Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 14 (1885), No. 5, 237--244

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122242

k ekliptice, totéž soudíme dle analogie též o rovníku. Pol Urana jeví se nám tudíž někdy u prostřed desky Uranovy, a tato má pak na každý způsob tvar kruhový, ač-li je Uranus rotačním tělesem. Než po čtvrtině oběhu naleзá se pol Urana na kraji viditelné desky a je-li Uranus sploštěný, musí se to v této poloze objeviti. Nyní je právě příznivá doba pro toto pozorování, čehož právě Seeliger upotřebil. Nejvíce vadí přesnému měření veličiny tak nepatrné jakou jest průměr Urana (3″,9), že výsledek jest jiný při měření *stejných* vzdáleností vertikalných (na příklad nítek vodorovně napjatých) a horizontalných (na př. nítek svisle napjatých). Tato okolnost, mající mnohá analoga (osobní chyba atd.), byla snad příčinou, že se Uranovi přisuzovala sploštěnost. Seeliger ji vyloučil odrazem od hypothenusové plochy hranolu, jenž se mohl otáčeti, tak že se obraz Urana spolu otáčel a průměr vždy týmž způsobem měřiti mohl. Výsledek jest, že nemá Uranus patrné sploštěnosti, a že jest jeho průměr v střední vzdálenosti (19,1826):

$$3'',915 \pm 0'',045,$$

což s průměrnou hodnotou 3″,823 starších měření velmi dobře souhlasí.

Při té příležitosti objevil však Seeliger též tu zajímavou okolnost, že se stávají měřené veličiny zdánlivě tím větší, čím nepokojnější jest vzduch. Bylo by zajímavo zjistiti, zda-li totéž se vyskytuje při měření vzdálenosti dvojhvězd.

Úlohy.

Řešení úlohy 13.

(Podal p. *Frant. Schöbl,* stud. VI. tř. g. v Jindřichově Hradci.)

Složka odstředivosti směrem tečny na hladinu moře jest pro zeměpisnou šířku α

$$p = \frac{4\pi^2 Rm}{T^2} \sin\alpha\cos\alpha.$$

Je-li zrychlení u na hmotu m, jest

$$p = mu;$$

tedy

$$u = \frac{2\pi^2 R}{T^2} \sin 2\alpha.$$

Zrychlení bude největší, jest-li $\alpha = 45^0$.

Správné řešení zaslali pp.: *Bohumil Markl* z VIII. tř. I. r. g. v Praze, *Josef Šumr* ze VII. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze, *J. Prokůpek,* ze VII. tř. české vyšší real. šk. v Praze, *Ferd. Zuna* z VIII. tř., *J. Žák* a *Jos. Svoboda* ze VII. tř. g. v Písku, *Ant. Pleskot* ze VII. tř. g. v Chrudimi a *Frant. Nušl* z V. tř. g. v Jindřichově Hradci.

Řešení úlohy 14.

(Zaslal p. *J. Prokůpek,* stud. VII. tř. české v. real. šk. v Praze.)

Pro podmíněnou polohu páky musí býti moment odstředivostí P_1 a p_1 roven momentu vah P a p kulí, totiž

$$(P_1 + p_1) R \cos \alpha = (P - p) R \sin \alpha,$$

a že

$$P_1 + p_1 = \frac{4\pi^2}{T^2} R \sin \alpha \cdot \frac{P + p}{g},$$

znamená-li g zrychlení způsobené přítažlivostí země, nabudeme

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R (P + p) \cos \alpha}{g (P - p)}}.$$

Totéž řešení zaslali pp.: *Leo Schedlbauer* z VIII. tř. v Klatovech a *Frant. Schöbl* ze VI. tř. g. v Jindřichově Hradci.

Pan *Ant. Pleskot*, stud. VII. tř. g. v Chrudimi, upravil řešení takto:

Chvějní doba odstředivého kyvadla o ose a, na kteréž nějaká síla rovnoběžně s osou působí zrychlením g_1, jest

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g_1}}.$$

Kdyby působily obě koule na páku týmž směrem, představovaly by sílu $P + p$ a sdílely by zrychlení g; ježto však působí směry protivnými, jest jejich síla $P - p$ i sdílejí páce menší zrychlení g_1. Z úměry

$$g_1 : g = (P - p) : (P + p),$$

obdržíme g_1 a poněvadž $a = R \cos \alpha$, má T hodnotu jako v prvním řešení.

Řešení zaslal též p. *Frant. Nušl*, stud. v Jindřichově Hradci.

Řešení úlohy 15.

(Podal p. *Ant. Pleskot,* stud. VII. tř. g. v Chrudimi.)

Když paprsek po prvé zasáhl do vedlejší nádoby, stála voda v první nádobě ve výšce H_1 nad jejím otvorem, když vycházel, ve výši H_2. Za tu dobu vyteklo vody

$$K = \pi R^2 (H_1 - H_2).$$

V době $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, ve které voda z pobočného otvoru svisně o výšku h spadne, musí v prvním případě $d + r = Vt$, a v druhém $d - r = vt$ vodorovným směrem od otvoru první nádoby se vzdáliti. Rychlosti V a v výtoku jsou

$$V = \sqrt{2gH_1}, \quad v = \sqrt{2gH_2};$$

tedy

$$d + r = \sqrt{4H_1 h}, \quad d - r = \sqrt{4H_2 h}.$$

Z rovnic těchto obdržíme

$$H_1 = \frac{(d+r)^2}{4h}, \quad H_2 = \frac{(d-r)^2}{4h},$$

tedy

$$K = \pi \frac{d}{h} r R^2.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Edvard Schwarz*, *Leo Schedlbauer* a *Jos. Wierer* z VIII. tř. v Klatovech, *Frant. Nušl* z V. tř. g. v Jindřichově Hradci, *Ferd. Zuna* z VIII. tř., *J. Žák* a *Jos. Svoboda* ze VII. tř. g. v Písku.

Řešení úlohy 16.

(Podal p. *Jos. Kulhánek,* stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Daná ellipsa $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ a kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ protínají se ve čtyřech bodech a to v úhlech stejných. Souřadnice jednoho z těchto průsečíků jsou

$$x = \frac{a}{e}\sqrt{r^2 - b^2}, \quad y = \frac{b}{e}\sqrt{a^2 - r^2}$$

a tečny sestrojené v něm k oběma křivkám svírají úhel určený rovnicí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{ab} \sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}.$$

Úhel ten dosáhne maxima, když jest $r^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$, t. j.

prochází-li kružnice body, v nichž protínají ellipsu úhlopříčny obdélníka omezeného tečnami sestrojenými ve vrcholech ellipsy.

Podobné řešení podali pp.: *Ant. Klír* a *J. Prokůpek* ze VII. tř. české reálky v Praze, *Boh. Mašek* ze VI. tř. g. na Novém Městě v Praze, *Ant. Pleskot* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Fr. Fišer* z VIII. tř. v Roudnici a *Justic Siegfried* z VIII. tř. v Táboře.

Mimo to zaslali řešení pp.: *Jan Sobotka*, kand. prof. v Praze, *J. Karlík* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Ant. Klíma* a *Ferd. Zuna* z VIII. tř. v Písku, *Moric Hirsch* z VIII. tř. v Chrudimi a *Frant. Nušl* z V. tř. g. v Jindřichově Hradci.

Řešení úlohy 17.

(Zaslal p. *Josef Sumr*, stud. VII. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze.)

a) Souřadnice realného mimo počátek ležícího průsečíku obou parabol jsou

$$x = 2.\sqrt[3]{pq^2},\quad y = 2\sqrt[3]{p^2q}$$

a tedy plocha parabolami omezená

$$P = \tfrac{1}{3}\,xy = \tfrac{4}{3}\,pq.$$

b) Úhel obou křivek v bodě tom stanoví rovnice

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3\sqrt[3]{pq}}{2\left(\sqrt[3]{p^2}+\sqrt[3]{q^2}\right)},$$

z níž při $p = q$ následuje $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{4}$ a tudíž $\varphi = 36^{0}52'12''$.

c) Vyloučíme-li hodnoty parametrů p, q z rovnic křivek daných a z rovnice podmíněné $p + q = c$, obdržíme

$$x^3 + y^3 = 2cxy;$$

jest tedy při podmínce $p + q =$ const. hledaným místem geometrickým *list Descartův*.

Jestli však $pq = c$, obdržíme $xy = 4c$, kteráž rovnice přísluší *hyperbole*.

Správné řešení zaslali pp.: *B. Tschapek* ze VII. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze, *Boh. Mašek* ze VI. tř. g. na Novém Městě v Praze, *Ant. Klír* a *J. Prokůpek* ze VII.

tř. české reálky v Praze, *J. Karlík* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Fr. Fišer* z VIII. tř. v Roudnici, *Jos. Kulhánek* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Leo Schedlbauer* z VIII. tř. v Klatovech, *Ant. Pleskot* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Ferd. Zuna* z VIII. tř. a *Jos. Svoboda* ze VII. tř. gymn. v Písku, *Frant. Nušl* z V. tř. gymn. v Jindřichově Hradci.

Řešení, ač ne úplné, zaslali pp.: *Ant. Klíma* z VIII. tř. v Písku a *Moric Hirsch* z VIII. tř. v Chrudimi.

Řešení úlohy 18.

(Zaslal p. *Jos. Kulhánek,* stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Jest-li že

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = q,$$

tedy

$$a_1 = b_1 q,\ a_2 = b_2 q,\ \ldots,\ a_n = b_n q,$$

bude

$$\sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda = q \sum_{\lambda=1}^{n} b_\lambda. \qquad (\alpha)$$

Mimo to

$$\begin{array}{ll} a_1 b_1 = b_1^2 q, & \sqrt{a_1 b_1} = b_1 \sqrt{q} \\ a_2 b_2 = b_2^2 q, & \sqrt{a_2 b_2} = b_2 \sqrt{q} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_n b_n = b_n^2 q, & \sqrt{a_n b_n} = b_n \sqrt{q}, \end{array}$$

tedy součet

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \sqrt{a_\lambda b_\lambda} = \sqrt{q} \sum_{\lambda=1}^{n} b_\lambda.$$

Z (α) plyne

$$\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda} = \sqrt{q} \sqrt{\sum_{\lambda=1}^{n} b_\lambda},$$

a dělíme-li obě poslední rovnice

$$\frac{\sum_{\lambda=1}^{n} \sqrt{a_\lambda b_\lambda}}{\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda}} = \sqrt{\sum_{\lambda=1}^{n} b_\lambda} \quad \text{anebo} \quad \sum_{\lambda=1}^{n} \sqrt{a_\lambda b_\lambda} = \sqrt{\sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda \sum_{\lambda=1}^{n} b_\lambda}$$

čili

$$\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \ldots + \sqrt{a_n b_n}$$
$$= \sqrt{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)}.\text{*)}$$

Správné řešení zaslali pp.: *Frant. Jirásek* z VIII. třídy v Broumově, *Ferd. Koláčný* a *J. Karlík* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Ant. Pleskot* ze VII. tř. g. a *Moric Hirsch* z VIII. tř. v Chrudimi, *Emanuel Červený* ze VII. tř. g. v Klatovech, *Karel Rajdl* ze VI. tř. r., *Josef Sumr* a *B. Tschapek* ze VII. tř. r. městsk. r. g. na Malé Straně v Praze, *Frant. Nušl* z V. tř. g. v Jindřichově Hradci.

Řešení úlohy 19.

(Zaslal p. *Boh. Mašek*, stud. VI. tř. g. na N. Městě v Praze.)

Ustanovíme-li hodnotu daného determinantu a vyjádříme-li $\cot x$ jakožto převratnou hodnotu $\operatorname{tg} x$, obdržíme rovnici

$$(\operatorname{tg}^3 x - 1)^2 = 0,$$

z níž řešením plyne

$$\operatorname{tg} x_1 = 1, \quad \operatorname{tg} x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

a tudíž

$$x_1 = \frac{4n+1}{4}\pi, \quad x_{2,3} = \frac{4n+1}{4}\pi + \frac{1}{4} i l \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}.$$

Úlohu tuto řešili též pp : *Jos. Kulhánek* a *Jos. Slavík* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Ant. Klír*, *J. Prokůpek* ze VII. tř. a *Josef Piskáček* z V. tř. české reálky v Praze, *Jos. Sumr*, *Alois Miessler*, *B. Tschapek*, *Ant. Slánský* ze VII. tř. r., *Benj. Schwarz*, *Jar. Stehlík*, *Bohumil Matějů* ze VII. tř. g, *Bohuslav Müller* a *Karel Rajdl* ze VI. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze, *Jos. Veis* z VIII. tř. akad. gymn. v Praze, *Ant. Pleskot* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *J. Karlík* a *Ferd. Koláčný* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Emanuel Červený* ze VII. tř. g. v Klatovech a *Frant. Nušl* z V. tř. g. v Jindřichově Hradci.

*) Viz tento vzorec v článku prof. *Ant. Kostěnce:* O vypočítání obsahu komolého jehlance. Roč. XIII. 1884. Pag. 26. Mimo to připomínáme, že v roč. IX., str. 45., v úloze 19. se žádá důkaz vzorce

$$\sqrt{a \sin\alpha} + \sqrt{b \sin\beta} + \sqrt{c \sin\gamma}$$
$$= \sqrt{(a+b+c)(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)},$$

který je v platnosti pro trojúhelník. Vzorec ten má patrně hořejší tvar.

Řešení úlohy 21.

Rovnice hyperboly budiž
$$f \equiv \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0,$$
a tedy rovnice kruhu, majícího střed na hyperbole a procházejícího středem jejím
$$\varphi \equiv x^2 + y^2 - 2\xi x - 2\eta y = 0.$$
Z těchto dvou rovnic a z rovnice
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi}, & \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \end{vmatrix} = 0 \text{ čili } \frac{\xi y}{a^2} + \frac{\eta x}{b^2} = 0,$$
vylučme ξ a η; tím obdržíme rovnici křivky obalové ve tvaru
$$(a^2x^2 - b^2y^2)\,[(x^2 + y^2)^2 - 4(a^2x^2 - b^2y^2)] = 0.$$
Rozpadá se tudíž křivka obalová ve dvé přímek a ve křivku stupně 4ho, která jest geom. místem pat kolmic spuštěných z počátku k tečnám hyperboly $\frac{x^2}{4a^2} - \frac{y^2}{4b^2} = 1$, a pro $a = b$ přechází v lemniskatu.

Tutéž úlohu řešili pp: *Boh. Mašek*, stud. v Praze a *Frant. Nušl*, stud. v Jindřichově Hradci.

K řešení úlohy podané p. dr. F. S. na str. 90. připojujeme toto:

Rovnice (1) a (2) uveďme na tvar:

$$(1') \qquad x^2 - 9 = 2 - y$$
$$(2') \qquad x - 3 = 4 - y^2.$$

Z (1′) plyne $x - 3 = \frac{2 - y}{x + 3}$ a tedy dle (2′) bude též
$$\frac{2 - y}{x + 3} = 4 - y^2$$
čili
$$y^2 - \frac{y}{x + 3} = 4 - \frac{2}{x + 3},$$
a řešíme-li rovnici tuto dle y, konečně
$$y = \frac{1}{2(x + 3)} \pm \left\{ 2 - \frac{1}{2(x + 3)} \right\}.$$

Přihlížíme-li k znaménku kladnému, dostaneme $y = 2$, a tedy $x = 3$; přihlížíme-li však k znaménku zápornému, obdržíme $y = -\frac{2x+5}{x+3}$, což dosazeno do jedné z rovnic daných vede na rovnici kubickou.

Řešení úlohy 1. zaslala též p. t. *Emanuela Holoubková* v Praze, úlohu 9. a 10. zaslal p. *Čeněk Klumpar*, stud. VII. tř. r. v Hoře Kutné a úlohu 11. p. *Bohumil Markl*, stud. VIII. tř. I. českého r. g. v Praze.

Úloha 32.

S vrcholu B jest na podstavu $\overline{AC}$ spuštěna výška $\overline{BD}$, příčkou $\overline{BE}$ jest půlen úhel při vrcholu B a $\overline{BF}$ jest přímka těžná. Budiž řešen trojúhelník, jsou-li dány úseky $\overline{AD} = e$, $\overline{DE} = m$, $\overline{EF} = n$.

Prof. *Jar. Sobička.*

Úloha 33.

Řešiti trojúhelník z daného součtu podstavy a jedné strany $b + a = m$, součtu podstavy a druhé strany $b + c = n$ a úhlu β.

Týž.

Úloha 34.

Budiž řešen trojúhelník, dán-li jest součet dvou stran $a + c = s$, třetí strana b a příčka t půlící úhel β.

Týž.

Věstník literární.

A. Hlídka programů.

Dvanáctá výroční zpráva cís. král. českého gymnasia v Budějovicích, za školní rok 1884, obsahuje článek: *Pokus o theorii elektřiny. Napsal prof. Fr. Tůma.* (26 stran).

Pan spisovatel poukázav k tomu, že žádná z dosavadních domněnek o podstatě elektřiny skutečnosti nevyhovuje, pokusil se o theorii novou. O bytosti elektřiny víme s jistotou, že není látkou, nýbrž že záleží v pohybu; jde o to, co se pohybuje a o způsob, jakým pohyb tento se děje.

Pan spisovatel rozhodl se pro theorii, kterou takto vyslovuje: *„Elektřina jest chvění étheru, téhož étheru, který jest příčinou*