Václav Jeřábek

Kterak lze sestrojiti průmět elliptického řezu rotačního paraboloidu na rovině kolmé k jeho ose

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 34 (1905), No. 4, 342--348

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122197`

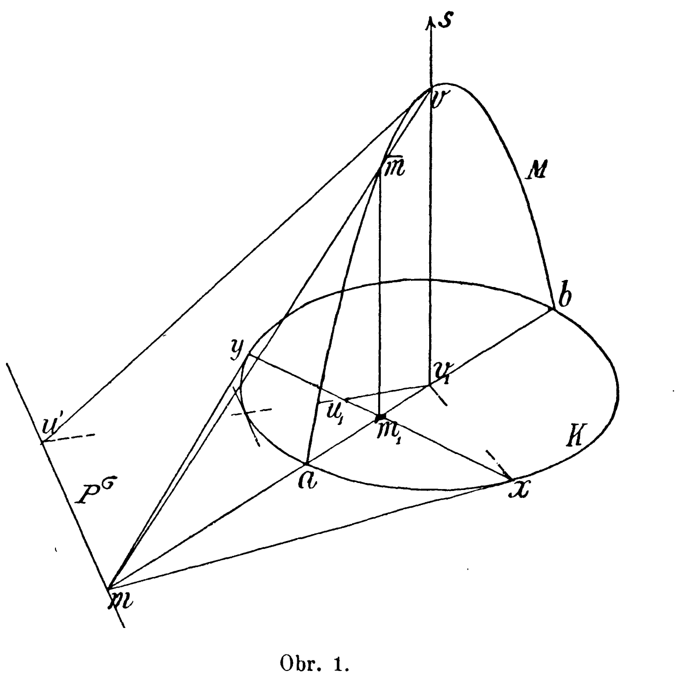
Kterak lze sestrojiti průmět elliptického řezu rotačního paraboloidu na rovině kolmé k jeho ose.

Napsal

V. Jeřábek,

ředitel c. k. státní reálky v Brně.

Budiž dán v rovině π kruh K, jehož průměrem jest ab (obr. 1.), a v prostoru bod v mající na rovině π svůj průmět ve středu v_1 kruhu K. Mějme na mysli v průměru ab dva sdružené poly m a m_1, t. j, body, z nichž každý jest na poláře bodu druhého vzhledem ke kruhu K.



Obr. 1.

Promítněme řadu polů $(m \ldots)$ na průměru ab ze středu v svazkem $v\,(m \ldots)$ a řadu polů $(m_1 \ldots)$ z úběžného bodu s přímky vv_1 osnovou $s\,(m_1 \ldots)$. Ježto řada $(m \ldots)$ jest projektivna s řadou $(m_1 \ldots)$ a naopak, jest svazek $v\,(m \ldots)$ projektivný s osnovou

$s(m_1 \ldots)$ a naopak. Výtvarem obou těchto svazků, čili geom. místem průsečíků $\overline{m}$ příslušných jejich paprsků vm a sm_1 jest kuželosečka M. Vzdálí-li se bod m na přímce ab do nekonečna, splyne bod $\overline{m}$ s bodem v, který se stane vrcholem kuželosečky M a přímka vv_1 její osou, splyne-li však bod m s bodem v_1, stane se bod m_1 bodem úběžným přímky ab, paprsek sm_1 sjednotí se s úběžnou přímkou roviny abv a bod $\overline{m}$ stane se na ose vv_1 úběžným vrcholem kuželosečky M, která za tou příčinou jest parabolou. Ježto bod m, m_1 v bodu a i v bodu b spolu splývají, jest ab tetivou paraboly kolmo sdruženou s její osou vv_1.

Otočením paraboly kolem její osy vv_1 vznikne rotační paraboloid, bod $\overline{m}$ jest průsečíkem vrcholového paprsku vm s paraboloidem a m_1 jeho průmětem na rovině π kruhu K.

Popisuje-li bod m v rovině π přímku P^σ, vytvoří paprsek vm rovinu σ, bod $\overline{m}$ ellipsu L a m_1 její průmět L_1.[1]) Že P^σ jest stopou roviny σ na rovině π, jest patrno.

Ježto polára bodu m na P^σ pohyblivého stále prochází pevným polem u_1 stopy P^σ a kolmo stojí na paprsku v_1m pevným bodem v_1 procházejícím, jest geometrickým místem bodu m_1 kružnice L_1 mající u_1v_1 za průměr.

Naleză-li se bod m vně kružnice K, protíná polára jeho kružnici K ve dvou bodech x a y, a nalezá-li se uvnitř kuželosečky K, tu zase polára bodu m_1 protíná kruh ve dvou bodech x, y. V obou případech jest trojúhelník v_1mx nebo v_1m_1x pravoúhlý, jehož výška xm_1 nebo xm, dělí přeponu v_1m nebo v_1m_1, na dva díly tak, že $\overline{v_1m} \,.\, \overline{v_1m_1} = \overline{v_1x}^2$. Za tou příčinou slují m, m_1 inversně sdruženými body dle středu v_1 a kruhu K.

Tedy:

1. Průmět m_1 bodu $\overline{m}$, v němž paprsek vrcholový vm paraboloid seče, jest inversně sdružen s bodem m, který jest stopou paprsku $v\overline{m}$ na rovině π kruhu K; v_1 jest středem a K kruhem inverse.

---

[1]) Aby obrazec 1. výkony prostorové znázorňující byl přehlednější, nejsou v obrazci tom L a L_1 vyznačeny.

2. *Každá rovina σ, jdoucí vrcholem v rotačního paraboloidu, seče jej v ellipse L, která promítá se na rovinu kteréhokoliv jeho kruhového řezu K v kružnici L_1 jdoucí body, v nichž stopa P^σ roviny σ kružnici K protíná. Je-li P^σ tečnou kružnice K, dotýká se L_1 též stopy P^σ i kruhu K v témž bodě x.*

3. *Kružnice L_1 jest inversně sdružena se stopou P^σ roviny vrcholové σ paraboloidu a má za průměr úsečku $u_1 v_1$, jejíž jeden krajní bod jest středem v_1 kruhu K a druhý u_1 polem stopy P^σ vzhledem ke kruhu K.*

Protneme-li paraboloid kteroukoliv rovinou ϱ rovnoběžnou s rovinou vrcholovou σ, obdržíme ellipsu E podobnou a podobně položenou s ellipsou L, ve které rovina vrcholová σ paraboloid seče. Střed podobnosti těchto ellips jest na průměru paraboloidu, jenž spojuje středy ellips E, L a promítá se do bodu ω_1, který jest společným průmětem středů řečených ellips. Stopu P^σ roviny σ nazveme úběžnicí této roviny.

Pročež:

4. *Průmět ellipsy, v níž kterákoliv rovina ϱ seče paraboloid, na rovinu jeho kruhového řezu K jest kružnice soustředná s kružnicí L_1 inversně sdruženou s úběžnicí roviny ϱ dle středu v_1 a kruhu K.*

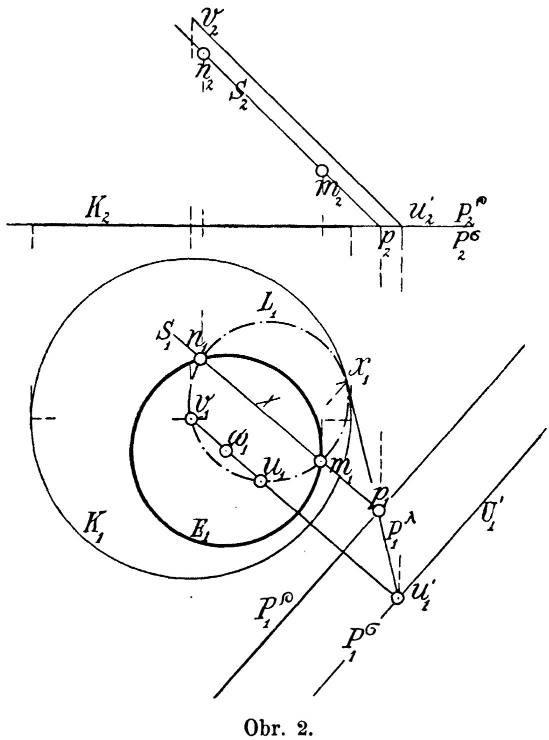
II. Nyní přikročme k zobrazení elliptického řezu rotačního paraboloidu, vzniklého rovinou ϱ v promítání orthogonálném.

Budiž dán rotační paraboloid (obr. 2.) vrcholem $v\,(v_1, v_2)$ a kruhovou stopou $K(K_1, K_2)$ mající svůj střed v průmětu v_1 vrcholu v. Stopou dané roviny sečné budiž $P^\varrho(P_1^\varrho, P_2^\varrho)$ a směr přímek největšího spádu roviny ϱ budiž dán přímkou $vu'\,(v_1u'_1, v_2u'_2)$. Zobrazme stopu $P^\sigma(P_1^\sigma, P_2^\sigma)$ roviny σ jdoucí vrcholem $v\,(v_1, v_2)$ paraboloidu rovnoběžně s rovinou ϱ a obsahující přímku $vu'\,(v_1u'_1, v_2u'_2)$ rovnoběžnou s přímkami roviny ϱ stojícími kolmo na stopě P^ϱ.

Narýsujeme-li pol u_1 úběžnice $U'_1 \equiv P_1^\sigma$, jenž jest inversně sdružen s bodem u'_1 dle středu v_1 a kruhu K, potom jest dle (4) střed ω_1 úsečky u_1v_1 středem kruhu E_1, kterým zobrazen jest první průmět elliptického řezu E paraboloidu rovinou ϱ

vzniklého. Znajíce již střed ω_1 kružnice E_1, hleďme určiti ještě její jeden bod.

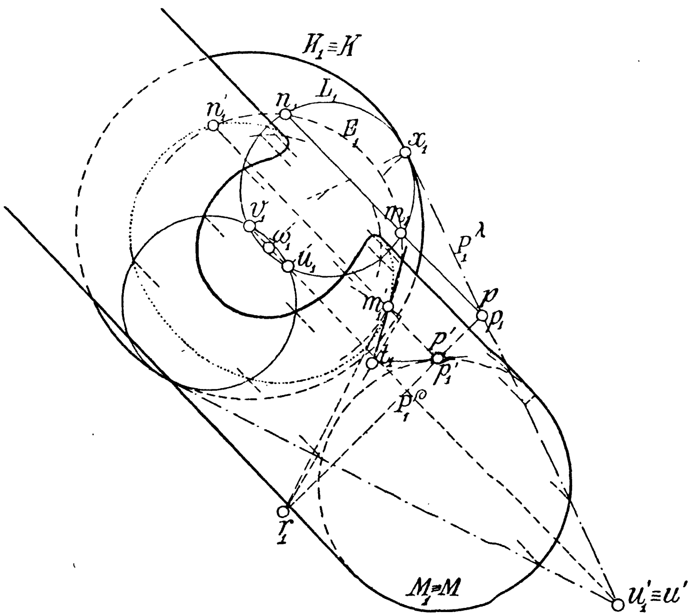
Za tím účelem položme přímkou vu' $(v_1u'_1, v_2u'_2)$ rovinu λ tak, aby její stopa $P^\lambda \equiv P^\lambda_1$ na průmětně π byla tečnou kruhu K_1 v bodu x_1 a aby tečna tato procházela bodem u'_1. Rovina λ protíná paraboloid v ellipse L, jejíž první obraz L_1 jest kružnicí jdoucím obrazem v_1 vrcholu v a dotýkající se v bodu x_1 kružnice K_1. Pozorujme ještě přímku S $(S_1 . S_2)$, která jest prů-



Obr. 2.

sečnicí rovin ϱ a λ a jež jest určena směrem přímky vu' $(v_1u'_1, v_2u'_2)$ a bodem p (p_1, p_2), v němž se stopy řečených rovin protínají. Ježto L a S nalézají se v téže rovině λ, protínají se ve dvou bodech m (m_1, m_2) a n (n_1, n_2) a tedy L_1 a S_1 určují první obrazy m_1, n_1 bodů m, n. Nyní jest již viděti, kterak kružnice E_1 ze středu ω_1 poloměrem $\omega_1 m_1$ byla sestrojena. Zároveň vysvítá, že sestrojení toto jest nezávislé na obraze druhém, je-li znám obraz u'_1 stopy u' přímky vu' jdoucí rovnoběžné s přímkami největšího spádu roviny ϱ.

III. V obrazci (3) jest sestrojen pronik rotačního paraboloidu s válcem, které svými kruhovými podstavami $K \equiv K_1$ a $M \equiv M_1$ spočívají na průmětně π. Vrcholem paraboloidu jest $v\,(v_1)$*) a $p'n'\,(p'_1 n'_1)$ povrchovou přímkou válce. Bod $u' \equiv u'_1$ jest stopou paprsku $vu'\,(v_1 u'_1)$. Tečna kruhu K_1 v bodu x_1 jdoucí bodem $u'\,(u'_1)$ jest stopou $P^\lambda\,(P^\lambda_1)$ roviny λ protínající paraboloid v ellipse $L\,(L_1)$, která jest zobrazena kružnicí L_1 mající



Obr. 3.

$v_1 x_1$ za průměr. Průsečnice $pn\,(p_1 n_1)$ roviny ϱ, jejíž přímkou největšího spádu jest $p'n'(p'_1 n'_1)$ a stopou $P^\varrho(P^\varrho_1$ s rovinou λ stanovena jest směrem přímky $p'n'$ $(p'_1 n'_1)$ a stopou p (p_1), v níž se

*) V závorce jsou označeny obrazy útvarů.

protínají stopy P^{ϱ} (P_1^{ϱ}) a P^{λ} (P_1^{λ}). Elliptický řez L (L_1) a průsečnice pn (p_1n_1) určují v rovině λ dva body m (m_1) a n (n_1) elliptického průseku E (E_1). Jest tedy kružnice E_1 sestrojená poloměrem $\omega_1 m_1$ ze středu ω_1 obrazem ellipsy E paraboloidu v rovině ϱ ležící, a že $p'_1n'_1$ jest obrazem povrchové přímky $p'n'$ válce a že $p'n'$ též v rovině ϱ leží, jsou průsečíky m'_1, n'_1 kružnice E_1 s $p'_1n'_1$ obrazy bodů m, n, v nichž přímka $p'n'$ $(p'_1n'_1)$ ellipsu E (E_1) a tedy i paraboloid seče. Body m' (m'_1), n' (n'_1) jsou tudíž body křivky, ve které se plochy paraboloidu a válce navzájem pronikají.

V obrazci jest též vyznačeno zobrazení bodů křivky proniku ležící v rovině λ, jakož i její body položené v rovině, jejíž stopa jest druhou tečnou kružnice K (K_1) jdoucí bodem u' (u'_1) a body na zdánlivém obrysu plochy.

Tečna křivky proniku v bodu m' (m'_1) prochází bodem t (t_1), v němž se stopy rovin τ a τ', které se resp. dotýkají válce a paraboloidu v bodu m' (m'_1). Stopa roviny τ jest tečnou $p't$ (p'_1t_1) kruhové stopy válce v bodu p' (p'_1) a stopa roviny tečné τ', jsouc rovnoběžna s tečnou kružnice povrchové paraboloidu v bodu m' (m'_1), kterým uvedená tečna prochází, stojí kolmo na $v_1m'_1$. Ježto rovina tečná τ' obsahuje též tečnu ellipsy E (E_1) v bodu m' (m'_1), prochází stopa rt (r_1t_1) roviny τ' bodem r (r_1), ve kterém tečna kruhu E_1 v bodu m'_1 stopu P^{ϱ} (P_1^{ϱ}) seče. Jest tedy kolmice spuštěná s bodu r (r_1) na $v_1m'_1$ stopou roviny tečné τ' a spojnice tm' $(t_1m'_1)$ tečnou křivky proniku.

Poznámka. Kdyby body v, s, z nichž s v obrazci 1. předpokládali jsme v nekonečnu, byly souměrně sdruženy dle roviny kruhu K i jeho středu v_1, pak by vytvořovaly projektivné svazky v $(m\ldots)$ a s $(m_1\ldots)$, kterými se promítají projektivné řady $(m\ldots)$ a $(m_1\ldots)$ sdružených polů přímky ab, ellipsu M o vrcholech v, s. Otočením této ellipsy M vznikl by rotační ellipsoid. Je-li dán osou ellipsoidu směr promítání, jest K jeho obrysovým kruhem (rovníkem). Body m, m_1 inversně sdružené dle středu v_1 ellipsoidu a jeho obrysového kruhu jsou centr. průměty bodů $\overline{m}$ ellipsoidu z jeho vrcholů v a s na rovině kruhu K. Promítneme-li tedy kteroukoliv povrchovou ellipsu rotačního ellipsoidu z jeho vrcholů na rovinu obrysového kruhu, obdržíme dvě kuželosečky, které jsou inversně sdruženy dle obrysového kruhu K a středu v_1.

Avšak těmito inversně sdruženými kuželosečkami mohou býti toliko kružnice. Tedy:

Každá povrchová ellipsa rotačního ellipsoidu promítá se z jeho vrcholů na rovinu jeho obrysového kruhu v kružnice, které jsou spolu inversně sdruženy dle obrysového kruhu a jeho středu.

Stopa roviny ϱ povrchové ellipsy na rovině kruhu K jest chordálou těchto kružnic, které jsou zároveň v centrálné kollineaci, jejíž osou jest řečená chordála a středem bod v_1.

Je-li osa vs rovna průměru kruhu m, stojí příslušné paprsky svazků $v(m\ldots)$ a $s(m_1\ldots)$ vzájemně na sobě kolmo, geometrickým místem bodu $\overline{m}$ jest kruh M, jehož otočením kolem osy vs povstane koule.

Promítneme-li tedy z krajních bodů průměru vs koule kterýkoliv její kruh na rovinu hlavního kruhu K kolmo stojící na průměru vs, obdržíme dvě inversně sdružené kružnice dle kruhu K a jeho středu v_1. Promítání toto z kteréhokoliv těchto bodů v, s sluje stereografické.

Z předešlého jest patrno, že tímto jednoduchým způsobem přicházíme ku známé následující pozoruhodné větě:

Kužel, jehož vrchol naleză se ve vrcholu ellipsoidu a jehož podstavou jest kterákoliv ellipsa rotačního ellipsoidu, protíná v kruhu každá rovina kolmá k ose ellipsoidu.

Grafické studium střídavého proudu.

Napsal

Dr. **Vladimír Novák,**
professor české techniky v Brne.

(Dokončení.)

4. Oscilloradiograf.

Pole elektrické i magnetické uchyluje kathodové paprsky z původního směru; úchylka jest v jistých mezích úměrna intensitě pole. Na této vlastnosti kathodových paprsků zakládá se