Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

Příspěvek k dějinám veličin soujemných. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 13 (1884), No. 5, 254--259

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122205

Příspěvek k dějinám veličin soujemných.

Napsal

prof. Dr. F. J. Studnička.

(Dokončení.)

Jak bylo zde již na str. 58. poznamenáno, objevila se celá nauka *Cauchy-ho* o ekvivalencích v rouše německém r. 1865 v 44. sv. *Grunerta* „Archiv der Mathematik und Physik," kdež redaktor sám vykládá patriarchální svou důkladností „Theorie der Aequivalenzen", při čemž praví, že tu chce své náhledy dlouho již chované uveřejniti — „die Resultate *meiner* Arbeiten über den fraglichen Gegenstand im Archive mitzutheilen und *meine* Ansichten über denselben darin niederzulegen", zároveň pak oznamuje, že *Cauchy* též podal o tomto předmětu „mehrere sehr werthvolle Abhandlungen."

Grunert tu především uznává prioritu *Cauchy-ho* slovy: „Es ist meine vollkommene Ueberzeugung, dass diese *in ihrer Grundidee und ihren Grundlagen ganz von Cauchy herrührende und ihm allein gehörende Theorie* in jeder Beziehung verdient...", avšak některé zásluhy o rozvedení celé nauky jakož i o její upotřebení si při tom právem přiznává, ač právě tato zásluha se stává problematickou, porovná-li se celá řada pojednání *Cauchy-ho,* jež jsme tu již dříve uvedli, s rozvláčným výkladem Grunertovým.

Maje před sebou všechna pojednání, v nichž *Cauchy* postupně vyvinuje a upravuje svou nauku, vstupuje *Grunert* přímo „in medias res" definicemi, že *dvě veličiny jsou ekvivalentní, jejichž rozdíl jest dělitelný veličinou* $1+i^2$, což označuje znaky

$$P \simeq Q,$$

a naopak, že *dvě veličiny jsou inekvivalentní, jejichž rozdíl není dělitelný veličinou* $1+i^2$, což vyjadřuje znaky

$$P \not\simeq Q.$$

Obě definice možná arci zahrnouti výrazem srozumitelnějším, jelikož úplnějším

$$Z\frac{P-Q}{1+i^2}=0, \qquad Z\frac{P-Q}{1+i^2}=r,$$

kdež úkon, vyhledávající zbytek, vyznačen literou Z k úkonu dělení poukazující. A že vytknutím *inekvivalence* v podstatě nezískáno ničeho, taktéž snadno se poznává; neb že pak ku každé poučce o ekvivalenci se připojuje příslušná poučka o inekvivalenci, tím není získáno než mnoho odstavců.

Vůbec možná říci o celém pokusu Grunertově, jak ve 44. i ve 45. sv. svého Archivu jej podal, že nedosáhl účele svého, jak by „der Gebrauch der sogenannten, allerdings immer in ein *gewisses Dunkel* gehüllten imaginären Grössen in völlig strenger Weise ersetzt werden soll.“ Co *Cauchy* neprovedl ve svých výkladech, nepodařilo se i Grunertovi; oba pokusy mají, jak *Hankel*)* velmi dobře praví, stejnou vadu tu, že nejednají o věci spůsobem jí přiměřeným.

V nejnovější pak době, jak poznamenal jsem již na počátku historického přehledu svého, snažil se *F. Gomes Teixeira*, professor na universitě v Koimbře, opětně zjednati platnost ekvivalencím Cauchy-ho tím, že zavedl nové zevšeobecnění úkonů algebraických nebo-li arithmetických, jež nazývá *kongruentní*, takže jedná o tom, co jest „addition congrue, soustraction congrue, multiplication congrue, division congrue, puissance congrue, l'extraction n de la racine n^{me} congrue.“ Aby pak rozeznal tyto úkony kongruentní od obyčejných úkonů arithmetických, připojuje ke známým symbolům $+$, $-$, $\times$, a t. d. znamení !, takže na př. píše

$$f(i) \times ! f_1(i) \simeq aa' - bb' + (ab' + ba')\, i,$$

$$[F(i)]^{!m} \simeq \frac{1}{[F(i)]^{!m}}\, !,$$

a zároveň definuje

$$! \sqrt{-1} \simeq i,$$

kdež znamená $! \sqrt{-1}$ *zbytek, jehož čtverec, dělen jsa veličinou* $1 + i^2$, *má zbytek* -1. Dle *Teixeiry* nemá tedy $\sqrt{-1}$ významu nežli v této soustavě kongruentních úkonů „on voit donc que les imaginaires qui n'ont pas de signification quand on considère les opérations ordinaires de l'arithmetique, ont un sens bien déterminé quand on définit les opérations comme nous venons de le faire.“

V tomto oboru Cauchy-ho vykládá pak všeobecně, že imaginárnost lze nahraditi kongruencemi, takže hlavní tresť svého

*) „Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Funktionen,“ pag. 73.

pojednání shrnuje ve slovech: „*Quand la résolution d'une question conduit à des résultats imaginaires, nous* **pouvons la transformer** *en un autre qui soit possible, en faisant dans l'énoncé de cette question un* **changement** *correspondant au changement des équations auxquelles conduit cette question en congruences de module* i^2+1.

Aby pak ukázal význam této změny (a tím osvědčil vlastně nepřiměřenost celého svého changementu), řeší úlohu, vyhledati číslo, jehož čtverec rovná se dvojnásobné hodnotě původní, zmenšené o 5, takže přeložíme-li tento česky vyjádřený úkol do mluvy mathematické, má hledané x vyhověti podmínce

$$x^2 = 2x - 5.$$

V mathematické mluvě se k tomu dává odpověď dvojí a sice

$$x = 1 + 2\sqrt{-1}, \quad x = 1 - 2\sqrt{-1};$$

má-li se však tato odpověď přeložiti nazpět do češtiny, tu poznáváme, že pro znak $\sqrt{-1}$ nemáme v oboru našich číslovek příslušného vyjádření, a že tedy nutno zavésti nový terminus, nenásleduje z toho však, co *Teixeira* tvrdí, „le problème proposé est absurde.“ Pravíme tu, že čísla taková, jichž čtverec jest negativní, jsou zvláštního druhu, v podstatě od čísel obyčejných, realných rozličná, tak že je nazvati nutno jinak, *imaginární, pomyslná.*

Jakmile však jmenovaný autor, přijda k řešení tomuto, znění daného úkolu mění a praví „si nous modifions l'énoncé du problème en demandant un nombre dont le carré divisé par i^2+1 donne le même reste que le double du nombre diminué de 5 divisé par le même diviseur“, pak neřeší přímo rovnici kvadratickou, nýbrž hledá hodnoty pro x, o nichž platí

$$Z\frac{x^2}{i^2+1} = Z\frac{2x-5}{i^2+1},$$

a řešení vyšetřené dvojí

$$x = 1 \pm 2i$$

platí pak arci pro jakoukoli hodnotu veličiny i, takže není více $i = \sqrt{-1}$ jednotkou imaginarní.

Neb zvolíme-li na př.

$$i = 7,$$

bude zníti předložený úkol takto: Má se určiti x tak, aby

$$Z\frac{x^2}{50} = Z\frac{2x-5}{50},$$

a tu patrně vyhovuje se daným výrazem

$$x = 1 + 2i = 15,$$
$$x = 1 - 2i = -13,$$

jelikož platí

$$Z\frac{225}{50} = Z\frac{25}{50} = 25,$$
$$Z\frac{169}{50} = Z\frac{-31}{50} = 19.$$

Z tohoto příkladu nejjasněji se poznává, že takto se neobjasní pojem čísel imaginarních. A co *Teixeira* dále ještě píše o svém changementu, zůstává na stejné půdě Cauchy-ho, nahražovati znění úkolu jiným, při němž se v řešení objevuje i, kteréž jest libovolné, v úloze původní však znamená $\sqrt{-1}$.

Jako jsou čísla negativní, o nichž i náš *Jandera* ve známé své předmluvě více vtipkuje nežli rozumuje, původu takořka funkcionalního, jelikož jich nutno míti, aby se výsledek odečítání mohl ve všech případech vyjádřiti, podobně jsou čísla imaginarní téhož původu algebraického, majíce sloužiti k tomu, aby se výsledek odmocňování mohl ve všech případech vyjádřiti spůsobem příslušným. Jako jest $\sqrt{4} = 2$, kdež jednotkou jest obyčejná nebo-li realná jednotka, podobně jest $\sqrt{-4} = 2i$, kdež jednotkou jest $i = \sqrt{-1}$, tedy tak zvaná imaginarní jednotka. Čísla $\sqrt{4}$ a $\sqrt{-4}$ jsou od sebe v podstatě rozdílná jako koule železná a měděná, mají však jisté vlastnosti společné, jimiž se řídí úkony algebraického sečítání, odčítání, násobení a t. d.

Pro čísla tohoto druhu platí především, jak *Hankel* velmi dobře vytkl, též

a) princip distributivní, takže na př.

$$(x + i)(x - i) = xx + ix - xi + ii,$$

b) princip kommutativní, takže na př.

$$xi = ix,$$

c) princip evanescence, takže na př.

$$(x + i)(x - i) = 0,$$

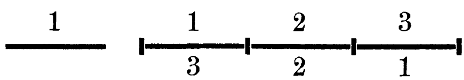
jest-li buď $x + i = 0$ neb $x - i = 0$, tedy *součin nějaký stává se nullou, stane-li se jí některý faktor jeho.*

Kdyby tento poslední princip neměl platnosti, jakož jest na př. u čísel čtyřspřežných nebo-li kvaternionů, pak může míti rovnice

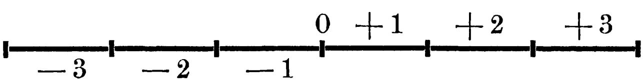
$$x^2 = -1$$

nekonečně mnoho kořenů, kdežto při jeho platnosti má pouze dva a sice $\pm i$.

Zcela jiná jest konečně stránka těchto veličin, pokud se jedná o jich zobrazení nebo-li znázornění, kterýmž se nemá podstata jejich vyšetřiti, nýbrž jen vyjádřiti spůsobem do oka bijícím. Znázorníme-li na př. jednotku danou délkou nějakou, bude číslo 3 znázorněno délkou třikráte tak velikou, při čemž jest lhostejno, připojujeme-li k sobě jednotky dané délky směrem od levé ku pravé ruce jdoucím anebo naopak.

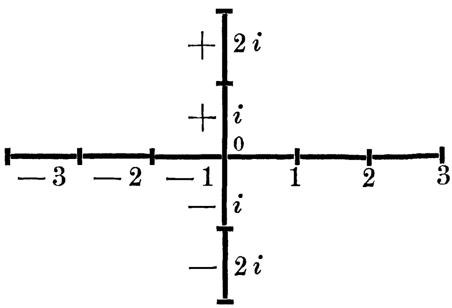


Chceme-li však znázorniti čísla odčetná nebo-li negativní, musíme zavésti do směru, jakým jednotky dané délky k sobě pojíme, určitý význam, takže na př. směr jeden co positivní, druhý pak co negativní hned z předu se vytkne, bod konečně, v němž oba směry se stýkají, vyjadřuje číslo 0.



Tímto spůsobem se tedy může znázornění čili zobrazení tak zvaných čísel *realných,* positivních i negativních provésti na přímce čili ose číselné od $-\infty$ do $+\infty$ jdoucí.

Jedná-li se však o to, aby se podobným spůsobem znázornila i čísla *imaginarní,* tu nutno vzíti za podklad celé repraesentace rovinu na všechny strany do nekonečna se táhnoucí, v níž položen jest bod nullový libovolně, kterýmž pak prochází osa čísel realných taktéž libovolně, osa čísel imaginarních však kolmo jest v tomto bodu postavena na osu čísel realných.



Že tento spůsob repraesentace jest přirozeným, vyplývajícím z protivy mezi směrem positivním a negativním, napřed stanoveným, bylo již r. 1693 od *Wallise* a r. 1753 od *Khüna* zřejmě vysloveno, a od té doby mnohokráte vyloženo; ale tím jenom znázornění a geometrické upotřebení bylo podporováno, nikoli však objasnění podstaty těchto čísel odůvodněno.

Nemajíce zde na mysli jednati vůbec o podstatě imaginarnosti a idealnosti číselných soustav, přestáváme na tomto historickém úryvku, jsouce přesvědčeni, že na základě historického rozvoje se mnohem snadněji pozná a pochopí mnohá stránka buď sporná nebo nejasná, která přímým rozborem se nevystihuje tak snadno a pohodlně. I poukazujeme v této příčině ještě jen k důkladnému pojednání, jež Dr. *L. Kraus* v tomto časopise (roč. XII. str. 153 et seqq.) dle výkladů professora *K. Weierstrasse* uveřejnil s názvem „Základové arithmetiky“.

Jednočlenná perioda zbytků z mocnin s předcházejícími členy.

Napsal

Václav Šimerka,

farář v Jenšovicích u Vysokého Mýta.

1. U modulu $M = p^\alpha q$, kdež $\alpha > 1$, a základu

$$B = pt = qu + 1,$$

kterýž $< pq$, jelikož B tímto číslem zkrátiti lze, obdržíme

$$B^\alpha = p^\alpha t^\alpha \equiv 0, \text{ (mod. } p^\alpha),$$