Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav A. Hruška

Konstrukce bodů vratu vrženého stínu sborcené plochy třetího stupně

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 5, 562--570

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122269

Konstrukce bodů vratu vrženého stínu sborcené plochy třetího stupně.

Hruška Václ. A., kand. prof. v Praze.

V tomto pojednání vyložím konstrukci bodů vratu vrženého stínu sborcené plochy třetího stupně o dvou řídicích přímkách[1]). Vylučuji tedy z toho t. zv. plochu Cayleyovu.

I.

Vržený stín má bod vratu tam, kde tečna meze vlastního stínu jde bodem svíticím. Dotyčné body těchto tečen ze svíticího bodu vedených k mezi vlastního stínu slují „body limitní“[2]) Limitní body mají ten význam, že oddělují reálnou část meze vlastního stínu od virtualné části. Stačí tedy k řešení předložené úlohy najíti tyto limitní body.

Dána-li sborcená plocha třemi řídicími křivkami n_i, $i = 1, 2, 3$, a je-li $\alpha_{i,k}$; $i, k = 1, 2, 3$, $i \neq k$ počet průsečíků křivky i-té s křivkou K-tou, tu je stupeň n sborcené plochy dán vzorcem[3]):

$$n = 2 . n_1 . n_2 . n_3 - n_1 . \alpha_{2,3} - n_2 . \alpha_{3,1} - n_3 . \alpha_{1,2} .$$

Tedy pro $n = 3$, $n_1 = n_2 = 1$, $\alpha_{1,2} = 0$[4]) jde jako jediné řešení této rovnice buď:

$$n_3 = 2, \quad \alpha_{2,3} = 1, \quad \alpha_{3,1} = 0$$

aneb:

$$n_3 = 2, \quad \alpha_{2,3} = 0, \quad \alpha_{3,1} = 1.$$

Lze tedy každou sborcenou plochu třetího stupně — vyjímaje plochu Cayleyovu — určiti dvěmi mimoběžnými přímkami a kuželosečkou K, protínající jednu z obou těch mimoběžek. Označ ji D; druhou označ $\varDelta$. Pak bude D dvojitou přímkou

---

[1]) Na každé sborcené ploše třetího stupně existují buď dvě přímky reálné, které protínají všecky generatrie plochy, nebo existuje jen jediná taková přímka a pak plocha sluje Cayley-ova. Viz: *Ch. Wiener*: *Lhrb. d. darst. geom. II. odst. 421.*

[2]) *Mannheim*: Cours de géométrie descriptive de l'École polytechnique.

[3]) *Rohn-Papperitz*: Lhrb. d. darst. geom. III. odst. 246.

[4]) Kdyby bylo $\alpha_{1,2} = 1$, tu by se obě řídící přímky protínaly, a všecky generatrie plochy by ležely v téže rovině.

plochy, kdežto Δ bude jednoduchá. Každá generatrie plochy pak protíná i D i Δ.

Každá rovina α vedená některou generatrií G protíná plochu ještě v kuželosečce, která protíná generatrii G ve dvou bodech: v dotyčném bodě roviny α a v bodě, v němž se protíná G s D. Každá rovina vedená přímkou D protíná plochu ještě jen v jedné přímce, která je generatrií, kdežto každá rovina vedená přímkou Δ protíná plochu ještě ve dvou generatriích, které se protínají na D.

Protože tečná rovina sborcené plochy jde vždy některou generatrií a naopak: každá rovina jdoucí některou generatrií je tečnou rovinou plochy sborcené, je sborcená plocha stupně n-tého vždy také n-té třídy.

Buď nyní dán svítící bod s, ležící mimo danou sborcenou plochu třetího stupně Ω. Mez vlastního stínu na ploše Ω je průsečnice plochy Ω s první polární plochou Σ bodu s vzhledem k ploše Ω[5]). Protože D je dvojnou přímkou plochy Ω, která je třetího stupně, je Σ přímkovou plochou druhého stupně a jde přímkou D. Zbytek průseku ploch Ω a Σ je hledaná mez vlastního stínu M. Je tedy M křivkou čtvrtého stupně druhého druhu[6]), t. j. kromě plochy Σ nelze proložiti křivkou M žádnou jinou plochu druhého stupně.

Vržený stín plochy je tedy křivka *stupně čtvrtého.* Protože plocha Ω je *třídy třetí,* je také dotyčný kužel o vrcholu s třídy třetí, a tedy také *vržený stín je křivka třídy třetí.*

Dle vzorce Plückerova:[7])

$$\nu = n\,(n - 1) - 2\,\delta - 3\,\varrho.$$

kde značí n stupeň, ν třídu, δ počet dvojných bodů a ϱ počet bodů vratu, jde pro $n = 4$, $\nu = 3$ jako *jediné* řešení $\delta = 0$, $\varrho = 3$.

Ze vzorce duálného:

$$n = \nu\;(\nu - 1) - 2.\;\varkappa - 3\;\iota,$$

---

[5]) Tuto větu jakož i některé další viz: *L. Cremona-M. Curtze: Grundzüge einer allgem. Theorie d. Oberflächen in synthet. Behandlung.*

[6]) Dr. Christ. Wiener: cit. odst. 427.

[7]) L. Cremona-Em. Weyr: Úvod do geometr. theorie křivek rovinných odst. 99.

kde značí $\varkappa$ počet dvojných tečen a ι počet bodů inflexních, jde pro $n = 4$, $\nu = 3$ jako *jediné* řešení: $\varkappa = 1$, $\iota = 0$.

Vržený stín sborcené plochy třetího stupně je křivka čtvrtého stupně, třetí třídy, bez bodů víceronásobných a bez bodů inflexních, s třemi body vratu a jednou dvojnou tečnou.

Tato dvojná tečna je stopa roviny $(s, \varDelta)$ na průmětně a její dotyčné body jsou vržené stíny průsečíků přímky $\varDelta$ s oběma generatriemi plochy ležícími v rovině $(s, \varDelta)$.

Mez vlastního stínu na sborcené ploše třetího stupně má tři body limitní.

Protože vržený stín oné generatrie, která jde některým bodem limitním, je tečnou v příslušném bodě vratu vrženého stínu a protože platí věta[8]): ***Tečny v bodech vratu křivky třetí třídy jdou jedním bodem***; lze svítícím bodem s vésti příčku k oněm třem generatriím plochy Ω, které jdou každá jedním bodem limitním.

Buď a jeden bod limitní a A generatrie jím vedená. Tečna meze vlastního stínu M v a, buď to T^ν, jde bodem svíticím s, a je druhou asymptotou indikatrie (hlavní tečnou) v a[9]). A naopak každá hlavní tečna plochy Ω jdoucí bodem svítícím s dotýká se plochy Ω v bodě limitním meze vlastního stínu.

Naši úlohu řešíme tedy tím, najdeme-li všecky hlavní tečny plochy Ω vedené bodem s. Hlavní tečny plochy Ω podél některé generatrie tvoří t. zv. *oskulační hyperboloid*. Najdu-li všecky oskulační hyperboloidy plochy Ω, které jdou bodem s, mohu najíti snadno body limitní. Každý z oskulačních hyperboloidů obsahuje přímky D a $\varDelta$; tedy každý z oskulačních hyperboloidů jdoucích bodem s obsahuje příčku S k mimoběžkám D, $\varDelta$ vedené bodem s, neboť S má s každým takovým oskulačním hyperboloidem tři body společné.

Jsou-li a, b, c body limitní, A, B, C generatrie jimi jdoucí, ${}^1A$, ${}^1B$, ${}^1C$ resp. jich vržené stíny, tu ${}^1A$, ${}^1B$, ${}^1C$ jdou jedním bodem f, jak bylo odvozeno Lze tedy ku čtyřem mimoběžkám:

---

8) Věta tato je duálná k větě: Body inflexní křivky třetího stupně leží potrojmo na přímce. Viz: *Cremona-Weyr*, cit. odst. 139*b*.

9) *Mannheim*, cit.

A, B, C, S vésti tři příčky, totiž: $D, \Delta, \overline{ts}$; leží tedy přímky A, B, C, S na hyperboloidu. Toho použiji k zjednodušení konstrukce bodů limitních.

II.

Každou sborcenou plochu třetího stupně, lze uvésti do kollineace[10]) s plochou třetího stupně, jejíž přímka Δ je v nekonečnu, a D je kolmá k rovině, jejíž úběžnicí je Δ. Pro zjednodušení konstrukce provedu ji na této specielní ploše, což je dovoleno bez újmy obecnosti, neboť konstrukce je čistě projektivní.

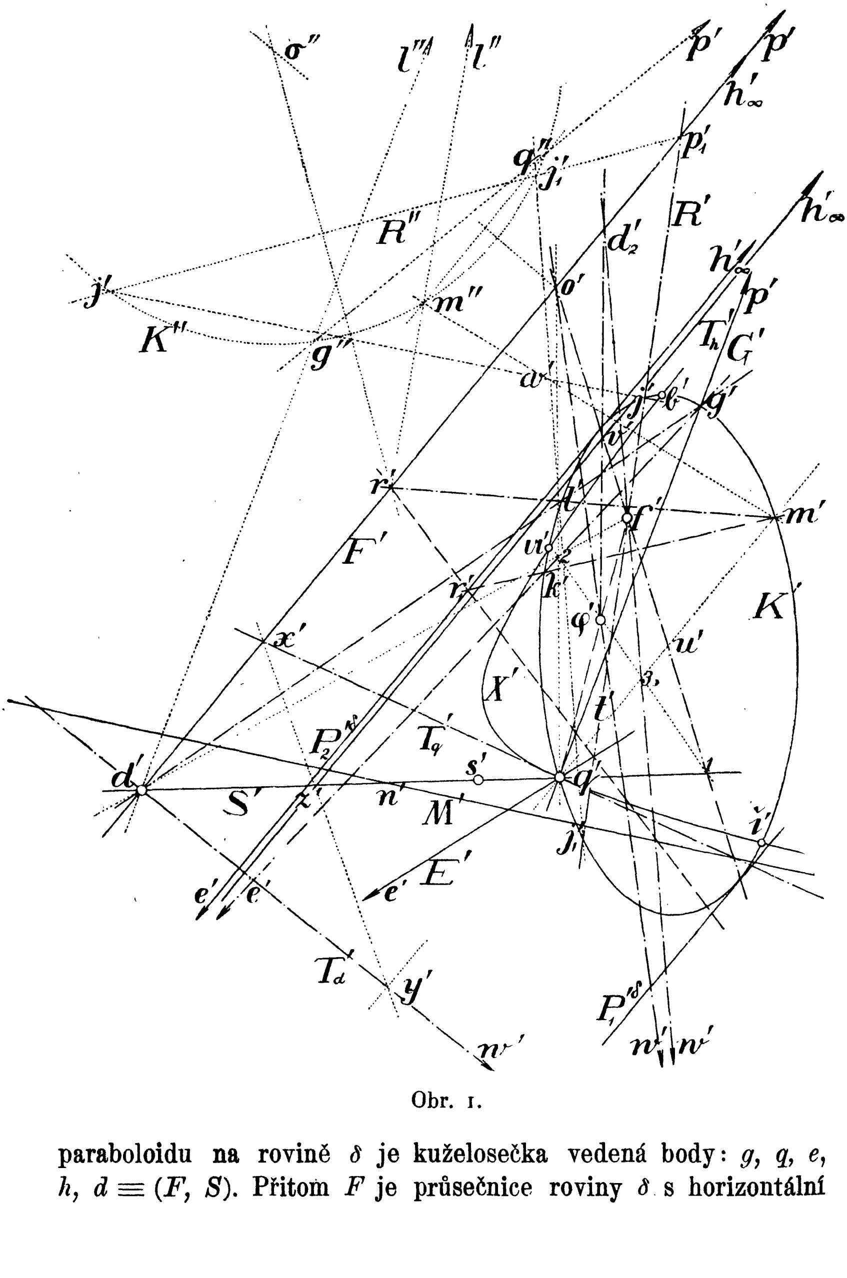
Za průmětnu π volím tečnou rovinu podél jedné z přímek torsálných (obr. 1.). Směr promítání je kolmý na π. Δ leží v π a je $D \perp \pi$. Tečnou rovinu podél druhé z přímek torsálních volím za rovinu ν. Přímky a roviny určím stopami na průmětně a na rovině ν. Řídicí kuželosečka K protíná přímku D v bodě q; rovina kuželosečky K buď δ; označ $h \equiv (\Delta, \delta)$. V našem případě je tedy h úběžný bod průmětné stopy roviny δ, značím jí P_1^δ. Buď P_2^δ stopa roviny δ na rovině ν. Jest $P_1^\delta \parallel P_2^\delta$ a kuželosečka K dotýká se obou přímek P_1^δ i P_2^δ. Průměty útvarů prostorových budu značiti akcentem. Průmět přímky D je bod $D' \equiv q'$. Veď nyní bodem s příčku S k D, Δ. Je $S \parallel \pi$ a S' jde body D' a s'.

Vedu nějakou generatrii plochy Ω a označím jí G. Jest $G \parallel \pi$, G' jde bodem D'. Buď g bod v němž G protne K. Vedu přímkami S, G nějaký sborcený paraboloid[11]). Buď jeho stopa na rovině ν přímka E. Tento paraboloid se protíná s Ω již v přímkách D, která se čítá dvakrát, G, Δ, které se čítají každá jednoduše. Zbytek proniku je tedy quadratický a sice jsou to dvě mimoběžné generatrie. Neboť vedu li některým bodem tohoto quadratického útvaru příčku mimoběžek D a Δ, je tato příčka generatrií jak na paraboloidu tak na Ω. Abych našel tyto dvě generatrie tvořící zbytek proniku paraboloidu s Ω, najdu si stopu toho paraboloidu na rovině δ, protnu

[10]) Viz poznámku na konci tohoto článku.

[11] Neboť oskulační hyperboloid změní se zde v oskulační paraboloid, neboť obsahuje tři soumezné přímky rovnoběžné s π.

tuto stopu s K, což se stane vedle v bodech q, g ještě ve dvou bodech, a generatrie těmito body vedené jsou hledané Stopa



Obr. 1.

paraboloidu na rovině δ je kuželosečka vedená body: g, q, e, h, $d \equiv (F, S)$. Přitom F je průsečnice roviny δ s horizontální rovinou vedenou přímkou S. Položím-li body q, g, h, d, svazek kuželoseček, vytne mi na K involuci o pólu $r \equiv (F, \overline{ml})$, $l \equiv (K, \overline{dg})$, $m \equiv (K, \overline{qm})$, $\overline{qm} \parallel F$. Podobně bude $r_1 \equiv (P_2^\delta\ \overline{mk})$, $k \equiv (K, \overline{eg})$ pól involuce na K vyťaté svazkem položeným body q, g, h, e. Je tedy $\overline{rr_1}$ spojnice průsečíků stopy paraboloidu na δ s K. Hleď nyní vésti přímkami G, S paraboloid tak, aby se dotýkal plochy Ω podél některé její generatrie. To nastane tenkráte, bude-li $\overline{rr_1}$ tečnou ke K. Buďte oba dotyčné body tečen z r ke K vedených j, j_1. Pak generatrie J bodem j a J_1 bodem j_1 mají tu vlastnost, že paraboloid vedený přímkami J, G, S dotýká se plochy Ω podél přímky J, kdežto paraboloid určený J_1, G, S dotýká se podél J_1. Body j, j_1 jsou také průsečíky K s polárou R bodu r vzhledem ke K. Tato přímka R *jde stále pólem f přímky F vzhledem ke K*, ať je r kdekoliv na F.

Pohybuje-li se nyní bod g po K, popíše G celou plochu. Body g, l pak tvoří na K involuci, neboť $\overline{gl}$ jde stále bodem s. Protože bod m je stálý a dále protože je:

$$F(r, \ldots) \,\overline{\wedge}\, f(R, \ldots),$$

bude také:

$$K(g, \ldots) \,\overline{\wedge}\, f(R, \ldots).$$

Označím-li tedy $\mathfrak{G}$ průsečnici promítací roviny přímky G s rovinou δ, bude: $\mathfrak{G} \equiv \overline{qg}$ a bude tedy:

$$q(\mathfrak{G}, \ldots) \,\overline{\wedge}\, f(R, \ldots).$$

Tyto svazky vytvoří tedy kuželosečku Y, jdoucí body q, f. Označ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zbývající průsečíky křivek K, Y, pak generatrie vedené těmito body $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ mají tu vlastnost, že dotyčný paraboloid podél každé jedné z nich vedený tak, aby obsahoval přímku S, bude zároveň plochu oskulovati podél dotyčné generatrie. Lze tedy bodem s vésti tři paraboloidy oskulující plochu Ω, právě jak bylo vyloženo. Generatrie body $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ vedené lze tedy označiti A, B, C a na každé z nich leží jeden bod limitní.

Označ nyní průsečík přímky, $\mathfrak{G}$ s F písmenou p a $(R, F) \equiv p_1$. Najdu-li ke každému bodu na přímce F bod odpovídající tak jako p_1 odpovídá bodu p, dostanu na F dvě promětné soumístné řady. Protože jedna (totiž řada bodů p) vznikne průsekem svazku přímek $\mathfrak{G}$ o vrcholu q s F a druhá zase je průsekem F se svazkem přímek R o vrcholu f, který je s prvnějším svazkem promětný: budou samodružné body těch dvou řad bodových průsečíky kuželosečky Y s F. Protože však mimo to obě ty řady jsou v involuci — jak ihned dokáži — budou body p, p_1 sdruženými póly (harmonickými) vzhledem ke kuželosečce Y.

Důkaz, že body p p_1 tvoří involuci, je snadný, jsou-li průsečíky F s K — označím je $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$ — reálné. Stane-li se totiž $p \equiv \mathfrak{d}$, bude $p_1 \equiv \mathfrak{d}_1$, a naopak při $p \equiv \mathfrak{d}_1$ bude $p_1 \equiv \mathfrak{d}_1$. Platí tedy pro jeden pár bodů obou řad záměnnost a platí to tedy obecně. Jsou-li $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$ imaginárné nebo reálné — důkaz platí stejně — provedu napřed v rovině δ takovou transformaci kollineárnou (homografickou), která převede kuželosečku K v kružnici, a dokáži větu pro kružnici. Přirozeně musí pak věta platiti i pro kuželosečku K. Za osu této kolineace vol přímku F. Nakresli v rovině δ nějakou kružnici, která indukuje na F tu samou involuci harmonických pólů, jako K. Buď střed této involuce o. Pak bude ta kružnice s K v kollineaci. Otoč nyní tuto kružnici kol F do roviny rovnoběžné s průmětnou. Ještě nyní bude ta kružnice s K v kollineaci dle jistých dvou center. Označ K'' tuto otočenou kružnici. K'' indukuje na F tu samou involuci, jako K. Abych narýsoval K'', zvolím si její střed σ na $\overline{o\sigma} \perp F$ tak libovolně, aby bylo $\overline{p_1 o} \,.\, \overline{or} < \overline{o\sigma}^2$ [12]). Nad průměrem $\overline{r\sigma}$ opíši kružnici, kterou protnu s kolmicí z p_1 spuštěnou na $\overline{r\sigma}$ v bodech j'', j_1'' *). Pak kružnice kol σ poloměrem $\overline{\sigma j''} = \overline{\sigma j_1''}$ opsaná je hledaná K''. Přímka $\overline{j'' j_1''}$ je polárou bodu r vzhledem ku K''. Oba středy, dle nichž jsou K, K'' kollinearné, jsou body: $(\overline{j''j_1}, \overline{j_1''j})$, jehož průmět padne mimo nákresnu a $\omega \equiv (\overline{j''j}, \overline{j_1''j_1})$. V obraze jsem zvolil ω. Body: q'', m'', g'', l'' korrespondující bodům resp.: q, m, g, l, najdu pomocí: $\overline{q\omega}$ jde q'', $\overline{q''m''}$ je $\parallel F$, $\overline{q''g''}$ jde bodem p_1, $\overline{\omega g}$ bodem g'', $\overline{dg''}$ bodem l'' a $\overline{l''m''}$ bodem r. Nyní sezná se snadno, že je: $\overline{or} \,.\, \overline{op_1} = - \mathfrak{M}_0$, kde $\mathfrak{M}_0$ značí mocnost bodu o vzhledem ke K''. Dále jde z: $\triangle drl'' \sim \triangle dg''p$, že je $\overline{dr} \,.\, \overline{dp_1} = + \mathfrak{M}_d$. Označíme-li d_2 pól sdružený s d vzhledem ke K, seznáme snadno, že vzhledem $k: \overline{od_2} \,.\, \overline{od} = - \mathfrak{M}_0$ jest:

[12]) Při $\overline{p_1 o} \,.\, \overline{or} > \overline{o\sigma^2}$ byla by K'' imaginární, při $\overline{p_1 o} \,.\, \overline{or} = \overline{o\sigma^2}$ redukovala by se na bod σ, vlastně na obě isotropické (minimální) přímky jdoucí bodem σ.

*) V obrázku omylem místo j'', j''_1 psáno j', j'_1.

$\overline{d_2p} \cdot \overline{d_2p_1} = \mathfrak{M}_0 + \overline{od}_2^2 = \mathfrak{M}_{d_2}$, což ukazuje, že skutečně tvoří body p, p_1 involuci. Její střed je d_2.

Najdi nyní bod odpovídající v této involuci bodu d. Konstrukce dá, že je to bod o. Teď mohu pohodlně ustanoviti dostatečný počet bodů křivky Y. Dostanu tedy body na Y: $1 \equiv (\overline{qd}, \overline{fo})$, $2 \equiv (\overline{qo}, \overline{fd})$, $3 \equiv (\overline{qh\infty}, \overline{fd_2})$. Protože čtyřroh $qf12$ je do Y vepsán a F je jednou jeho diagonálou, je $\varphi \equiv (\overline{qf}, \overline{12})$ pólem přímky F vzhledem ku Y. Protože platí: $(\overline{oq}, \overline{of}, \overline{o\varphi}, \overline{oh}) = -1$, jde $\overline{o\varphi}$ bodem t na $\overline{qh}$, pro nějž je $(q, u, t, h) = -1$. Je-li tedy h v nekonečnu jako na obrázku, jest $\overline{qt} = \overline{tu}$.

Kuželosečka Y je dána pěti body: f, q, 1, 2, 3. Její konstrukce není proto právě pohodlná. Proto použiji zjednodušení ohlášeného již v prvé části tohoto článku. — Přímkami A, B, C, S lze položiti quadratickou plochu. Buď její stopa na rovině δ kuželosečka X. Ta jde body: q, h, d, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$. První tři z těchto bodů známe. Stačí proto znáti ještě na př. dvě tečny. K jich ustanovení použiji věty dobře známé: *Poláry nějakého bodu ke všem kuželosečkám svazku jdou jedním bodem.* K, X, Y jsou tři kuželosečky takového svazku. Polára bodu h ke K je $\overline{of}$, ku Y je to $\overline{\varphi d_2}$, a tedy je $\overline{vh}$, kde $v \equiv (\overline{of}, \overline{\varphi d_2})$, polárou bodu h ku X a protože jde bodem h, je to tečna k X v h. Stejně jde, že $\overline{\mathfrak{w}d}$ je tečnou v d; při tom je $\mathfrak{w} \equiv (\overline{fd_2}, \overline{ot})$. K určení středu kuželosečky X najdu ještě dle věty Pascalovy tečnu v q. Bude to přímka $\overline{xq}$, kde je: $y \equiv (\overline{qm}, \overline{\mathfrak{w}d})$, $z \equiv (\overline{vh}, \overline{dq})$, $x \equiv (\overline{yz}, F)$. Nyní známe tečny v bodech d, q, h. Je-li h v nekonečnu, je T_h asymptotou; dle věty, že bod dotyčný rozpoluje úsek tečny mezi asymptotami, najdeme asymptotu druhou M. Je-li h v konečnu, známe trojúhelník kuželosečce opsaný a dotyčné body jeho stran. Pak snadno sestrojíme dle známých vět střed, sdružené průměry a po případě osy kuželosečky, aby její konstrukce byla přesná, zvláště v okolí průsečíků s K. V případě, že je h v nekonečnu, sestrojíme také druhou asymptotu křivky X snadno pomocí: $-\overline{qz} = \overline{dn}$, aniž bychom rýsovali tečnu v q. Jsou-li nyní $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zbývající průsečíky křivek X, K, tu hledané body limitní leží na povrchových přímkách A, B, C body těmi vedenými. Bod limitní na př. na přímce A dostanu, vedu-li svíticím bodem s a přímkou A rovinu a najdou její dotyčný bod a. Ten je hledaným bodem limitním.

Konečný tvar konstrukce přímek A, B, C je tedy: *Najdu body:* $q \equiv (\delta, D)$, $h \equiv (\delta, \triangle)$; *svíticím bodem s vedu příčku S k mimoběžkám* D, $\triangle$, označím *F průsečnici rovin* δ a $(\overline{S, \triangle})$, $d \equiv (\delta, S)$ *leží na F. Najdu poláry* $\overline{of}$ *bodu h a* $\overline{d_2 f}$ *bodu d vzhledem ke K, spojím* $\overline{qh}$ *a označím:* $(\overline{qh}, \overline{of}) \equiv u$. *Najdu t tak, aby* $(q, u, t, h) \equiv -1$, *označím:* $(\overline{ot}, \overline{d_2 f}) \equiv \mathfrak{w}$, $(\overline{qf}, \overline{ot}) \equiv \varphi$, $(\overline{of}, \overline{\varphi d_2}) \equiv v$, *pak* $\overline{vh}$ *je tečnou v h a* $\overline{d\mathfrak{w}}$ *v d k X. Je-li dále:* $y \equiv (\overline{qh}, \overline{d\mathfrak{w}})$, $z \equiv (\overline{dq}, \overline{vh})$, $x \equiv (\overline{yz}, F)$, *je* $\overline{xq}$ *tečnou v q. Nyní snadno narýsuji X, jejíž průsečíky* s *K jsou body* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.

Podotýkám ještě: Protože každou sborcenou plochu třetího stupně lze uvésti do kollineace s konoidem Plückerovým, stačí důkaz provésti pro konoid Plückerův. Pro tuto plochu je K' kružnicí a tedy při důkazu odpadne pomocná kružnice K''.

Stanovení oskulačních hyperboloidů sborcených ploch třetího a čtvrtého stupně, jež lze jim daným bodem vésti.

Dr. **František Kadeřávek**, assistent české techniky v Praze.

Plocha sborcená třetího stupně **P** buď dána kuželosečkou A a přímkami B, C, z nichž B protínej křivku A; hledejme oskulační hyperboloid procházející daným bodem s. Kdyby předložená úloha byla již vyřešena hyperboloidem **H**, oskulujícím danou plochu podél přímky P, pak by rovina ϱ bodem s a libovolnou površkou plochy **P** určená protala plochy **P** a **H** v kuželosečkách π a χ, které by se v průsečném bodě p přímky P s rovinou ϱ oskulovaly protínajíce se ještě v bodě průsečném b přímky B s rovinou ϱ. Křivka χ mimo to musila by procházeti bodem s a průsečíkem c přímky C s rovinou ϱ — náležejíť obě přímky B i C oskulačnímu hyperboloidu.

Z toho patrno, že předložená úloha redukuje se na následující rovinnou úlohu:

Body b, c, s proložiti kuželosečku tak, aby oskulovala danou, bodem b procházející kuželosečku π, kterouž úlohu řešíme takto:

Zvolme si na křivce π (viz obr.) libovolný bod d a sestrojme křivku H, která jdouc body b, s, c křivky π se v bodě d dotýká.