Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Čeněk Jarolímek

O průmětě průseku dvou točných ploch II. řádu na společnou rovinu hlavní

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 11 (1882), No. 3, 179--190

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122261`

Tyto poznámky snad postačí k důkazu, že jak co do pojmutí cílů, tak co do výboru prostředků k dosažení oněch cílů určených nalezti lze tolik libovolného, že zde mnoho zbývá ještě pro exaktní vědecké vyvinování, při němž by to co *myšlenkově nutným* a praktickému upotřebení zároveň přirozeně přiměřeným jest, již v základech systému k *uvědomění* pokud možno *jasnému přivedeno bylo.*

Aniž bychom se zde pouštěli v úvahy o různých velmi závadných následcích vyplývajících ze způsobu, jakým posud o tomto tak důležitém předmětu se jednalo, poukážeme v následujících článcích *k dosahu a charakteru přípravného vyučování* deskriptivní geometrie na *prvních stupních jeho vývoje,* a vynasnažíme se ukázati, jak vyhověti lze výslovnému, vznešenému úmyslu zakladatele geometrie deskriptivní nejen co do cílů jejích, nýbrž i co do prostředků všestranně přiměřených, aniž by třeba bylo dále užívati materialu Mongem při *stavbě systému* upotřebeného, z dob minulých převzatého, pokud by se nebyl osvědčil úplně, a jak přirozeně a zúplna nahraditi lze material tento zároveň ve smyslu „*instrukce*“ svrchu uvedené. (Pokrač.)

O průmětě průseku dvou točných ploch II. řádu na společnou rovinu hlavní.

Podává

Č. Jarolímek.

1. Dvě plochy II. řádu **P** a **R**, jež mají společnou rovinu hlavní π, protínají se obecně ve prostorové křivce IV. řádu Σ, jejíž orthog. průmětem na rovinu π (a tudíž i na každou průmětnu $\| \pi$) jest křivka řádu *druhého* Σ_1 (obr. 1.). Každou přímku σ_1 ve průmětně π lze totiž pokládati za stopu roviny $\sigma \perp \pi$, jež protíná plochy **P** a **R** v kuželosečkách, z nichž každá jest souměrna ku rovině π; křivky tyto protínají se ve čtyřech bodech, z nichž dva a dva, jsouce ku π souměrny, mají průmět společný: křivka Σ_1, majíc s každou přímkou své roviny toliko dva body společné, jest tedy kuželosečkou. Ježto však v ní stotožňují se průměty obou částí křivky Σ, ku rovině π na vzájem souměrných,

sluší pokládati Σ_1 jakožto průmět křivky Σ za křivku dvojnásobnou (dvě kuželosečky se sjednocující). Rovina π seče plochy **P** a **R** ve křivkách hlavních $A \equiv A_1$, $B \equiv B_1$, jichž společné průsečíky, s průměty svými se sjednocujíce, dávají první čtyři body křivky Σ_1, která tudíž náleží ku svazku kuželoseček, jenž dán jest křivkami A_1 a B_1.

2. Dvě *točné* plochy II. řádu **P** a **R** (obr. 1.), jichž osy O a U se protínají (v bodě s), mají společnou rovinu hlavní $(OU) \equiv \pi$. Vytkněme sobě úlohu, sestrojiti střed a osy, jakož i vyšetřiti druh kuželosečky Σ_1, do níž promítá se průsek Σ ploch **P** a **R** na rovinu π*).

Plocha kulová **K**, sestrojená libovolným poloměrem z průsečíka os s jakožto středu, seče plochu **P** ve kružnicích C a D, jichž průměty C_1 a D_1 jsou společné tětivy křivek A_1 a K_1 kolmé ku O_1; podobně protínají se plochy **K** a **R** ve kružnicích E a F, jichž průměty E_1 a F_1 se sjednocují se společnými tětivami křivek K_1 a B_1, kolmými ku U_1. Kružnice C a E, nacházejíce se na ploše kulové **K**, protínají se ve dvou bodech souměrných ku rovině π, jichž společný průmět f_1, průsečík to přímek C_1 a E_1, dává jeden bod křivky Σ_1; podobně jí přináleží bod h_1, průsečík přímek D_1 a F_1, jakožto společný průmět obou průsečíků kružnic D a F. Průsečíky kružnic C a F jsou patrně imaginarné; avšak nacházejíce se v realné průsečnici rovin obou kružnic σ a ψ, kolmé ku průmětně π, mají *realný* průmět společný v průsečíku e_1 stop σ_1 a ψ_1, obsahujících průměty C_1 a F_1. Bod e_1 náleží tedy tolikéž kuželosečce Σ_1, avšak vzhledem ku průseku Σ *liché* části průmětu jeho. Tak jako bod e_1 jest realným průmětem imag. průsečíkův kružnic C a F, jsou části kuželosečky Σ_1 *vně* křivek A_1 a B_1 realné průměty imaginarných větví průseku Σ ploch **P** a **R**. Posléze bude průsečík g_1 prodloužených tětiv D_1 a E_1, realný to průmět imag. průsečíkův kružnic D a E, čtvrtým bodem křivky Σ_1.

3. Každá pomocná plocha kulová **K** o středu s seče tedy plochy **P** a **R** ve čtyřech kružnicích, promítajících se na rovinu π do stran rovnoběžníka, jehož vrcholy dávají čtyři body kuželosečky Σ_1. Rovnoběžník ten $(e_1 f_1 g_1 h_1)$ jest kuželosečce Σ_1 vepsán, pročež průsečík úhlopříčen jeho o_1 bude *středem* křivky Σ_1.

*) O *druhu* kuželosečky Σ_1 činí krátkou zmínku *De la Gournerie* ve svém *„Traité de Géométrie descriptive“*, art. 258.

4. Průměry rovnoběžné se stranami řečeného rovnoběžníka, $M \parallel e_1 f_1$ a $M' \parallel f_1 g_1$, jsou spolu sdruženy; ježto pak jest $M \perp O_1$, $M' \perp U_1$, budou vždy sdruženy oba průměry křivky Σ_1, jež sestrojíme kolmo ku osám ploch. Spojíme-li pak některý z prvních čtyř bodů křivky Σ_1, na př. d_1, s konci průměru $e_1 g_1$, budou tětivy $d_1 g_1$, $d_1 e_1$ sdruženy, a přímky $N \parallel d_1 g_1$, $N' \parallel d_1 e_1$, vedené středem o_1, dávají druhou dvojinu průměrů sdružených. Na libovolné kružnici S procházející středem o_1 vytíná involuční svazek sdružených průměrů involuční řadu bodovou, jež dána jest dvojinami mm', nn' na paprscích MM', NN'. Průsečík spojnic $\overline{mm'}$ a $\overline{nn'}$ dává střed involuce i; paprsek svazku i obsahující střed kružnice S seče tuto ve dvojině xx', odpovídající pravoúhelné dvojině průměru sdružených, to jest přímky $\overline{o_1 x} \equiv X$, $\overline{o_1 x'} \equiv X'$ jsou *osy* kuželosečky Σ_1.

Dotyčné body $y \equiv y'$, $z \equiv z'$ tečných paprsků svazku i ke kružnici S dávají samodružné prvky involuční řady bodové, a paprsky $\overline{o_1 y} \equiv Y$, $\overline{o_1 z} \equiv Z$ samodružné paprsky involučního svazku sdružených průměrů — *asymptoty* křivky Σ_1. Jsou-li tyto realné (střed i vně kružnice S), jest Σ_1 *hyperbolou;* jsou-li imaginarné (i uvnitř S), jest Σ_1 *ellipsou.* Tečna $\overline{b_1 t}$ v bodě b_1 jest rovnoběžna s průměrem $\overline{r o_1}$, jenž sdružen jest s průměrem $\overline{b_1 o_1 r'}$; učiníme-li $\overline{b_1 u} \perp X$, $\overline{o_1 v} = \sqrt{\overline{o_1 t} . \overline{o_1 u}}$, obdržíme, jak známo, polovinu hlavní osy kuželosečky Σ_1, čímž úloha shora vytčená úplně jest rozřešena.

5. Zhusta však vyskytne se případ, kdy každá pomocná plocha kulová **K** seče jednu z daných ploch točných (na př. **P**, obr. 2.) toliko v *jedné* kružnici realné C, kdežto druhá D jest imaginarná; což zejména nastane vždy, kdykoliv průsečík os obou ploch *(s)* nachází se *vně* kuželosečky obrysové A. Nicméně jest rovina $\tau \perp O$ imaginarné kružnice D, tedy i stopa její $\tau_1 \perp O_1$ obsahující průmět D_1, *realná*, takže konstrukce shora vyložené i zde bez závady užiti lze. Roviny σ a τ kružnic C a D, v nichž protínají se plochy **P** a **K**, promítají se na průmětnu $\pi \equiv (OU)$ do stop svých σ_1 a τ_1, obsahujících společné tětivy kuželoseček A_1 a K_1. — σ_1 jest v případě tomto skutečnou, realná přímka τ_1 však toliko *idealní společnou sečnou* křivek ře-

čených. Svazek kuželoseček ($A_1 K_1$) obsahuje tři dvojiny přímek, spojnice to společných čtyř průsečíků křivek A_1 a K_1; buď jsou všecky tři realné, aneb jest aspoň jedna dvojina realná, a ta skládá se v našem případě ze přímek σ_1 a τ_1. Mají-li kuželosečky A_1 a K_1 jednu realnou společnou sečnu σ_1, bude jim nezbytně přináležeti ještě jedna realná τ_1, kteráž spojuje oba ostatní imaginarné průsečíky křivek.

Uvádíme zde zejména tři konstrukce přímky τ_1:

a) Každá příčka, na př. O_1 (obr. 2.), seče svazek kuželoseček *(*$A_1 K_1$*)* v involuci bodové, zejména pak kuželosečky A_1, K_1, ($\sigma_1 \tau_1$) ve třech družinách pp', qq', rr'. Družiny pp', qq' a bod r družiny třetí jsou dány; sestrojíme-li známým způsobem bod r' přidružený ku r, a vedeme-li bodem r' přímku $\tau_1 \perp O_1$, bude úloha rozřešena.*)

b) Ellipsu a hyperbolu, jež mají buď osy aneb dva sdružené průměry společné, jmenujeme *kuželosečkami supplementarními***). Sestrojíme-li supplementarní hyperboly ku křivkám A_1 a K_1, tak aby byly pp' a qq' hlavní osy jejich, bude spojnice realných průsečíků obou hyperbol žádanou přímkou τ_1. Hyperbola supplementarní ke kružnici K_1 jest patrně rovnoosá. — Je-li A_1 parabola, jest příslušnou suppl. křivkou parabola s A_1 souměrná ku společné tečně vrcholové.

c) Z geometrie polohy jest známo, že přímky σ_1 a τ_1 jsou zároveň osami centrické kollineace kuželoseček A_1 a K_1, průsečík pak ω společných tečen příslušným středem kollineace. Vedeme-li tudíž bodem ω dvě lib. sečny $\overline{\omega t}$, $\overline{\omega p} \equiv O_1$ k oběma křivkám, budou spojnice průsečíků $\overline{pt'}$ a $\overline{qu'}$, jakož i $\overline{p't}$ a $\overline{q'u}$ protínati se na ose σ_1; naproti tomu dávají průsečíky spojnic $\overline{t'p}$ a $\overline{uq'}$, jakož i $\overline{p't}$ a $\overline{qu'}$ body žádané osy druhé τ_1. Vyšetřen-li jeden z nich *(j)*, lze jím vésti již $\tau_1 \perp O_1$.

Jest zřejmo, že α) plochy točné **P** a **K** o společné ose O jsou tolikéž v centrické kollineaci, roviny σ a τ kružnic C a D, v nichž obě plochy se protínají, rovinami kollineačními, střed ω

---

*) *Steiner, Theorie der Kegelschnitte,* pag. 249.

**) *Poncelet, Traité des Propriétés projectives des figures,* art. 54; art. 60. a 61. obsahují následující konstrukci, jejíž analytický důkaz podáváme v poznamenání ku odst. 10.

vnější společné tečné či obalové plochy kuželové příslušným středem kollineačním; β) realný střed ε imaginarné vnitřní obalové plochy kuželové (zároveň průsečík imag. vnitřních spol. tečen křivek A a K) možno vyšetřiti spojnicí dotyčných bodů $\overline{tk}$ tečen, sestrojených ku křivkám A_1, K_1 z lib. bodu l na σ_1, a že tedy γ) plochy **P** a **K** čtverým spůsobem centrickou kollineací sdružiti lze, t. v soustavách $(\omega\sigma)$, $(\omega\tau)$, $(\varepsilon\sigma)$, $(\varepsilon\tau)$.

6. Konstrukce 5. *c)* užito v obr. 2. ku vyšetření středu a os průmětu Σ_1 průseku Σ sploštěného ellipsoidu točného **P** (osa O) s točnou plochou kuželovou **R** (střed v, osa U) na rovinu $(OU) \equiv \pi$. Plocha kulová **K** o středu s seče ellipsoid ve kružnicích C a D, z nichž imaginarná D promítá se do realné přímky τ_1, plochu kuželovou pak ve kružnicích E a F.

Průměty těchto čtyř kružnic omezují rovnoběžník $e_1f_1g_1h_1$, jehož střed o_1 dává střed kuželosečky Σ_1. Osy pak sestrojeny dle odst. 4.; střed (i) involuce bodové na pomocné kružnici S jest zde vnitř S, involuce jest tedy elliptická, a asymptoty křivky Σ_1 imaginarné, t. j. Σ_1 jest ellipsou.

7. Avšak kollineační osy σ_1 a τ_1 kuželoseček A_1 a K_1 jsou i tehdy realné (obr. 3.), jsou-li všecky čtyři průsečíky obou křivek imaginarné, i lze je sestrojiti (jako v případě před· osu τ_1) přímo z průsečíka buď vnějších (ω) neb vnitřních tečen, jak z konstrukce v obr. 3. provedené s dostatek na jevo jde.

Z toho plyne, *že jest křivka Σ_1 realná i tehdy, když plochy* **P** *a* **R** *se neprotínají;* průsek jejich Σ jest imaginarný, avšak průmětem jeho na rovinu os jest realná kuželosečka Σ_1. Tak na př. v obr. 3. zobrazen jest realný hyperbolický průmět Σ_1 imag. průseku dvou sploštěných ellipsoidů točných **P** a **R** na rovinu os $(OU) \equiv \pi$. Plocha kulová **K** sestrojená ze středu s seče každou z daných ploch ve dvou imag. kružnicích, jichž roviny σ a τ, φ a ψ, jsou realné, promítajíce se do stop svých σ_1 a τ_1, φ_1 a ψ_1, totožných s kollineačními osami kuželoseček A_1 a K_1, B_1 a K_1; jimi jest dán rovnoběžník $e_1f_1g_1h_1$ vepsaný kuželosečce Σ_1 atd.

8. V obr. 4. proveden jest případ opačný, kdež kuželosečka Σ_1 *v celé* své délce jest skutečným průmětem průseku Σ ploch **P** a **R**. Jest to elliptický průmět průseku točného ellipsoidu vejčitého **P** s točným ellipsoidem sploštěným **R**. Zvolili

jsme dvě plochy soustředné; jest zřejmo, že ve zvláštním případě tomto i kuželosečka Σ_1 má střed svůj o_1 ve společném středu o obou ploch. Tečná plocha kulová **K**, sestrojená ku ploše **P** ze středu o, seče plochu **R** ve kružnicích E a F, jichž průměty omezují na průmětě tečné kružnice D_1 jeden průměr $e_1 f_1 \perp O_1$ ellipsy Σ_1; podobně dává tečná plocha kulová **L** ku ploše **R** ze středu o průměr $g_1 h_1$, jenž (dle věty 4.) sdružen jest s $e_1 f_1$. Z kterýchžto průměrů sdružených křivku samu, jakož i osy její snadně již sestrojiti lze.

9. V obr. 5. posléze zobrazen průmět Σ_1 průseku dvou neshodných točných ploch válcových **P** a **R** na rovinu os $(OU) \equiv \pi$. Obrysové přímky omezují rovnoběžník $abcd$, jehož vrcholy přináležejí křivce Σ_1; jsa jí vepsán má střed svůj v středu křivky Σ_1, jenž stotožňuje se s průsečíkem os o. Osy tyto $O \equiv N$ a $U \equiv N'$, jsouce rovnoběžny se stranami rovnoběžníka ab, bc, jsou sdruženými průměry křivky. Přímkami $M \perp O_1$ a $M' \perp U_1$ obdržíme (dle věty 4.) druhou dvojinu průměrů sdružených; že však $\sphericalangle (MN') = \sphericalangle (M'N)$, jest involuce sdružených průměrů symmetrická, tudíž Σ_1 hyperbolou rovnoosou, jejíž asymptoty Y a Z půlí úhly různoběžek O_1 a U_1: *průsek dvou neshodných točných ploch válcových, jichž osy se sekou, promítá se na rovinu os do rovnoosé hyperboly, jejíž asymptoty rozpolují úhly sevřené osami obou ploch.*

K vůli úplnosti dodáváme, že hyperbolický průmět Σ_1 průseku kterýchkoliv dvou ploch točných II. řádu, jež dotýkají se vzájemně ve dvou bodech, proměňuje se ve své asymptoty, a průsek Σ rozpadává se ve dvě kuželosečky.

10. Přistupujeme ku rozřešení druhé části úkolu vytčeného, totiž ku zodpovídání otázky, kterak lze přímo ze tvaru daných ploch souditi na tvar či *druh kuželosečky* Σ_1?

Zprvu vylučujeme případ, kdy plocha **P** nebo **R** jest kulová. — Především jest patrno, že Σ_1 jest vždy *hyperbolou,* jsou-li *obě* protínající se plochy *nekonečné,* tedy hyperboloidy, paraboloidy, plochy kuželové neb válcové; neboť plochy tyto lze protínati z průsečíka os pomocnými plochami kulovými libovolně velkými ve kružnicích realných: rovnoběžník $e_1 f_1 g_1 h_1$ zvětšuje se do nekonečna, jest stále realný, i dává nekonečnou kuželosečku Σ_1 se středem v konečnu, tedy hyperbolu.

Ale i tehdy, jsou-li dané plochy *dva stejnorodé ellipsoidy*, jest Σ_1 *hyperbolou.* Je-li ellipsoid **P** vejčitý (obr. 1.), nachází se střed s pomocné plochy kulové **K** na *hlavní* ose ellipsy A, a z konstrukce Ponceletovy (odst. 5. *b*) vychází, že kollineační osy σ_1 a $\tau_1 \perp O_1$ křivek K_1 a A_1 jsou realné i tehdy, když A_1 leží vnitř K_1,*) z čehož jde:

Nachází-li se točný ellipsoid vejčitý vnitř prostoru omezeného plochou kulovou, protínají se obě plochy, jsou-li souosé, ve dvou imaginarných kružnicích, jichž roviny jsou vždy realné. Roviny tyto jsou kolmé ku společné ose ploch, nacházejí se na různých stranách středu plochy kulové a vzdalují se od něho s rostoucím poloměrem plochy do nekonečna. Osy σ_1 a τ_1 patrně nelze tu sestrojiti dle odst. 5. *a*) neb *c*), avšak konstrukce 5. *b*) lze užiti i v případě tomto. Jsou-li tedy dány dva ellipsoidy vejčité, jest rovnoběžník $e_1 f_1 g_1 h_1$, zvětšuje se s rostoucí pomocnou plochou kulovou do nekonečna, stále realný, a průmět Σ_1 jest hyperbolický.

Objímá-li však plocha kulová **K** souosý ellipsoid *splöštěný* **P**, jsou i příslušné roviny kollineační σ a τ imaginarné; naproti tomu jsou roviny tyto realné, *je-li plocha kulová* **K** *imaginarná*, a vzdalují se s rostoucím poloměrem plochy **K** do ne-

---

*) Budiž osa O_1 ellipsy A_1 osou X, střed křivky počátkem souřadnic, u úsečka středu kružnice K_1, a r poloměr její, tudíž rovnice křivek

$$A_1 \equiv b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \qquad (\alpha)$$
$$K_1 \equiv (x-u)^2 + y^2 = r^2. \qquad (\beta)$$

Eliminací y z obou rovnic obdržíme úsečky společných průsečíků, a zároveň rovnice kollineačních os σ_1 a τ_1:

$$x = \frac{a}{e^2}\left[au \pm \sqrt{b^2u^2 + e^2(r^2 - b^2)}\right], \qquad (\gamma)$$

kdež $e^2 = a^2 - b^2$, $a > b$. Jest na jevě, že obě hodnoty x jsou zejména tehdy realné, leží-li ellipsa A_1 vnitř kruhu K_1, ježto zde $r > b$, a že zvětšují se (co do prosté hodnoty) s rostoucím r do nekonečna; čímž to, co nahoře tvrzeno, odůvodněno.

Patrně nezmění se rovnice (γ), proměníme-li křivky A_1 a K_1 v supplementarní hyperboly

$$A_1' \equiv b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$
$$K_1' \equiv (x-u)^2 - y^2 = r^2,$$

t. j. křivky $(A_1 K_1)$ mají s křivkami $(A_1' K_1')$ *společné* osy kollineační σ_1 a τ_1, čímž Ponceletova konstrukce (odst. 5. *b*) jest odůvodněna.

konečna*), pročež dává průsek dvou ellipsoidů sploštěných tolikéž průmět Σ_1 hyperbolický (obr. 3.).

11. Z úvah těchto již bezprostředně na jevo jde, že křivka Σ_1 jest jen tehdy *ellipsou, seče-li ellipsoid sploštěný* **P** *buď ellipsoid vejčitý aneb kteroukoliv nekonečnou točnou plochu II. řádu* **R** (obr. 2.). Nekonečně velká pomocná plocha kulová **K**, je-li $\left\{\begin{matrix}\text{realná}\\ \text{imag.}\end{matrix}\right\}$, seče ellipsoid **P** ve dvou kružnicích imaginarných, jichž roviny jsou $\left\{\begin{matrix}\text{imag.}\\ \text{realné}\end{matrix}\right\}$, plochu však **R** ve dvou kružnicích, jichž roviny jsou naopak $\left\{\begin{matrix}\text{realné}\\ \text{imag.}\end{matrix}\right\}$; rovnoběžník, do něhož se tyto čtyři roviny na průmětnu π promítají, má tedy jen dvě protější strany realné, a vrcholy jeho jsou imaginarné. Křivka Σ_1 není tedy nekonečná, a majíc střed svůj v konečnu, nemůže býti leč ellipsou.

12. Kuželosečka Σ_1 jest *rovnoosá*, jsou-li obě plochy sobě podobny. Dle věty předchozí nemůže býti $\mathbf{P} \sim \mathbf{R}$, je-li Σ_1 ellipsou, t. j. *kuželosečka* Σ_1 *není nikdy kružnicí.* Ve případě $\mathbf{P} \sim \mathbf{R}$ jest tedy Σ_1 vždy *rovnoosou hyperbolou.* Ježto pak *každé*

---

*) Je-li střed s_1 kružnice K_1 (obr. 2.) na prodloužené *malé* ose ellipsy A_1, a tato osou úseček X, lze rovnice α) a β) podržeti, ježto však zde $a < b$, dlužno položiti $e^2 = a^2 - b^2 = -(b^2 - a^2) = -e_1{}^2$, aby bylo e_1 realné.

Tím obdržíme z (γ)

$$x = \frac{a}{e_1{}^2}\left[-au \pm \sqrt{b^2u^2 + e_1{}^2(b^2 - r^2)}\right] \qquad (\delta)$$

jakožto rovnice kollineačních os σ_1 a τ_1. Každá imaginarná kružnice K_1 (poloměr $r = ir_1$) dává patrně realné osy σ_1 a τ_1, kteréž s rostoucím r vzdalují se do nekonečna.

Pro každé realné $r > \frac{b}{e_1}\sqrt{u^2 + e_1{}^2}$ jest x imaginarné; výraz pak na pravé straně relace vyjadřuje délku normály, spuštěné se středu s_1 kružice K_1 na ellipsu A_1, takže osy σ_1 a τ_1 jsou imaginarné, leží-li A_1 vnitř K_1, tedy ellipsoid vnitř koule, jakož nahoře tvrzeno.

Pro realné $r < b$ jsou sice obě osy σ_1 a τ_1 realné a *vzdalují* se od počátku souřadnic, *zkracuje-li* se poloměr r, avšak jen do určitých mezí, ježto pro $r = 0$ jest

$$x = \frac{a}{e_1{}^2}\left(-au \pm b\sqrt{u^2 + e_1{}^2}\right).$$

dva točné paraboloidy, jakož i každé dvě točné plochy válcové jsou sobě podobny, jest ve případech těchto Σ_1 vždy hyperbola rovnoosá (odst. 9.).

13. Posud jsme předpokládali, že osy obou ploch O a U jsou spolu různoběžny. Pro případ $O \parallel U$ přijdeme k tomuto pozoruhodnému výsledku:

Průsek dvou točných ploch II. řádu, jichž osy jsou spolu rovnoběžny, promítá se na rovinu os do paraboly, jejíž osa jest normalná ku osám ploch.

Neboť pomocná plocha kulová **K**, majíc střed svůj v úběžném bodě os $O \parallel U$, proměňuje se zde ve dvě roviny, z nichž jedna (τ) jest úběžná, druhá pak $\sigma \perp O$ seče plochy ve dvou kružnicích, jichž oba realné průsečíky promítají se na rovinu (OU) do téhož bodu, oba pak imaginarné do úběžného bodu stopy $\sigma_1 \perp O$. Rovnoběžník $e_1 f_1 g_1 h_1$ má tudíž toliko jediný vrchol v konečnu, střed pak v nekonečnu: Σ_1 jest parabolou, jejíž osa $X \parallel \sigma_1 \perp O$.

14. *Průsek plochy kulové (střed s) s kteroukoliv točnou plochou II. řádu (osa O) promítá se na rovinu (sO) do paraboly, jejíž osa $X \perp O$,* neboť pokládáme-li průměr plochy kulové $U \parallel O$ za osu její, nabýváme případu předešlého.

15. Stotožňují-li se osy obou ploch, $O \equiv U$, rozpadává se průsek Σ ve dvě kružnice, a parabola Σ_1 ve dvě rovnoběžky $\perp O$. Toto patrně vztahuje se i k průseku dvou ploch kulových; skládáť se z kružnice (buď realné neb imaginarné) v konečnu, a z imag. kružnice v nekonečnu, neboť průmět Σ_1 rozpadává se ve společné chordály dvou kružnic, z nichž jedna jest úběžná.

16. Jsou-li osy dvou *podobných* točných ploch II. řádu spolu *rovnoběžny*, rozpadává se parabola Σ_1 ve dvě přímky, z nichž jedna jest úběžná; jsouť to realné společné tětivy čili kollineační osy obou homothetických kuželoseček, v nichž plochy protíná rovina obou os (OU):

Dvě homothetické točné plochy II. řádu protínají se ve dvou kuželosečkách, z nichž jedna jest v konečnu, druhá pak vždy úběžná, a to realná, jsou-li obě plochy nekonečné, imaginarná, jsou-li obě ellipsoidy.

17. Z toho jde, *že každé dva točné paraboloidy* (ježto jsou sobě podobny) *o rovnoběžných osách protínají se v ellipse*, jež promítá se na rovinu os *(OU)* do přímky, a na rovinu $\perp O$ do kružnice. Za druhou část průseku pokládati nutno společný úběžný vrchol paraboloidů, v němž dotýkají se roviny úběžné; jestiť vrchol ten společnou povrchovou kružnicí nekonečně malou.

18. *Mají-li dvě točné plochy II. řádu rovníky své v jedné rovině* (v), *promítá se společný jich průsek* (Σ) *na rovinu* v *do kružnice* (Σ_2).

Rovina v jest společnou hlavní rovinou ploch, pročež průmětΣ_2 kuželosečkou. Rovníky obou ploch, kružnice M a L, sjednocují se s průměty svými na v, M_2 a L_2, a společné jich průsečíky přináležejí průmětu průseku Σ_2, t. j. Σ_2 náleží ku svazku kuželoseček ($M_2 L_2$); avšak svazek tento, obsahuje dvě kružnice, skládá se ze samých kružnic*), jest tedy i Σ_2 kružnicí. Procházíť Σ_2 i oběma imaginarnými společnými průsečíky kružnic M_2 a L_2 v nekonečnu.

Věta tato vztahuje se zejména ku každým dvěma paraboloidům o rovnoběžných osách (odst. 17.), ježto úběžnou rovinu za společnou rovinu jejich rovníků pokládati lze; průmět Σ_2 na rovinu kolmou ku osám bude kruhový.

19. Z věty předchozí jde přímo:

Je-li střed plochy kulové v rovině rovníka točné plochy II. řádu, promítá se průsek obou ploch na tuto rovinu do kružnice.

Rovník točného paraboloidu jest v rovině úběžné; každou pak rovinu v prostoru pokládati lze za plochu kulovou, jejíž střed jest úběžný. Lze tudíž větu posléz vyjádřenou i k tomuto případu vztahovati, čímž syntheticky odůvodněna jest známá věta:

Každý rovinný průsek točného paraboloidu promítá se na rovinu, kolmou k ose jeho, do kružnice.

20. Neméně zajímavé jest i analytické odvození vět, jež týkají se tvaru kuželosečky Σ_1.

Budiž osa O točné plochy II. řádu P osou souřadnicovou X, a kterýkoliv bod její počátkem souřadnic o, tak že rovnice plochy

$$\mathsf{P} \equiv y^2 + z^2 + \mu x^2 + 2px + u = 0, \qquad (1)$$

*) *Steiner*, Th. d. K., pag. 278.

kdež konstanta u závislá jest na vzdálenosti počátku o od středu, po případě od vrcholu (paraboloid) plochy **P**. Má-li plocha střed svůj v konečnu, jest koefficient $\mu = \frac{a^2}{b^2}$, kdež a jest poloměr rovníka, b pak polovina osy obsažené v X. Pro ellipsoid sploštěný jest $\mu > 1$, pro plochu kulovou $\mu = 1$, pro ellipsoid vejčitý $1 > \mu > o$, pro paraboloid $\mu = o$ (v čemž obsažena pro $p = o$ také točná plocha válcová), posléze pak pro oba hyperboloidy $\mu < o$ (v čemž zahrnuta jest i točná plocha kuželová).

Osa U druhé plochy točné **R** obsažena budiž v rovině (XY) a odchýlena od osy $O \equiv X$ o úhel α; i bude rovnice plochy

$$\mathbf{R} \equiv (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 + z^2 + \nu (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 \\ + sx + ty + v = 0, \qquad (2)$$

kdež součinitel ν má pro jednotlivé plochy tytéž hodnoty jako μ.

Pro průsek obou ploch Σ mají platnosť obě rovnice; prostý jich rozdíl dává rovnici průmětu Σ_1 průseku ploch na rovinu os $(OU) \equiv (XY)$, ježto se tím proměnná z eliminuje:

$$\Sigma_1 \equiv x^2 (\mu - \nu \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2xy (1 - \nu) \sin \alpha \cos \alpha \\ + y^2 (1 - \nu) \sin^2 \alpha + Dx + Ey + F = 0. \qquad (3)$$

Především jest zřejmo, že tato kuželosečka Σ_1 jest vždy *realná*, pročež i tehdy, když průsek Σ sám jest imaginarný (odst. 7. obr. 3.).

Křivka Σ_1 jest, jak známo, ellipsou, parabolou neb hyperbolou dle toho, je-li

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 - AC \lesseqqgtr 0,$$

jsou-li A, B, C součinitelé prvních tří členů rovnice (3). Dosadíme-li hodnoty jejich do této relace, obdržíme po redukci

$$(1 - \mu)(1 - \nu) \sin^2 \alpha \lesseqqgtr 0. \qquad (4)$$

Znamení výrazu tohoto závisí toliko na znamení součinu $(1 - \mu)(1 - \nu)$. Součin tento jest negativný, je-li buď

$$\mu > 1, \quad \nu < 1,$$

aneb

$$\mu < 1, \quad \nu > 1,$$

t. j. je-li jedna z obou ploch ellipsoid *sploštěný*, druhá pak kterákoliv *jiná* plocha, jest křivka Σ_1 *ellipsou* (věta 11.). Součin ten jest positivný, když

$$\mu > 1, \ \nu > 1,$$

aneb
$$\mu < 1, \ \nu < 1,$$

t. j. jsou-li obě plochy sploštěné ellipsoidy aneb kterékoliv dvě *jiné* plochy II. řádu, jest Σ_1 *hyperbola* (věta 10.).

Posléze jest

$$(1 - \mu)(1 - \nu) \sin^2 \alpha = 0,$$

když buď $\mu = 1$, neb $\nu = 1$, aneb $\sin \alpha = 0$ či $\alpha = 0$, t. j. Σ_1 jest *parabola*, buď je-li jedna z obou ploch kulová, aneb jsou-li osy ploch spolu rovnoběžny (věty 13. a 14.).

Jsou-li osy ploch různoběžny ($\alpha \gtrless 0$) a $\mathbf{P} \sim \mathbf{R}$, bude $\mu = \nu$, tedy Σ_1 *hyperbola rovnoosá* (věta 12.), ježto 1. a 3. součinitel rovnice (3):

$$A = \mu - \mu \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\mu - 1) \sin^2 \alpha,$$
$$C = (1 - \mu) \sin^2 \alpha,$$

pročež $A + C = 0$,

známý to znak hyperboly rovnoosé.

Věta tato platí pro každé dva točné paraboloidy, ježto $\mu = \nu = 0$.

Avšak je-li $\mathbf{P} \sim \mathbf{R}$, a jsou-li osy ploch spolu rovnoběžny, tedy $\mu = \nu$ a krom toho $\alpha = 0$, jsou součinitelé $A = B = C = 0$, a rovnice průmětu

$$\Sigma_1 \equiv Dx + Ey + F = 0, \tag{5}$$

jest tudíž Σ_1 *přímka* (věta 16.), což zejména vztahuje se ku dvěma točným paraboloidům o rovnoběžných osách: $\mu = \nu = 0$, $\alpha = 0$ (věta 17.).

Týž případ dávají také dvě plochy kulové, neboť příslušné substituce $\mu = \nu = 1$ tolikéž přeměňují rovnici (3) v rovnici (5).

21. Mají-li dvě točné plochy II. řádu rovníky své v téže rovině *(XZ)*, je-li střed jedné plochy počátkem souřadnic, osa její osou *X*, střed pak plochy druhé na ose *Z*, jsou rovnice ploch

$$\mathbf{P} \equiv y^2 + z^2 + \mu x^2 + t = 0. \tag{6}$$
$$\mathbf{R} \equiv y^2 + (z + u)^2 + \nu x^2 + v = 0. \tag{7}$$

Eliminace proměnné x z rovnice (6) a (7) dává rovnici průmětu společného průseku ploch na rovinu (*YZ*):

$$\Sigma_2 \equiv (\mu - \nu) y^2 + (\mu - \nu) z^2 + 2\mu u z + \mu u^2 + \mu v - \nu t = 0,$$

která přináleží *kružnici* (věta 18.), jejíž střed obsažen jest ve spojnici (*Z*) středů obou ploch.