Matyáš Lerch
Různé věty arithmetické. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 21 (1892), No. 4, 185--190

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122285

Různé věty arithmetické. *)

Abiturentům píše

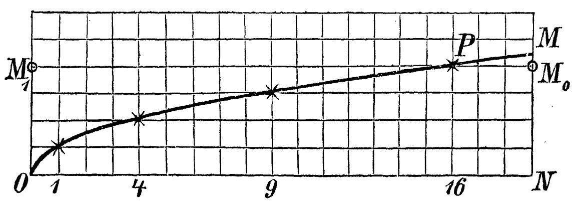
M. Lerch,

docent mathematiky na české vysoké škole technické.

(Dokončení.)

II.

Pravou spoustu arithmetických vztahů poskytne následující princip geometrický. Rovnoběžkami s osami X a Y vedenými u vzdálenosti 1, 2, 3, 4, 5, ... rozloží se celá rovina v nekonečné množství čtverců tvořících síť, a jejichž vrcholy mají za souřadnice čísla celistvá. Z těchto bodů vezměme v úvahu pouze ony, jež leží v prvním kvadrantu a to mimo osy. Body ty nazývati budeme *vrcholy hlavní sítě.*



Libovolná křivka OM (v obrazci vedena parabola $y = \sqrt{x}$), v níž každé úsečce x přísluší jediná pořadnice y, rozdělí řadu vrcholů hlavní sítě ve tři kategorie:

1. ve vrcholy mezi osou X a křivkou OM,
2. ve vrcholy mezi osou Y a křivkou OM,
3. ve vrcholy položené na křivce OM.

Vrcholy poslední kategorie mohou se někdy nevyskytovati.

Je-li pak $y = f(x)$ rovnice křivky OM v pravoúhlé soustavě X, Y, bude $E[f(k)]$ čili $[f(k)]$ patrně znamenati počet vrcholů hlavní sítě majících úsečku $x = k$ a náležejících první neb třetí kategorii. Součet

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} [f(k)] = S_1 + S_3$$

bude pak roven počtu vrcholů první neb třetí kategorie položených na obrazci křivočarém ONMO.

Je-li (viz obrazec) $\overline{NM_0} = [f(n)]$, bude počet vrcholů hlavní sítě obsažených na obdélníku ONM_0M_1 patrně roven jednak $n\,.\,[f(n)]$, jednak ale jest složen z bodů kategorie prvé v počtu S_1, dále z bodů kategorie druhé obsažených na křivočarém obrazci OM_1P, jichž počet budiž S_2, a dále z bodů kategorie třetí položených na OM v počtu S_3, i bude

$$n\,.\,[f(n)] = S_1 + S_2 + S_3. \tag{2}$$

Je-li křivka OM taková, že prochází počátkem a stále se zdvihá nad osou X, takže lze její rovnici psáti

$$x = f_1(y),$$

bude patrně

$$\sum_{k=1}^{[f(n)]} [f_1(k)] = S_2 + S_3, \tag{3}$$

a následkem toho obdržíme z (1), (2), (3) vztah

$$\sum_{k=1}^{n} [f(k)] + \sum_{k=1}^{[f(n)]} [f_1(k)] = n\,[f(n)] + S_3, \tag{4}$$

kde buď opětně poznamenáno, že S_3 značí počet čísel k řady 1, 2, 3, ... n, pro něž $f(k)$ jest celistvé a kladné.

Je-li na př. rovnice křivky OM

$$y = f(x) = \sqrt[r]{x},$$

kde x je celistvé a kladné, bude tu

$$x = f_1(y) = y^r,$$

a rovnice (4) obdrží tvar

$$\sum_{k=1}^{n} E(\sqrt[r]{k}) + \sum_{h=1}^{[\sqrt[r]{n}]} h^r = (n+1)\,E(\sqrt[r]{n}), \tag{4a}$$

kde vzat zřetel k okolnosti $S_3 = E(\sqrt[r]{n})$, jež plyne odtud, že na OM leží pouze ony vrcholy, pro něž $y = 1, 2, 3, [\sqrt[r]{n}]$.

Volíme-li na př. $r = 2$, a užijeme-li vzorce

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + a^2 = \frac{1}{6}\,a\,(2a^2 + 3a + 1),$$

obdržíme odtud

$$\sum_{k=1}^{n} E(\sqrt{k}) = \frac{1}{6}\,E(\sqrt{n})\,.\,\{6n - 2E(\sqrt{n})^2 - 3E(\sqrt{n}) + 5\}\,.$$

III.

Slavný mathematik francouzský pan Hermite nalezl vlastnosť funkce $E(x)$, která se dala zobecniti.

Budiž ξ pravý kladný zlomek, n kladné číslo celistvé větší jednotky, a ustanovme číslo celistvé β podmínkou

$$\frac{\beta}{n} \leqq \xi < \frac{\beta+1}{n}, \quad \beta < n,$$

takže bude

$$\xi = \frac{\beta}{n} + \frac{\varrho}{n}, \quad 0 \leqq \varrho < 1.$$

Z veličin

$$\xi + \frac{1}{n}, \quad \xi + \frac{2}{n}, \ldots, \xi + \frac{n-1}{n},$$

některé mají za celky nullu, jiné jednotku. Jedná se o součet těchto celků. Je patrno, že veličiny

$$\xi + \frac{\alpha}{n} = \frac{\beta+\alpha}{n} + \frac{\varrho}{n} \quad \text{a} \quad \frac{\beta+\alpha}{n}$$

mají stejné celky, poněvadž platí nerovnosti

$$E\left(\frac{\beta+\alpha}{n}\right) \leqq E\left(\frac{\beta+\alpha}{n} + \frac{\varrho}{n}\right) \leqq E\left(\frac{\beta+\alpha+1}{n}\right),$$

a rozdíl krajních hodnot jest jen tehdy od nully různým, je-li $\frac{\beta+\alpha+1}{n}$ číslo celistvé; pak ale bude opět

$$E\left(\frac{\beta+\alpha}{n} + \frac{\varrho}{n}\right) = \frac{\beta+\alpha+1}{n} - 1 = E\left(\frac{\beta+\alpha}{n}\right).$$

Máme tudíž

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} E\left(\xi + \frac{\alpha}{n}\right) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} E\left(\frac{\beta+\alpha}{n}\right) = \sum_{\alpha=n-\beta}^{n-1} E\left(\frac{\beta+\alpha}{n}\right),$$

a poněvadž poslední součet sestává ze samých jednotek, má hodnotu $\beta = E(n\xi)$, takže nacházíme vztah

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} E\left(\xi + \frac{\alpha}{n}\right) = E(n\xi).$$

Na tento zvláštní případ dá se redukovati onen, kdy x je libovolná veličina kladná; znamenejme $x = a + \xi$, kde $a = \mathrm{E}(x)$, $\xi < 1$, načež

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} \mathrm{E}\left(x + \frac{\alpha}{n}\right) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \mathrm{E}\left(a + \xi + \frac{\alpha}{n}\right) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \left\{a + \mathrm{E}\left(\xi + \frac{\alpha}{n}\right)\right\}$$

$$= na + \mathrm{E}(n\xi) = \mathrm{E}(na + n\xi) = \mathrm{E}(nx),$$

čímž dokázán *vzorec Hermiteův*

$$(1) \qquad \sum_{\alpha=0}^{n-1} \mathrm{E}\left(x + \frac{\alpha}{n}\right) = \mathrm{E}(nx).$$

Zobecnění tohoto vzorce podal p. *Stern*. Buďtež m, n dvě čísla nesoudělná, takže dle známé věty budou zbytky řady

$$\frac{m}{n}, \frac{2m}{n}, \frac{3m}{n}, \ldots \frac{(n-1)m}{n}$$

až na pořádek totožny s čísly

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots \frac{n-1}{n}.$$

Uvažujme nyní součet

$$\mathrm{S} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \mathrm{E}\left(x + \frac{m\alpha}{n}\right);$$

ten bude

$$\mathrm{S} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \left\{\left(x + \frac{m\alpha}{n}\right) - \mathrm{R}\left(x + \frac{m\alpha}{n}\right)\right\},$$

značíme-li obecně symbolem $\mathrm{R}(z) = z - \mathrm{E}(z)$ zbytek čísla z, tudíž

$$(\mathrm{a}) \qquad \mathrm{S} = nx + \frac{m(n-1)}{2} - \sum_{\alpha=0}^{n-1} \mathrm{R}\left(x + \frac{m\alpha}{n}\right).$$

Avšak ke každému α přísluší jediné $\beta < n$, tak aby

$$\frac{m\alpha}{n} = \frac{\beta}{n} + \text{cel. číslo},$$

a tedy

$$\mathrm{R}\left(x + \frac{m\alpha}{n}\right) = \mathrm{R}\left(x + \frac{\beta}{n}\right) = x + \frac{\beta}{n} - \mathrm{E}\left(x + \frac{\beta}{n}\right),$$

z čehož plyne po dosazení do (a):

$$S = \frac{(m-1)(n-1)}{2} + \sum_{\beta=0}^{n-1} E\left(x + \frac{\beta}{n}\right),$$

tedy dle (1)

$$\text{(b)} \qquad S = \frac{(m-1)(n-1)}{2} + E(nx).$$

Mají-li nyní celistvá kladná čísla m, n nejv. společného dělitele d, položme $m = m'd$, $n = n'd$, načež jsou m', n' nesoudělna; součet

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} E\left(x + \frac{m\alpha}{n}\right) = \sum_{\alpha=0}^{n'd-1} E\left(x + \frac{m'\alpha}{n'}\right)$$

rozpadne se v d částí složených ze členů

$$\begin{aligned} &\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n'-1; \\ &\alpha = n',\ n'+1,\ \ldots,\ 2n'-1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha = \nu n',\ \nu n'+1,\ \ldots,\ (\nu+1)n'-1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

a poněvadž tu dle (b)

$$\sum_{\alpha=\nu n'}^{\nu n'+n'-1} E\left(x + \frac{m'\alpha}{n'}\right) = \sum_{\alpha=0}^{n'-1} E\left(x + \nu m' + \frac{m'\alpha}{n'}\right)$$
$$= \frac{(m'-1)(n'-1)}{2} + E(n'x + \nu m'n'),$$

bude hledaný součet patrně roven výrazu

$$\frac{(m'-1)(n'-1)}{2}\, d + \frac{d(d-1)}{2}\, m'n' + dE(n'x),$$

čímž dokázán *vzorec Sternův*

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} E\left(x + \frac{m\alpha}{n}\right) = \frac{(m-d)(n-d) + mn(d-1)}{2d} + dE\left(\frac{nx}{d}\right)$$

čili

$$\text{(2)} \qquad \sum_{\alpha=0}^{n-1} E\left(x + \frac{m\alpha}{n}\right) = \frac{(m-1)(n-1) + d - 1}{2} + dE\left(\frac{nx}{d}\right),$$

kde d značí největšího společného dělitele čísel m, n.

Vzorec ten lze dokázati též pomocí Fourierovské řady, kterou se dá funkce $E(x)$ vyjádřiti. Tato analytická cesta vedla k stanovení rozmanitých součtů podobného rázu, jichž odvození jsme naznačili v krátké poznámce otištěné přede dvěma lety v Comptes Rendus. Poznamenejme, že nás k vyloženému zde jednoduchému důkazu Sternova vztahu vedl princip za podobným však specialným účelem zvěčnělým P. Šimerkou užitý (viz jeho pojednání v tomto Časopise roč. V. „O součtu celých o lomené arithmetické posloupnosti).

Úlohy.

Řešení úlohy 23.

(Zaslal p. *Karel Mosler*, stud. VIII. tř. g. v Opavě.)

Rovnice tetivy procházející ohniskem paraboly

$$y^2 = 2px, \quad \text{jest} \quad y = A\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

Dosadíme-li hodnotu pro y z druhé rovnice do první, obdržíme

$$x^2 - \frac{A^2 + 2}{A^2} px + \frac{p^2}{4} = 0,$$

z níž plyne, že úsečky x_1 a x_2 průsečíků obou útvarů,

$$(1) \qquad x_1 x_2 = \frac{p^2}{4}.$$

Pokládáme-li oba díly tetivy jakožto průvodiče ϱ_1 a ϱ_2, bude

$$\varrho_1 = x_1 + \frac{p}{2} \quad \text{a} \quad \varrho_2 = x_2 + \frac{p}{2};$$

ježto má býti $\varrho_2 = 2\varrho_1$, nabudeme druhé podmínky

$$(2) \qquad x_2 = 2x_1 + \frac{p}{2}.$$

Z podmínek těchto plyne $x_1 = \frac{p}{4}$,

tedy
$$\varrho_1 = \frac{3}{4} p \quad \text{a} \quad s = 3\varrho_1 = \frac{9}{4} p.$$

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Zdeněk J. Sláma* ze VII. tř. české r. v Praze, *Josef Janík* a *Alois Liška* z VIII. tř. g. v Kroměříži, *Josef Malíř* z VIII. tř. g. v Chrudimi, *Vladimír Janků* z VIII. tř. akad. gymn. v Praze, *Ant. Starosta* ze VII. tř. r. v Brně, *Karel Rosa* z VIII. tř. g. Městské stř. šk. v Praze a *Josef Čeřovský* ze VII. tř. r. v Hradci Králové.