Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Láska

Grafické řešení rovnic

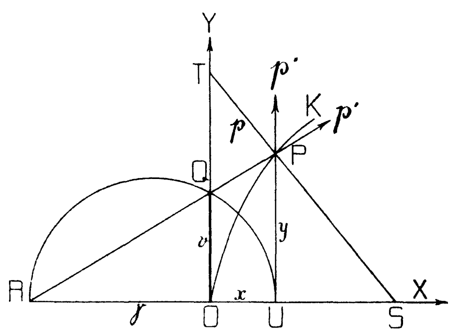
Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 5, 553--561

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122273

Grafické řešení rovnic.

Podává **V. Láska.**

Dnes řešíme rovnice, jedná-li se jen o hodnoty přibližné, nomograficky. Nomogram dá nám ihned, bez výpočtu, pouhým přiložením pravítka nejen kořeny realné, leč i imaginárné s přesností, jež závisí jen na měřítku nomogramu. V jednom z nejbližších pojednání o tom promluvíme. Zde podáváme některé konstrukce zajímavé buď jednoduchostí aneb provedením. Při tom přihlížíme jen ku kořenům realným.



Obr. 1.

I.

Sestrojme (viz obr. 1.) tři přímky

$$TS \equiv p \equiv \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0,$$

$$RQ \equiv p' \equiv -\frac{x}{\gamma} + \frac{y}{v} - 1 = 0,$$

$$UP \equiv p'' \equiv \gamma x - v^2 = 0$$

procházející bodem P. Bude

$$D \equiv \begin{vmatrix} \beta & \alpha & \alpha\beta \\ -v & \gamma & v\gamma \\ \gamma & o & v^2 \end{vmatrix} = 0$$

aneb

$$D \equiv v^3 + \frac{\beta\gamma}{\alpha} v^2 + v\gamma^2 - \beta\gamma^2 = 0,$$

co srovnáno s všeobecnou rovnicí

$$v^3 + av^2 + bv - c = 0 \tag{1}$$

dá vztahy

$$\alpha = \frac{c}{a\sqrt{b}}, \quad \beta = \frac{c}{b}, \quad \gamma = \sqrt{b}.$$

O veličině b předpokládáme, že jest kladná. Grafické řešení rovnic třetího stupně tvaru (1) vyžaduje tudíž určení průsečíku přímky

$$p \equiv \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0$$

s geometrickým místem průsečíků přímek p' a p'', t. j. s křivkou

$$K_\gamma \equiv y^2 - \frac{x}{\gamma}(x + \gamma)^2 = 0,$$

kterou snadno sestrojíme.

Budiž (viz obr. 1.) $OR = \gamma$. Bodem R rýsujme kružnici o libovolném poloměru větším než $\frac{1}{2}\gamma$, která protne osu X v bodě U a osu Y v bodě Q. Sestrojme dále $UP \perp OX$ a protněme UP přímkou, jež spojuje body R a Q. Průsečík P jest hledaným bodem křivky K_γ.

Rovnici (1) řešíme tudíž, jak následuje:

Sestrojíme křivku K_γ a protneme ji přímkou $TS \equiv p$. Tím obdržíme bod P, jenž spojen s bodem R protne osu Y v bodě Q. Jeden kořen rovnice (1) jest

$$v = OQ.$$

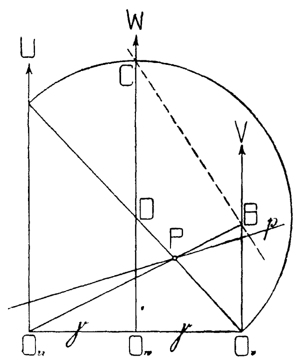
Narýsováním celého souboru křivek K_γ obdržíme nomogram řešící rovnici (1) pouhým přiložením pravítka.

Methoda zde uvedená má tu výhodu, že lze prakticky jednotlivé části křivky K_γ nahraditi přímkami.

K řešení rovnic třetího stupně v případu, kdy veličina b jest záporná, užijeme vztahů podaných v článku o sestrojování vzorců empirických *).

Budiž (viz obr. 2.) dána přímka

$$p \equiv \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v} - 1 = 0.$$



Obr. 2.

Sestrojme nomografické souřadnice libovolného bodu P této přímky a sice

$$O_u A = u, \quad O_v B = v$$

a dále kružnici s poloměrem

$$AD = \tfrac{1}{2} A O_v$$

z bodu D na kolmici $O_w W$ ve středu bodu $O_u O_v$. Kružnice ať protne onu kolmici v bodě C.

Položme dále

$$O_u O_w = O_w O_v = \gamma, \quad O_w C = w.$$

Dle konstrukce platí rovnice

$$w = O_w D + DC = \tfrac{1}{2} u + \sqrt{\frac{u^2}{4} + \gamma^2}$$

*) Viz Čas. XL., č. 1.

a tudíž

$$w^2 - wu = \gamma^2 \tag{4}$$

aneb

$$\frac{1}{u} = \frac{w}{w^2 - \gamma^2}.$$

Rovnice (3) zamění se tím na

$$\frac{\alpha w}{w^2 - \gamma^2} + \frac{\beta}{v} - 1 = 0,$$

z které pro $v = w$ obdržíme

$$w^3 - (\alpha + \beta) w^2 - \gamma^2 w + \beta\gamma^2 = 0. \tag{4'}$$

Řešení rovnice (4) vyžaduje vyhledání takové polohy přímky CB, aby $CB \parallel O_u O_v$.

K tomu cíli sestrojíme nomografickou křivku veličin

$$O_w C = w, \quad OB = v$$

a vytyčíme ve středu přímky $O_w O_v$ kolmici. Průsečík obou určuje nomografický bod, jehož souřadnice vyhovují rovnici $w = v$.

Rovnice (4) dá nám zároveň zajímavé řešení rovnic druhého stupně, které ponecháváme čtenáři.

Jak zevšeobecniti methody svrchu uvedené, jest na bíle dni.

Položme na př. v obr. 1.

$$OR = f_1(v), \quad OQ = f_2(v), \quad OU = f_3(v)$$

bude

$$D \equiv \begin{vmatrix} \beta & \alpha & \alpha\,\beta \\ -f_2(v) & f_1(v) & f_1(v)\, f_2(v) \\ 1 & 0 & f_3(v) \end{vmatrix} = 0$$

aneb

$$D \equiv f_1(v) \left\{ \alpha f_2(v) + \beta f_3(v) - \alpha\beta \right\} + \alpha f_2(v)\, f_3(v) = 0 \tag{5}$$

Funkce f volíme tak, aby se daly snadno sestrojiti.

Je-li na př.

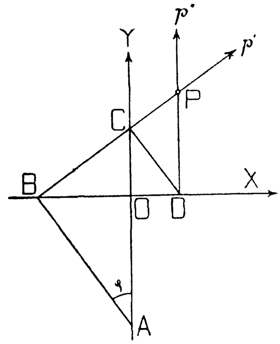
$$f_1(v) = \gamma, \quad f_2(v) = f_3(v) = v,$$

obdržíme

$$\alpha v^2 + v\gamma(\alpha + \beta) - \alpha\beta\gamma = 0. \tag{6}$$

Další vhodné tvary dá nám následující konstrukce (viz obr. 3.). Rýsujme v soustavě pravoúhelných souřadnic OXY při libovolně volených bodech A na ose Y a B na ose X,

$$BC \perp AB, \quad CD \perp CB$$



Obr. 3.

a položme

$$OA = \gamma, \quad \sphericalangle OAB = \varphi,$$

bude:

$$OB = \gamma \, tang \, \varphi$$
$$OC = \gamma \, tang^2 \, \varphi$$
$$OD = \gamma \, tang^3 \, \varphi.$$

Je-li dále

$$\gamma \, tang \, \varphi = v,$$

bude i

$$f_1(v) = v, \quad f_2(v) = \frac{v^2}{\gamma}, \quad f_3(v) = \frac{v^3}{\gamma^2}.$$

Determinant D zamění se tím na

$$v^4 + \frac{\gamma\beta}{\alpha} v^2 + \gamma^2 v - \gamma^3\beta = 0. \tag{7}$$

Řešení úplných rovnic stupně čtvrtého

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx = D \tag{8}$$

jest již složitější. Budiž dána křivka*)

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1 \tag{9}$$

---

*) O této křivce viz: *G. Loria*, Spez. alg. und trans. ebene Kurven, II. vydání, str. 226 a 328.

v souřadnicích pravoúhelných a

$$mu + nv = 1 \tag{10}$$

v souřadnicích nomografických.

Převedením rovnice (10) v soustavu souřadnic pravoúhelných pomocí vztahů

$$u = \frac{py}{p - x}, \quad v = p\frac{y}{x}$$

obdržíme:

$$y = \frac{1}{p}\frac{x(p - x)}{x + np}$$

a vložením této hodnoty do rovnice (9) po krátké redukci

$$x^4 - 2px^3 + (p^2 - a^2 - b^2p^2)x^2 + 2p(a^2 - np^2b^2)x$$
$$= p^2(a^2 + b^2n^2p^2).$$

Srovnáme-li rovnici poslední s rovnicí (8), bude

$$A = -2p,$$
$$B = p^2 - a^2 - b^2p^2,$$
$$C = 2p(a^2 - np^2b^2),$$
$$D = p^2(a^2 + b^2n^2p^2).$$

Ze kterých rovnic snadno vypočteme veličiny

$$a, b, p, n.$$

Řešení rovnice (8) redukováno tím na sestrojení průsečíků křivek (9) a (10).

Sestrojení křivky

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} - 1 = 0$$

provedeme, jak následuje (obr. 4.).

Rýsujme $O_uO_v = a$, vytyčme v bodech O_u, O_v kolmice O_uU, O_vV a podobně ve středu O bodů O_u, O_v kolmici OY. Na O_uU a O_vV nanesme délky

$$O_uA = O_vB = \tfrac{1}{2}b.$$

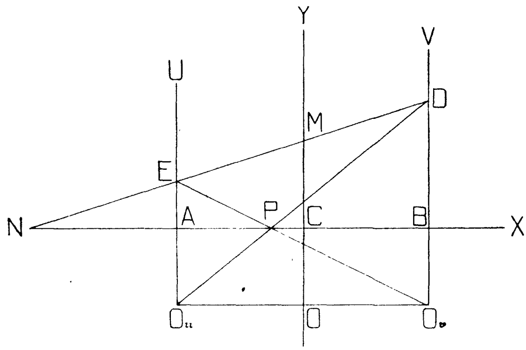
Přímka AB ať protne přímku OY v bodě C. Bod ten považujme za střed soustavy pravoúhelných souřadnic, v které přímka AB jest osou X.

Vedeme-li libovolným bodem P přímky AB spojky O_uP, O_vP, obdržíme na osách U u V průsečíky E, D, které opět protnou osy X, Y v bodech M, N.

Rýsujeme-li konečně

$$MS \parallel AB, \quad NS \parallel CY,$$

bude průsečík S bodem křivky (9).



Obr. 4.

Důkaz této konstrukce ponecháváme čtenáři.

Poněvadž křivka (9) jest všestranně symmetrická, stačí narýsovati jen jednu čtvrtku.

Druhou křivku obdržíme kruhovou *Steinerovou* trasformací nomografické přímky. Píšeme-li ji ve tvaru

$$mp^2u + np^2v = p^2,$$

obdržíme následující sestrojení.

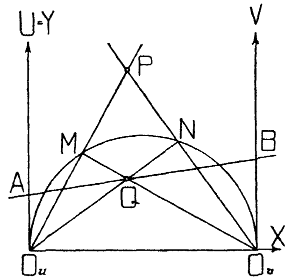
Na ose X (viz obr. 5.) vytyčme ve vzdálenosti $O_uO_v = p$ kolmici O_vV, jež bude nomografickou osou V. Nad poloměrem O_uO_v opišme kružnici. Dále rýsujme přímku AB určenou úsečkami $O_uA = np^2$ a $O_vB = mp^2$.

Na přímce AB volíme libovolně bod Q, rýsujeme spojky O_uQ a O_vQ, jež protnou kružnici v bodech M a N. Průsečík P přímek O_uM a O_vV jest bod křivky definované rovnicí (10).

Jsou-li totiž u a v nomografické souřadnice bodu Q, platí vzory

$$uv_1 = u_1 v = p^2,$$
$$\frac{np^2}{u} + \frac{mp^2}{v} = 1,$$

ze kterých eliminujíce veličiny u_1 a v_1 obdržíme rovnici (10).



Obr. 5.

II.

Grafická konstrukce podává hodnoty přibližné. Jak sestrojiti přesnější, ukáže příklad: Budiž v hodnota nalezená při grafickém sestrojení rovnice (1). Jí odpovídá určitý bod $x_0 y_0$ křivky K_γ, jenž dán jest rovnicemi

$$x_0 = \frac{v_0^2}{\gamma}, \quad y_0 = v_0 \frac{x_0 + \gamma}{\gamma} \qquad (15)$$

a jehož tečna určena jest poměrem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma + 3x_0}{2v_0}.$$

Poněvadž v_0 nevyhovuje přesně rovnici (1), bude i kolmá vzdálenost d bodu $x_0 y_0$ od přímky

$$p \equiv \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0,$$

t. j.

$$d = \frac{x_0\beta + y_0\alpha - \alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \qquad (17)$$

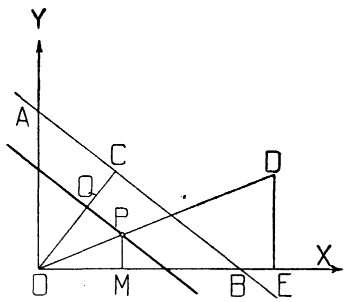
určitá, ač velmi malá hodnota.

Nahradíme-li malou část křivky mezi bodem $x_0 y_0$ a přímkou p, tečnou v bodě $y_0 x_0$ sestrojenou, obdržíme následující konstrukci viz obr. 6.).

Položme začátek pravoúhelných souřadnic přímo do bodu $x_0 y_0$ a rýsujme v měřítku na př. stokráte větším onoho, v kterém provedli jsme původní sestrojení, přímku AB na základě hodnot

$$OA = \frac{\alpha}{100}, \quad OB = \frac{\beta}{100}.$$

Přímku p obdržíme, rýsujeme-li $OC \perp AB$, dále $OQ = d$ (hodnota ta musí býti vypočtena) a vedeme-li bodem Q rovnoběžku k AB.



Obr. 6.

Tečna křivky K_γ v bodě O prochází bodem D, jehož souřadnice jsou (viz rov. 16)

$$OE = 2v_0, \qquad ED = \gamma + 3x_0,$$

při čemž potřebné veličiny v_0, γ, x_0 béřeme přímo z původní konstrukce.

Spojka OD protne přímku p v bodě P a dá souřadnici

$$OM \doteq dx.$$

Z rovnice (15) plyne konečně

$$dv = \frac{\gamma}{2v} dx.$$

Postup jest tudíž následující. S hodnotou v_0, vzatou přímo z původní konstrukce, vypočteme z rovnic (15) hodnoty $x_0 y_0$ a z rovnice (17) vzdálenost d. Konstruktivně určíme dx a výpočtem dle rovnice (18) hodnotu dv. Hledaný kořen jest

$$v_0 + dv.$$