Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička
Methodické poznámky k odvozování periodičnosti funkce exponenciální

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 1, 1--4

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122297`

Methodické poznámky k odvozováni periodičnosti funkce exponenciálni.

Napsal

dr. F. J. Studnička.

Jakož známo, dokazuje se rozmanitým spůsobem, že

$$\operatorname{Exp} z = \operatorname{Exp} (z + np)\,, \qquad (1)$$

kdež představuje n celistvé číslo buď positivní nebo negativní, p pak veličinu stálou, *perioda* jmenovanou a v tomto případě $2\pi i$ velikou. A poněvadž se vzorcem

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x\,^{*}) \qquad (2)$$

stanoví relace mezi výrazem exponenciálním e^{xi} a výrazy goniometrickými $\cos x$ a $\sin x$, plyne z periodičnosti výrazu prvního současně i periodičnost výrazů posledních, jakož snadno se pozná, dosadí-li se do vzorce (2) přímo $x + 2n\pi$ místo π, ježto tu se zřetelem ke vzorci (1) porovnáním části reální a imaginární vzniknou dvě relace

$$\left.\begin{aligned}\cos x &= \cos (x + 2n\pi)\,,\\ \sin x &= \sin (x + 2n\pi)\,,\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

z nichž plyne, že jednoduchou periodou těchto funkcí goniometrických jest 2π.

Uváží-li se pak, že o těchto funkcích platí

$$\cos \frac{1}{2}\pi = 0\,, \qquad \sin \frac{1}{2}\pi = 1\,,$$

obdrží se pomocí poučky součtové nejen

*) Jakých praemiss třeba tu k důkazu, viz ve spise *Studnička* „Výklady o funkcích monoperiodických“ pag. 141.

$$\cos \pi = -1, \quad \sin \pi = 0,$$

nýbrž i upotřebením těchto relací

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \frac{\sin(x + \overline{k-1}\,\pi + \pi)}{\cos(x + \overline{k-1}\,\pi + \pi)} = \operatorname{tg}(x + \overline{k-1}\,\pi),$$

z čehož plyne konečně

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi); \tag{4}$$

a tu shledává se, že tato cesta odvozovací nejjednodušším spůsobem vede ku poznání příslušné periodičnosti.

Jde jenom o to, jak se dovozuje správnost vzorce (1).

Nejpřesněji vede se důkaz pomocí příslušné obrácené funkce, totiž logarithmu přirozeného, o němž platí integrální relace

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \int\!\!\!/_1^z \frac{dz}{z} + 2n\pi i, \text{*)}$$

jíž odpovídá vzorec

$$l_n z = l_0 z + 2n\pi i, \tag{5}$$

kdež značí $l_0 z$ hlavní hodnotu (the principal branch) logarithmu čísla $z = x + yi$, **) $l_n z =$ tedy hlavní hodnotu o n period exponenciální funkci příslušných zvětšenou, takže pro $n = 0$ vznikne identičnost

$$l_0 z = l_0 z.$$

Jakmile známe relaci (5), třeba jen užiti poměru mezi exponenciálním výrazem a přirozeným logarithmem, jakáž se jeví relací stanovenou stejninou

$$z = e^{lz},$$

načež obdržíme přímo vzorec (1).

Znajíce tuto souvislost jednotlivých zde uvedených vzorců, snadno rozhodneme, jak možná co nejjednodušeji, totiž bez

*) Viz na př. *Schlömilch* „Compendium der höheren Analysis" II. Bd. 2. Aufl. pag. 52, kdež odvození jednoduché podáno.

**) Viz *Studnička* ibid. pag. 144.

praemiss z vyšší analyse plynoucích odůvodniti periodičnost exponenciální funkce.

Třebať jen spůsobem známým*) dokázati správnost vzorců (3), pak vzorce (2) a přímo vyplyne konečně vzorec (1). Co se pak tkne důkazu prvního, možná tu voliti historickou cestu geometrickou, na níž se vyskytuje pojem sinusu v rouše poměru dvou délek, úhel pak se měří alikvotní částí kružnice, při čemž se přichází ku poznání, že rovnici

$$\sin x = a,$$

mající kořen α, vyhovuje i kořen

$$x = \alpha + n \,.\, 360^0,$$

při čemž konstanta π tedy vyjádřena goniometrickou svou hodnotou.

Poznámka. Co se tkne terminologie a symboliky, jakouž se rozlišuje význam *hlavních* a *obecních* hodnot příslušných funkcí obrácených, totiž logarithmu a funkcí kyklometrických, není věc ještě ustálena. Spůsob psaní, jakýž vzorcem (5) jest naznačen, a jemuž odpovídá na př. relace

$$\operatorname{arctg}_n z = \operatorname{arctg}_0 z + n\pi,$$

vyjadřuje po našem náhledu dosti jednoduše příslušnou sou vislost, poněvadž ukazuje zcela případně a krátce, že obecná hodnota funkce takové má

1. nekonečně mnoho zvláštních hodnot, ježto činitel n tu značí libovolné positivní nebo negativní číslo celistvé, a

2. že tyto hodnoty se od sebe liší pouze násobkem příslušné periody, takže na př.

$$l_{n+k} z - l_n z = 2k\pi i,$$
$$\operatorname{arctg}_{n+k} z - \operatorname{arctg}_n z = k\pi.$$

Kdyby nutno bylo bez ohledu k dosavadní zvyklosti zvláštním slovem vyjádřiti poměr těchto funkcí se zřetelem k tomu, jak se tu jeví jejich hodnoty, nazvali bychom tyto *isodromické*,

*) Viz *Studnička* „Elementární odůvodnění periodičnosti nižších funkcí transcendentních“ Časop. R XXII. pag. 209.

ony pak *peridromické*,*) ježto se tu hodnoty vracejí k původní platnosti, onde pak postupují o stejné přírůstky dále, při čemž odpovídá obyčejné periodičnosti neboli peridromičnosti zvláštní způsob mnohoznačnosti nekonečné neboli isodromičnost.

Strojení středů zakřivení trochoid.

Napsal

Eduard Weyr.

V rovině buďte dány dvě čáry, dotýkající se v jistém bodě; jedna z nich budiž pevna a druhá nechť se kotalí bez šinutí po první, t. j. nechť se tak pohybuje, by se stále dotýkala pevné čáry a by zároveň oblouky obou čar na sebe applikované měly stejné délky. Libovolný bod roviny, pevně spojený s pohyblivou čarou, opíše pak čáru, která se vzhledem k vytčenému pohybu nazývá trochoidou (kotálnice, roulette).

V této krátké úvaze chci jednoduchým způsobem odvoditi známé konstrukce normaly a poloměru zakřivení trochoidy.

Za tím účelem pokládejme křivou čáru za limitní tvar čáry lomené, utvořené ze spojivých přímek po sobě jdoucích bodů dané čáry, a to pro ten případ, že se délky spojnic stávají nekonečně malými; patrně lze za příčinou zjednodušení předpokládati, že veškeré tyto spojnice mají délku stejnou.

Vzhledem k tomuto názoru uvažujme o dvou lomených čarách, složených ze stejně dlouhých přímek a jež mají jednu společnou stranu. Uveďme jednu z obou čar v pohyb tím, že ji otočíme kolem jednoho společného vrcholu, až splynou další dvě strany; pak ji opět otočíme kolem nového společného vrcholu až do splynutí dalších dvou stran, atd. Dráha opsaná bodem M, pevně spojeným s pohyblivou čarou, bude se skládati z kruhových oblouků opsaných resp. kolem oněch po sobě jdoucích vrcholů A, B, ... a bude tedy normala dráhy procházeti pří-

*) Tím by se zavedly výrazy stejného rázu, jako jsou již známé *monodrom* a *polydrom*, jichž někteří mathematikové užívají ve svých výkladech funkčních.