

$$\int_P \frac{\partial V}{\partial n}\,dp=-4\pi M,$$

kdež *M* znamená hmotu.

Předpokládejme nyní, že složení hmot jest jiné, pak obdržíme:

$$V'=V'_0-\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)$$

a

$$\int\limits_P \frac{\partial V'}{\partial n}\, dp = -4\pi M\,;$$

pak víme, z theorie potentiálu, že rozdíl

$$U = V - V' = V_0 - V'_0$$

bude pro body vnější plochy P vyhovovati rovnici

$$\triangle U = 0$$

a pro veškeré body plochy P

$$U = \text{const.}$$

Dále platí dle poučky Greenovy v případě, že prostor Θ jest mimo plochu p

$$\int\limits_p U \frac{\partial U}{\partial n}\, dp = \int\limits_q \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \right\} dq.$$

V ploše P jest

$$U = \text{const.}$$

a tudíž

$$\int\limits_p U \frac{\partial U}{\partial n}\, dp = 0\,,$$

pak bude i druhý integrál rovnati se 0 a tím i

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0,$$

t. j. U jest veličina stálá. V nekonečnu jest $U = 0$, bude tedy pro každý bod prostoru Q, $U = 0$ a tudíž

$$V = V'$$

a tím i

$$V_0 = V'_0\,,$$

čímž věta výše uvedená jest dokázána. Věta ta nám umožňuje vyjádřiti potentiál jediné pomocí daného povrchu, resp. pomocí povrchových hodnot.

Fysikální povaha vnitra země jest dosud nerozřešenou hádankou. Richter dovozuje na základech mechanické theorie tepla, že vnitro země má povahu tělesa kapalného ne-li vzdušného. W. *Thomson* a *Darwin* naproti tomu dokazují na základě zjevů praecesse a nutace, že vnitro země jest asi neobyčejně pevné.

Úkolem této stati není rozebírání důvodu jedné nebo druhé theorie. Jen tolik budiž podotčeno, že nehledě k jiným zjevům, velký magnetický moment, dle našeho zdání, velmi Richtrově theorii vadí. Těžko lze asi tak stálý a nepoměrně veliký moment s kapalnou a abnormně zvýšenou teplotou středu sloučiti. Stejně záhadným jeví se býti zákon, dle kteréhož hutnost vnitra Země se mění. Jak z pokusů známo, obnáší hutnost ona na povrchu 2·6 a v hodnotě střední 5·6. Helmert odvozuje jako pravděnejpodobnější teuto vzorec:

$$\Theta = 11{\cdot}3 \left\{1 - 1{\cdot}04 \left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 + 0{\cdot}275 \left(\frac{\varrho}{a}\right)^4\right\},$$

kdež znamená ϱ vzdálenost od středu a a velkou osu ellipsoidu zemského. Jiných vzorců odvozena byla značná řada a vždy lze zajisté najíti funkci takovou, aby oběma hodnotám 2·6 a 5·6 vyhovovala, ale čím možno dokázati, že ten neb onen vzorec jest pravděpodobnější druhého?

Tuto pokusíme se o odvození vzorce methodou, která se zdá být vědečtější než Helmertova.

Hypothesy, jichž použijeme, jsou:

I. Hutnost vnitra jest jedinou funkcí vzdálenosti od středu, t. j.

$$\Theta_\varrho = f(\varrho).$$

II. Na povrchu tedy pro $\varrho = 1$ máme

$$\Theta_2 = f(1) = 2{\cdot}6\,.$$

III. Střední hutnost země Θ rovná se 5·6. Hypothesa ta jest vyjádřena rovnicemi

$$M = \frac{4}{3}\pi\Theta = 4\pi\int_0^1 \Theta_\varrho \varrho^4 d\varrho.$$

IV. Moment setrvačnosti C rovná se $\frac{1}{3} M$.

Hypothesa ta není zúplna správná, jest totiž pro $\varrho = 1$,

$$C - 0{\cdot}3321\, M = 0.$$

Úvahy tyto jsou však takové, že ona hypothesa v nich principielně ničeho nemění. Vždy možno $\frac{1}{3}$ nějakou jinou hodnotou zaměniti.

Jak známo, jest

$$C = \frac{8}{3}\pi\int_0^1 \Theta_\varrho \varrho^4 d\varrho;$$

i možno psáti rovnici předposlední takto:

$$\int_0^1 f(\varrho)\,\varrho^2\{2\varrho^2 - 1\}\,d\varrho = 0. \qquad \text{(A)}$$

Tato rovnice ve spojení s následujícími

$$f(1) = 2{\cdot}6, \qquad \text{(B)}$$

$$\frac{1}{3}\int_0^1 \varrho^2 f(\varrho)\,d\varrho = 5{\cdot}6, \qquad \text{(C)}$$

dává nám podmínky, kterýmž funkce $f(\varrho)$ vyhovovati musí. K definici však tyto podmínky nestačí, tak že nutno voliti nějakou hypothesu.

Volíme tuto:

$$f(\varrho) = \Theta_0(1 - \varkappa\varrho^n),$$

kdež znamená Θ_0 hodnotu pro $\varrho = 0$. Položením do rovnice (A) určíme hodnotu konstanty $\varkappa$ a obdržíme

$$\varkappa = \frac{1}{15}\frac{(n+3)(n+5)}{n+1}.$$

Hodnotu Θ_0 určíme pomocí rovnice (C), tak že bude

$$\Theta_0 = 7\,\frac{n+1}{n}.$$

Pak obdržíme z rovnice B

$$\Theta_1 = \frac{7}{15}(7-n)$$

jako kontrolní hodnotu pro správnost hypothesy.

Předpokládejme zprvu, že n jest číslo celistvé, pak snadno odvodíme tabulku:

n	$\varkappa$	Θ_0	Θ_1
1	$\frac{4}{5}$	14·0	2·8
2	$\frac{7}{9}$	10·5	2·3
3	$\frac{4}{5}$	9·3	1·8
4	$\frac{21}{25}$	8·7	1·4
5	$\frac{8}{9}$	8·4	0·9

Z této tabulky vysvítá, že, je-li

$$f(\varrho) = \Theta_0\,(1 - \varkappa\varrho^n),$$

pak musí ležeti n v mezích

$$2 > n > 1.$$

Volíme-li $n = \frac{3}{2}$ a zaokrouhlíme-li $\varkappa$ z $\frac{39}{60}$ na $\frac{2}{3}$, pak obdržíme:

$$f(\varrho) = 11{\cdot}7\left(1 - \frac{2}{3}\varrho^{\frac{3}{2}}\right).$$

Tvar ten zdá se býti nejvýhodnějším.

Volíme-li tvar

$$f(\varrho) = \Theta_0 (1 - \varkappa\varrho)^n,$$

pak obdržíme

n	$\varkappa$	Θ_0	Θ_1
1	$\frac{4}{5}$	14·0	2·8
2	$\frac{1}{2}$	9·0	2·2
3	$\frac{2}{5}$	16·8	3·3

Ostatní mocnitele jsou nemožnými. V tomto případě bychom obdrželi dvě hodnoty pro n a sice jednu v mezích

$$2 > n > 1$$

a druhou v mezích

$$3 > n > 2.$$

Vzhledem k velkým hodnotám, které pro střed Země obdržíme, nezdá se býti uvedený tvar pravděpodobným.

O správnosti té které hypothesy ve příčině funkce $f(\varrho)$ můžeme se přesvědčiti ještě jiným způsobem.

Clairaut odvozuje ve svém díle „Figure de la Terre" p. 273 vztah mezi sploštěním a funkcí $f(\varrho)$. Položíme-li totiž

$$\int_0^\varrho f(\varrho)\,\varrho^2 d\varrho = \mathrm{A},$$

pak bude, znamená-li z sploštění:

$$\frac{d^2z}{d\varrho^2}+\frac{2f(\varrho)\,\varrho^2}{A}\frac{dz}{d\varrho}+\left\{\frac{2f(\varrho)\,\varrho}{A}-\frac{6}{\varrho^2}\right\}z=0\,.$$

V případě, že

$$f(\varrho)=\Theta_0\,(1-\varkappa\varrho^n)\,,$$

lze tuto rovnici pomocí hypergeometrických řad integrovati. Položíme-li totiž (viz Tisserand, Bull. astr. Tom. I. p. 420. Lipschitz Crelle J. sv. LXII.)

$$\frac{3\varkappa}{n+3}\varrho^n=x\,,$$

obdržíme:

$$(x-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}+\left\{\frac{5}{n}+1-\left(\frac{5}{n}+3\right)x\right\}\frac{dz}{dx}-\frac{2}{n}z=0\,.$$

Položíme-li dále:

$$\alpha\beta=\frac{2}{n}\,,$$

$$\alpha+\beta=\frac{5}{n}+2\,,$$

$$\gamma=\frac{5}{n}+1\,,$$

pak bude jeden integral uvedené rovnice

$$z=C\,F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)\,.$$