Důchod invalidní.

Napsal

Martin Pokorný.

(Pokračování.)

III.

Přikročíme nyní již k určení hodnoty důchodu invalidního, t. j. takového, který počíná se vypláceti osobě smlouvu učinivší od té chvíle, kdy se stane invalidní.

Probereme nejhlavnější případy, pokračujíce od jednodušších ke složitějším.

Ježto ke všem úkolům těm potřebujeme znáti hodnotu doživotního důchodu pro osobu invalidní, rozřešíme napřed tento úkol:

Jakou hodnotu má doživotní důchod osoby n-leté, která již jest invalidní?

Tuto otázku mohli bychom pronésti také takto:

Mnoho-li musil by n-letý invalida uložiti, aby si tím pojistil doživotní důchod ihned počínající? Rozumějme pro jednoduchost, že *důchod vyplácí se celoročně a činí 1 zl.* (ku pojištění jiného důchodu z jest pouze hodnotu důchodu 1 zl-ového násobiti z-kráte).

Již rozřešení této úlohy bude nám vzorem pro řešení všech otázek podobných, jaké při pojišťování životním se vyskytují, i probereme ji proto poněkud podrobněji.

Především dlužno uvésti si na paměť, že každé užití zásady pravděpodobnosti v praxi poskytuje jen tehdy jakousi jistotu, může-li se počítati s velikými čísly, že tedy také pojišťovna, spoléhajíc na pravděpodobnost invalidnosti a úmrtnosti dle hořejších vývodův a počítajíc dle nich vklady ku pojištění důchodu pro jednotlivce, musí předpokládati, že těchto osob bude počet dosti veliký. Neboť zajisté některé osoby budou požívati důchodu mnohem déle, než by se průměrem očekávalo, jiné však za to dříve zemrou; jenom při velkém počtu osob pak dá se s jistotou očekávati, že se tyto příznivé a nepříznivé případy vyrovnají; i nabývá teprv tu právě onen prostřední případ, jejž výpočet dle pravděpodobnosti za základ vzaté udává, skutečné platnosti průměrné *).

Takovým rozjímáním spůsobeno, že se nyní vypočítávají hodnoty důchodů a jiné případy v pojišťování životním nikoli přímo na zásadách pravděpodobnosti, nýbrž na vyvozeném z nich počtu skutečných událostí, které pokládají se nikoli pouze za podobné pravdě, nýbrž za skutečné, nepochybné. Zda-li počet ten dosti jest veliký, aby toto předpokládání odůvodňoval, čili nic, na tom nezáleží, poněvadž vyhledáváním průměru počet ten se zase eliminuje; hlavní věcí jest, aby při skutečném provádění v praxi počet pojištěných osob (pojištěnců) byl náležitě veliký. —

K ustanovení našeho důchodu vede nyní tento postup.

Máme-li M_n osob invalidních *n*letých, které mají dostati ihned po 1 zl. vyplaceno, na to pak počátkem každého příštího

---

*) Tuším, že příklad známý věc tuto ještě lépe objasní: V posledních letech povstaly na mnohých místech společnosti výherní, totiž sestoupily se spolky, jejichž členové složili po určité sumě, za niž se koupily losy loterní a o zisk se pak členové dělili. Jest zřejmo, že naděje společnosti ve výhru stoupala, čím více měla členů, tedý čím více mohla koupiti losů. Dejme nyní tomu, že společnost vzrostla na tolik členů, že mohla zakoupiti *všecky losy* některé loterie (pro každého člena jeden los), pak musí společnost vyhráti *všecky výhry* a přece by ničeho nezískala, poněvadž na ni přijdou také *všecky prohry*; byla-li pak loterie úplně bezzištná, dostanou členové dohromady jednoduše své peníze nazpět a ničeho více. Kdyby se tu členové spolku nedělili o zisk stejně, nýbrž kdyby každý obdržel los sám pro sebe, tu by v posledním případě někteří z nich vyhráli, ostatní pak prohráli; věc byla by táž, jakoby nebylo spolku, nýbrž jakoby každý hrál v loterii přímo — anebo také, jakoby nebylo loterie, nýbrž všickni dohromady hráli mezi sebou.

Podobně zase nemůže držitel loterie ani prohráti ani vyhráti (leč to, oč prodá losy dráže, než co jest průměrná jejich hodnota), prodá-li *všecky* losy. Čím méně však losů odbude, tím více stává se také sám spoluhráčem; i může pak ovšem velmi mnoho vyzískati, ale rovněž i velmi mnoho prodělati, podle toho, na čí losy připadne více výher, zda na jeho, nebo na prodané. — Zvláště tento druhý příklad tuším nejlépe objasňuje poměr pojišťoven k jejím členům a spolu význam počtu osob pojištěných pro bezpečné trvání pojišťovny.

roku až do smrti opět po 1 zl., tu vyplatí se na počátku patrně všem dohromady M_n zl. Po uplynutí jednoho roku nevyplatí se však již tatáž suma, nýbrž jen tolik zlatých, kolik osob z původních ještě žije. Pravděpodobnost, že n-letý invalida dožije se příštího roku, jest však s_n; i bude tedy na počátku 2. roku na živě ještě $M_n s_n$ invalidů, jimž dohromady vyplatí se $M_n s_n$ zl. Aby pak to se mohlo státi, musí býti nyní (totiž o 1 rok dříve) pohotově patrně $M_n s_n : \left(1 + \frac{p}{100}\right)$, znamená-li p procentovou sazbu za základ vzatou, či položíme-li

$$1 + \frac{p}{100} = v,$$

také $$\frac{1}{v} . M_n s_n.$$

Na počátku 3. roku žije z $M_n s_n$ invalidů 2. roku ještě $M_n s_n . s_{n+1}$; tolik tedy zlatých se pak vyplatí, i musí býti nyní (o dva roky dříve) pohotově

$$\frac{M_n s_n s_{n+1}}{v^2}.$$

Patrně jde počet takto dále až do úplného vymření všech invalidů, tedy je-li poslední člen tabulky pravděpodobnosti s při věku $z - 1$ roků, bude poslední výplata činiti $M_n s_n s_{n+1} \ldots s_{z-1}$ zlatých, jejichž nynější hodnotu odúročením obdržíme:

$$\frac{M_n s_n s_{n+1} \ldots s_{z-1}}{v^{z-n}}.$$

Součet všech těchto odúročených hodnot jednotlivých výplat činí hodnotu celého důchodu pro všecky M_n invalidy. Poněvadž pak pro každého z nich má jeho vlastní důchod tuže hodnotu, již nazveme Δ_n, máme rovnici:

$$M_n \Delta_n = M_n + \frac{M_n s_n}{v} + \frac{M_n s_n s_{n+1}}{v^2} + \ldots \text{ do konce.}$$

Čísla M_n, $M_n s_n$, $M_n s_n s_{n+1}$ atd. znamenají podle hořejšího rozboru počet invalidů n-letých, pak z nich ještě žijících $(n+1)$ letých, $(n + 2)$letých atd.

Abychom si pro různý věk invalidů výpočet důchodu usnadnili, vypočítáme si úmrtní tabulku invalidů dle vzorce obecné tabulky úmrtní (L_n). Je-li nejnižší věk, při němž invalidi počínají, r, položíme pro ten věk počet invalidů libovolný, na př. 100.000

a nazveme-li vůbec počet invalidů z nich ještě ve věku n žijících, jako nahoře M_n, bude patrně:

$$\begin{aligned}
&M_r = 100.000,\\
&M_{r+1} = 100000 \,.\, s_r\,,\\
&M_{r+2} = 100000\, s_r \,.\, s_{r+1} = M_{r+1} \,.\, s_{r+1}\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad\qquad\qquad\qquad (a)\\
&M_n = 100000\, s_r s_{r+1} \ldots s_{n-1} = M_{n-1} \,.\, s_{n-1}\,,\\
&M_{n+1} = 10000\, s_r \,.\, s_{r+1} \ldots s_n = M_n s_n\,,\\
&M_{n+2} = 100.000\, s_r s_{r+1} \ldots s_{n+1} = M_{n+1} s_{n+1} = M_n s_n s_{n+1} \text{ atd.}
\end{aligned}$$

Dosadíce hodnoty tyto do rovnice pro $M_n \Delta_n$, obdržíme:

$$M_n \Delta_n = M_n + \frac{M_{n+1}}{v} + \frac{M_{n+2}}{v^2} + \ldots + \frac{M_z}{v^{z-n}}.$$

Další příhodnější úpravu dáme rovnici té rozdělíce obě strany její úročitelem v^n, čímž vyjde:

$$\frac{M_n}{v^n} \,.\, \Delta_n = \frac{M_n}{v^n} + \frac{M_{n+1}}{v^{n+1}} + \frac{M_{n+2}}{v^{n+2}} + \ldots + \frac{M_z}{v^z}.$$

Označíme-li vůbec *)

$$\frac{M_x}{v^x} = \mu_x\,, \qquad (b)$$

vyjádří se poslední rovnice takto:

$$\mu_n \Delta_n = \mu_n + \mu_{n+1} + \ldots \text{ do konce.}$$

Nazveme-li součet po pravé straně, totiž

$$\mu_n + \mu_{n+1} + \ldots \text{do k.} = \Sigma_n(\mu), \qquad (c)$$

vyjde konečně hodnota našeho důchodu:

$$\Delta_n = \frac{\Sigma_n(\mu)}{\mu_n}.\ ^{**)} \qquad (15)$$

*) Čísla podobná vyskytují se ve všech výpočtech životního pojišťování a je-li na př. l_n počet žijících kterékoli kategorie, potřebuje se jistě také tabulka čísel $\frac{l_n}{v^n}$, jimž po obvyklém již způsobě říká se „diskontovaná (č. odúročená) *čísla žijících,*“ tak že bychom hořejší číslo $\frac{M_n}{v^n}$ nazvali diskontovaným číslem zbylých invalidů. Tak sestavují se i diskontovaná čísla zemřelých atd.

**) Součtovou tabulku diskontovaných čísel žijících sestavíme snadno, počneme-li sčítati od μ při věku nejvyšším nazpět takto:

$$\begin{aligned}
&\Sigma_z(\mu) = \mu_z\,,\\
&\Sigma_{z-1}(\mu) = \mu_{z-1} + \mu_z = \mu_{z-1} + \Sigma_z(\mu),\\
&\Sigma_{z-2}(\mu) = \mu_{z-2} + \mu_{z-1} + \mu_z = \mu_{z-2} + \Sigma_{z-1}(\mu), \text{ atd.,}
\end{aligned}$$

— Po tomto úvodním výpočtu můžeme již řešiti vlastní úkoly různých důchodů invalidních.

1. **Prostý důchod invalidní.** *„Jakou hodnotu má doživotní důchod 1 zl., jenž začne se vypláceti osobě n-leté aktivní od té chvíle, kdy se stane invalidní?“*

Čili: *„Mnoho-li musí složiti osoba aktivní n-letá jednou pro vždy, aby si zabezpečila doživotní důchod od té chvíle, kdy se stane invalidní?“*

Osob aktivních n-letých žije dle případné tabulky A_n, a ty všecky sestoupí-li se ve spolek pro týž účel, zaplatí po vkladě V_n, dohromady tedy:

$$A_n V_n .$$

Tato hodnota musí rovnati se nynější hodnotě důchodů přirčených všem invalidům každého roku nově povstalým.

První výplata počne na počátku příštího roku všem těm invalidům, kteří z A_n aktivních během roku povstanou a ten rok přežijí, jichž dle I. 1) jest i_{n+1}. Hodnota důchodu po 1 zl. jest pro tyto invalidy dle (15) $i_{n+1}\varDelta_{n+1}$ v čas počínající výplaty, totiž po uplynutí jednoho roku; nynější tedy hodnota jeho jest

$$\frac{i_{n+1}}{v}\varDelta_{n+1} .$$

Po uplynutí dalšího roku povstalo a žije nových i_{n+2} invalidů, jimž každému zabezpečuje se doživotní důchod hodnoty $\varDelta_{n+2}$, všem dohromady tedy $i_{n+2}\varDelta_{n+2}$, čehož nynější hodnota jest

$$\frac{i_{n+2}}{v^2}\varDelta_{n+2} .$$

Postup jednotlivých členů součtu jest tu zřejmý, součet všech hodnot těch, rovnající se hořejšímu vkladu $A_n V_n$, jest tedy:

$$A_n V_n = \frac{i_{n+1}}{v}\varDelta_{n+1} + \frac{i_{n+2}}{v^2}\varDelta_{n+2} + \ldots \text{ do k.,}$$

a násobíme-li obě strany odúročitelem $\frac{1}{v^n}$:

---

tak že všeobecně:

$$\Sigma_n(\mu) = \Sigma_{n+1}(\mu) + \mu_n .$$

Jako tato sestavují se i v jiných kategoriích součtové tabulky diskontovaných čísel žijících nebo zemřelých.

$$\frac{A_n}{v^n} \cdot V_n = \frac{i_{n+1}}{v^{n+1}} \Delta_{n+1} + \frac{i_{n+2}}{v^{n+2}} \Delta_{n+2} + \ldots \text{ do k.}$$

Zde setkáváme se opět s novými diskontovanými čísly, totiž žijících aktivních a povstávajících invalidů. Položíme-li tedy

$$\frac{A_n}{v^n} = \alpha_n \qquad (d)$$

a

$$\frac{i_n}{v^n} = \varkappa_n, \qquad (e)$$

nabude předešlá rovnice tvaru:

$$\alpha_n V_n = \varkappa_{n+1} \Delta_{n+1} + \varkappa_{n+2} \Delta_{n+2} + \ldots \qquad (16')$$

Sestavíme-li součiny čísel $\varkappa$ a Δ vždy ke stejnému věku patřících v tabulku a učiníme-li součtovou tabulku jako v (β) a označíce

$$\varkappa_n \Delta_n + \varkappa_{n+1} \Delta_{n+1} + \varkappa_{n+2} \Delta_{n+2} + \ldots \text{ do k.} = \Sigma_n(\varkappa\Delta) \quad (f)$$

obdržíme za předchozí rovnici:

$$\alpha_n V_n = \Sigma_{n+1}(\varkappa\Delta),$$

z čehož konečně *hodnota našeho důchodu*:

$$V_n = \frac{\Sigma_{n+1}(\varkappa\Delta)}{\alpha_n}. \qquad (16)$$

2. Odročený důchod invalidní.

a) *„Jakou hodnotu má doživotní důchod 1 zl., který počne se vypláceti osobě nyní nleté aktivní od té chvíle, kdy po uplynutí příštích m let stane se invalidní? Stane-li se invalidní před uplynutím těchto m prvních roků, nenabývá práva na pensi.“*

Hodnotu důchodu tohoto, již na rozdíl předešlého označíme ${}^{(m)}V_n$, obdržíme patrně ihned z rovnice (16′), vynechajíce z ní prvních m členů, poněvadž teprv invalidi po $m$tém roce povstalí a na počátku $(m + 1)$ho roku ještě žijící nabývají práva na důchod. Jest tedy

$$\alpha_n \cdot {}^{(m)}V_n = \varkappa_{n+m+1} \Delta_{n+m+1} + \varkappa_{n+m+2} \Delta_{n+m+2} + \ldots,$$

z čehož ihned:

$${}^{(m)}V_n = \frac{\Sigma_{n+m+1}(\varkappa\Delta)}{\alpha_n}. \qquad (17)$$

b) Úplná ztráta netoliko práva na důchod, ale i ztráta složeného vkladu při invaliditě příliš záhy nastalé činilo by tento případ pojištění zajisté neoblíbeným, poněvadž by byl zdánlivě nespravedlivým.

Změňme jej tedy tak, že *tomu, kdo by se stal invalidním v době karenční* (před uplynutím m roků), *vrátí se vklad bez úroků.*

Důchod ten můžeme nazvati:

Odročeným důchodem invalidním s odbytným.

Vyznačíme-li zde vklad ${}^{(m)}V'_n$, vrátí se invalidům v 1., 2., ... $m$tém roce povstalým a na konci roku ještě žijícím vklad ${}^{(m)}V'^n$; odúročí-li se pak hodnoty ty na nynějšek, bude patrně:

$$A_n \,.\, {}^{(m)}V'_n = \left(\frac{i_{n+1}}{v}\,{}^{(m)}V'_n + \frac{i_{n+2}}{v^2}\,{}^{(m)}V'_n + \ldots + \frac{i_{n+m}}{v^m}\,{}^{(m)}V'_n\right)$$
$$+ \left(\frac{i_{n+m+1}}{v^{m+1}}\varDelta_{n+m+1} + \frac{i_{n+m+2}}{v^{m+2}}\varDelta_{n+m+2} + \ldots\right),$$

čili

$$\alpha_n \,.\, {}^{(m)}V'_n = (\varkappa_{n+1} + \varkappa_{n+2} + \ldots + \varkappa_{n+m}) \,.\, {}^{(m)}V'_n + \Sigma_{n+m+1}(\varkappa\varDelta)$$

a utvoří-li se součet obdobně jako v jiných případech dřívějších:

$$\Sigma_n(\varkappa) = \varkappa_n + \varkappa_{n+1} + \varkappa_{n+2} + \ldots \text{ do k.,} \qquad (g)$$

můžeme součet v závorce předešlé rovnice vyjádřiti takto:

$$\varkappa_{n+1} + \varkappa_{n+2} + \ldots + \varkappa_{n+m} = (\varkappa_{n+1} + \varkappa_{n+2} + \ldots \text{ do k.})$$
$$- (\varkappa_{n+m+1} + \varkappa_{n+m+2} + \ldots \text{ do k.}),$$

čili

$$\varkappa_{n+1} + \varkappa_{n+2} + \ldots + \varkappa_{n+m} = \Sigma_{n+1}(\varkappa) - \Sigma_{n+m+1}(\varkappa), \qquad (g')$$

z čehož ihned

$${}^{(m)}V'_n = \frac{\Sigma_{n+m+1}(\varkappa\varDelta)}{\alpha_n - \Sigma_{n+1}(\varkappa) + \Sigma_{n+m+1}(\varkappa)}. \qquad (18)$$

3. Odročený důchod invalidní a pro stáří.

„Jaká jest hodnota doživotního důchodu 1 zl., který počne se vypláceti osobě nyní n leté aktivní bezvýminečně po uplynutí x roků, anebo stane-li se před tím, ale ne dříve než po m letech, invalidním.“

Hodnotu důchodu označme zde ${}^{(m)}V_{n(x)}$.

Od invalidního důchodu prostě odročeného — 2. *a)* — liší se důchod tento jen tím, že nepožívají ho jediní invalidi, nýbrž krom nich i všickni aktivní od $(n+x)$tého roku svého věku, t. j. k výplatám invalidů přibude ještě výplata po 1 zl. A_{n+x} aktivním po x letech, A_{n+x+1} aktivním po $x+1$ roce atd. a hodnota těchto všech výplat odúročena na nynějšek činí patrně:

$$\frac{A_{n+x}}{v^x} + \frac{A_{n+x+1}}{v^{x+1}} + \dots \text{ do konce.}$$

Připojí-li se tento součet, dělen ještě úročitelem v^n k součtu po pravé straně rovnice (16'), jest patrně:

$$\alpha_n \, . \, {}^{(m)}V_{n(x)} = (\varkappa_{n+m+1} \Delta_{n+m+1} + \varkappa_{n+m+2} \Delta_{n+m+2} + \dots) + (\alpha_{n+x} + \alpha_{n+x+1} + \dots).$$

Utvoří-li se tu opět nová tabulka součtová

$$\Sigma_n(\alpha) = \alpha_n + \alpha_{n+1} + \dots \text{ do konce,} \tag{h}$$

vyjde ihned:

$$^{(m)}V_{n(x)} = \frac{\Sigma_{n+m+1}(\varkappa\Delta) + \Sigma_{n+x}(\alpha)}{\alpha_n}. \tag{19}$$

Poznamen. Pro tentýž důchod, avšak *s odbytným* (obdobně se 2. *b*) najde se vzorec patrně tím, že jmenovatele v (19) nahradíme jmenovatelem vzorce (18).

4. Ze vzorce (19) plyne bezprostředně také hodnota **důchodu invalidního a pro stáří bez doby karenční,** položí-li se prostě

$$m = 0,$$

z čehož

$$V_{n(x)} = \frac{\Sigma_{n+1}(\varkappa\Delta) + \Sigma_{n+x}(\alpha)}{\alpha_n}. \tag{20}$$

(Dokončení.)

O křivkách involučně homologických.

Napsal

A. Strnad,

professor v Hradci Králové.*)

1. Stanovme ku každému bodu m danému v pravoúhlé soustavě souřadnicemi x, y bod m' (ξ, η) dle rovnic

$$\xi = \frac{bx}{y-a}, \quad \eta = \frac{by}{y-a}. \tag{1}$$

Tím obdržíme v rovině dvě soustavy bodů; každému bodu v soustavě (x, y) příslušeti bude určitý bod v soustavě (ξ, η),

---

*) Předneseno z části na sjezdu professorů v Chrudimi o svatodušních svátcích r. 1884.