František Vyčichlo

Některá užití kvadratických transformací v deskriptivní geometrii

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 61 (1932), No. 8, 291--300

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122190

Některá užití kvadratických transformací v deskriptivní geometrii.

F. Vyčichlo.

(Došlo 15. března 1932.)

1. Zabývejme se nejprve řešením dotykové úlohy:

Opsati ploše 2. stupně P^2 rozvinutelnou plochu, jejíž řídící kužel je dán.

Označíme-li v vrchol daného kužele, nebo kužele A, který z něho vznikne posunutím, sestrojíme polární rovinu ϱ_v bodu v vzhledem k dané ploše P^2, která nechť ji protne v křivce P a kužel A v křivce K, při čemž vrchol v můžeme vhodně voliti ale tak, aby neležel na ploše P^2. Sestrojíme křivku S polární ke křivce K vzhledem k P; potom kužel S^K, který promítá S ze středu s plochy P^2, protne tuto v dotykové křivce Q hledané rozvinutelné plochy $\mathbf{Q}$.

Budiž a libovolný bod na Q. Sestrojíme-li v tomto bodě tečné roviny k P^2 a S^K, je jejich průsečnice T tečnou křivky Q v bodě a. Přímky sdružené k bodům na T vytvořují kužel 2. stupně obsahující přímku T. Tečná rovina α tohoto kužele podél přímky T je oskulační rovinou křivky Q v bodě a. Tím je tedy hledaná rozvinutelná plocha úplně sestrojena.

Zabývejme se nyní průměty uvažovaných útvarů do dané roviny μ. Rovina α protne P^2 v kuželosečce M, která oskuluje Q v bodě a. Průmět M_1 této kuželosečky do roviny μ oskuluje Q_1 v bodě a_1. Při sestrojování jedná se tedy o úlohu:

Určiti kuželosečku N_1, která má s Q_1 v bodě a_1 dotyk třetího řádu. Za tím účelem veďme bodem s promítací paprsek H, který protne rovinu ϱ_v v bodě h a sestrojme kuželosečku S_a, která má s křivkou S v bodě $\bar{a}$*) dotyk 3. řádu a prochází bodem h. Při tom bude výhodné zvoliti rovinu ϱ_v rovnoběžně s průmětnou μ a odvoditi bod v jakožto její pól vzhledem k P^2.

*) $\bar{a}$ je průmět a ze středu s na S.

Dále odvoďme si k ploše P^2 onu plochu homologickou P^+ pro a jako střed homologie a α jako rovinu homologie, která prochází bodem s. Ježto plochy P^2 a P^+ mají v a dotyk 3. řádu, protne kužel Π, který promítá S_a z bodu s, plochu P^+ v křivce Q^+, jež se bude křivky Q dotýkati v bodě a rovněž v řádu třetím. Má tudíž i $Q_1{}^+$ s Q_1 v bodě a_1 dotyk 3. řádu.

Úloha naše je tím převedena na úlohu sestrojiti kuželosečku N_1, jež se dotýká křivky $Q_1{}^+$ v bodě a_1 v řádu třetím.

Křivka Q^+ je čtvrtého řádu a má bod s za bod dvojný; proto $Q_1{}^+$ je rovinná kvartika, která má h_1 za bod trojnásobný. Tečná rovina k ploše P^+ v bodě s protíná S^K ve dvou přímkách H^1, H^2. Tečná rovina tohoto kužele sestrojená podél přímky H protíná se s tečnou rovinou plochy P^+ příslušející bodu, v němž H plochu P^+ mimo s ještě protíná, v přímce H^3. Průměty $H_1{}^1H_1{}^2H_1{}^3$ jsou tečnami křivky $Q_1{}^+$ v bodě h_1.

Sestrojme další dva body b_1 a c_1 na $Q_1{}^+$ a některou z kuželoseček U jimi procházejících, jež se v nich dotýká přímek $\overline{h_1b_1}$ a $\overline{h_1c_1}$. Transformací, jež přiřaďuje libovolnému bodu g roviny μ bod jemu sdružený vzhledem k U na přímce $\overline{gh_1}$, odpovídá křivce $Q_1{}^+$ křivka 3. řádu $\overline{Q_1{}^+}$, která obsahuje průsečíky $h_1{}^1$, $h_1{}^2$, $h_1{}^3$ přímky $\overline{b_1c_1}$ s $H_1{}^1H_1{}^2H_1{}^3$. Bod b_1, c_1 jsme odvodili jako průměty dvou bodů na Q^+. Rovina promítací, která těmito je stanovena, protíná P^+ a Π v dalších dvou společných bodech d, e, jichž průměty d_1, e_1 leží na přímce $\overline{b_1c_1}$. Přímky $\overline{d_1h_1}$, $\overline{e_1h_1}$ jsou tečnami křivky $\overline{Q_1{}^+}$ v dvojném bodě.

Přísluší-li v uvedené transformaci bodu a_1 bod $\overline{a}$, potom přísluší kuželosečce N_1, která $Q_1{}^+$ v a_1 oskuluje, kuželosečka $\overline{N_1}$ procházející rovněž body b_1, c_1, a která $\overline{Q_1{}^+}$ v bodě a oskuluje.

Mysleme si nyní svazek Σ kuželoseček, které $\overline{N_1}$ v $\overline{a}$ oskulují a procházejí dvojným bodem h_1. Tento svazek protíná $\overline{Q_1{}^+}$ v řadě bodové k němu projektivní. Přiřadíme-li tedy tečně, sestrojené v bodě h_1 ke kuželosečce náležející do Σ onu přímku, která spojuje h_1 s bodem, v němž tato kuželosečka ještě seče $\overline{Q_1{}^+}$, obdržíme dva projektivní svazky, v nichž tečny $\overline{d_1h_1}$, $\overline{e_1h_1}$ jsou samodružné. Projektivnost ta bude tudíž určena, když sestrojíme kuželosečku, která $\overline{N_1}$ v $\overline{a}$ oskuluje a prochází bodem $h_1{}^3$ aneb jsou-li $h_1{}^1$, $h_1{}^2$ reálné, některým z nich. Tečně její v bodě h_1 přísluší projektivně přímka $H_1{}^3$ aneb jedna z přímek $H_1{}^1$, $H_1{}^2$.

V této projektivnosti je možno sestrojiti přímku $\overline{T}$, jejíž projektivně příslušná přímka je $\overline{h_1\bar{a}}$ i tenkráte, když tečny $\overline{h_1d_1}$, $\overline{h_1e_1}$ nejsou reálné. Potom kuželosečka $\overline{G}$, která oskuluje $\overline{N_1}$ v $\overline{a}$ a dotýká se přímky $\overline{T}$ v bodě h_1 má s $\overline{Q_1{}^+}$ v bodě a dotyk 3. řádu.

Naše kvadratická transformace převádí pak kuželosečku $\overline{G}$ v křivku 3. řádu, která prochází body b_1, c_1 a má přímky, které spojují průsečíky $\overline{G}$ s $\overline{b_1c_1}$ za tečny dvojné. Ona prochází též průsečíkem přímky $\overline{T}$ s $\overline{b_1c_1}$. Odvodíme tedy tečnu v h_1 ke kuželosečce, která oskuluje N_1 v a_1, prochází bodem h_1 a jedním z bodů b_1, c_1, $(\overline{T}\ \overline{b_1c_1})$. Tím máme obdobnou prométnost k předešlé stanovenu, která na $\overline{G}$ stanoví prométnost, jejíž osou je $\overline{b_1c_1}$.

Můžeme tudíž stanoviti pomocí $\overline{G}$ tečnu křivky N_1 v jejím bodě h_1, čímž je úloha naše řešena.

2. Přihlédněme dále ke *křivosti konchoid v rovině*. Při tom předpokládejme konchoidu vytvořenou tímto způsobem: Dána je kuželosečka A a na ní bod o. Libovolná přímka vedená bodem o nechť protne A ještě v bodě a. Stanovme na $\overline{oa}$ body a_1, a_2 v dané vzdálenosti d od a. Otáčí-li se přímka $\overline{oa}$ kolem bodu o, popisují a_1, a_2 křivku, kterou nazýváme konchoidou. Tato křivka K je šestého stupně. Můžeme ji totiž považovati za ortogonální průmět řezu roviny ϱ s jistou zborcenou plochou do roviny μ, v níž leží křivka A. Rovina ϱ je při tom rovnoběžná s μ a plocha je určena řídicími útvary: $A, O \perp \mu$ a jdoucí o, určitý řídicí rotační kužel o ose kolmé k μ. Tato plocha je šestého stupně, a proto i K je stupně šestého. Křivka K má bod o za čtyřnásobný, poněvadž kružnice středu o a poloměru d protne A ve čtyřech bodech; spojnice těchto bodů s o jsou tečnami křivky K v bodě o. — Dále je patrno, že úběžné body křivky A jsou dvojnými body křivky K. Z toho plyne, že lze K převésti kvadratickou transformací v křivku K_1 stupně 4. Základní křivka transformace, označme ji A_0, je podobná a podobně položená ke křivce A a má bod o za střed. Můžeme tedy za A_0 zvoliti křivku shodnou s A, kterou obdržíme posunutím této tak, aby její střed splynul s o.

Abychom transformaci vyjádřili analyticky, zvolme tečnu křivky A v bodě o za osu X a o za počátek pravoúhlé soustavy souřadné. Rovnice křivky A jest:

$$2y = ax^2 + 2bxy + cy^2, \qquad (1)$$

její střed o_0 má souřadnice

$$x_0 = \frac{-b}{ac - b^2}, \quad y_0 = \frac{a}{ac - b^2};$$

rovnice křivky A_0 je tedy:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 - \frac{-a}{ac - b^2} = 0.$$

Polára bodu (x, y) vzhledem k A_0 jest:

$$(ax + by) X + (bx + cy) Y - \frac{a}{ac - b^2} = 0.$$

Pro bod sdružený k (x, y) na přímce, která jej spojuje s bodem o, platí úměra:

$$y : x = Y : X.$$

Z této a předcházející rovnice vyjádříme x, y. Dostaneme:

$$x = \frac{aX}{(ac - b^2)(aX^2 + 2bXY + cY^2)},$$

$$y = \frac{aY}{(ac - b^2)(aX^2 + 2bXY + cY^2)}. \qquad (2)$$

Z polární rovnice křivky A:

$$2 \sin \varphi = (a \cos^2 \varphi + 2b \sin \varphi \cos \varphi + c \sin^2 \varphi) \varrho$$

dostaneme rovnici křivky K:

$$2 \sin \varphi \pm d (a \cos^2 \varphi + 2b \sin \varphi \cos \varphi + c \sin^2 \varphi) =$$
$$= (a \cos^2 \varphi + 2b \sin \varphi \cos \varphi + c \sin^2 \varphi) \varrho,$$

jež v pravoúhlých souřadnicích přechází v rovnici:

$$(x^2 + y^2)(ax^2 + 2bxy + cy^2 - 2y)^2 - d^2 (ax^2 + 2bxy + cy^2)^2 = 0. \quad (3)$$

Dosadíme-li za x, y hodnoty (2), píšíce zároveň x, y místo X, Y, obdržíme rovnici křivky K_1 ve tvaru

$$(y_0 - 2y)^2 (x^2 + y^2) - d^2 (ax^2 + 2bxy + cy^2)^2 = 0. \qquad (4)$$

Má tedy K_1 bod o za dvojný; přímka $y = \frac{1}{2} y_0$ protíná asymptoty

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$$

křivky A_0 v bodech, jež jsou taktéž dvojnými body křivky K_1.

Poněvadž svazek kuželoseček, které se dotýkají uvedených asymptot v bodech na přímce $y = \frac{1}{2} y_0$, má rovnici:

$$(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \lambda (2y - y_0)^2 = 0,$$

plyne: Ty body sdružené k bodům křivky K_1, které se s ní nacházejí na přímkách jdoucích bodem o, vyplňují kuželosečku K_2. Zvolme specielně kuželosečku L danou rovnicí:

$$y_0 (ax^2 + 2bxy + cy^2) - (2y - y_0)^2 = 0. \qquad (5)$$

Její střed l leží na přímce $\overline{oo_0}$ a sice jest $\overline{ol} = \frac{2}{3} \overline{oo_0}$; přímku $\overline{oo_0}$ seče v bodech: o_0 a v bodě b, pro který $\overline{ob} = \frac{1}{3} \overline{oo_0}$, osu X ve společných bodech s A_0, tak, že pól osy X vzhledem k ní půlí $\overline{oo_0}$. Přímky X a $\overline{oo_0}$ jsou vzhledem k ní sdruženy. Tato kvadratická transformace převádí bod (x, y) do bodu (X, Y), jejichž souvislost je dána rovnicemi:

$$y_0 (ax + by) X + [y_0 (bx + cy) - 4y + 2y_0] Y + y_0 (2y - y_0) = 0$$

$$y : x = Y : X.$$

Z těchto rovnic plyne:

$$x = \frac{y_0 (y_0 - 2Y) X}{y_0 (aX^2 + 2bXY + cY^2 + 2Y) - 4Y^2},$$

$$y = \frac{y_0 (y_0 - 2Y) Y}{y_0 (aX^2 + 2bXY + cY^2 + 2Y) - 4Y^2}. \tag{6}$$

Dosadíme-li do rovnice (4) za x, y hodnoty (6) a píšeme-li potom x, y místo X, Y, obdržíme křivku K_2:

$$y_0^2 (x^2 + y^2) - d^2 (y_0 - 2y)^2 = 0, \tag{7}$$

v kterou přechází křivka (4) právě uvedenou kvadratickou transformací. Křivka K_2 je tedy kuželosečka, která má o za ohnisko a přímku $y = \frac{1}{2} y_0$ za příslušnou přímku řídicí. Pro $y = 0$ je $x = \pm d$, je tedy d parametr této křivky.

Přechází tudíž daná konchoida dvojí kvadratickou transformací v kuželosečku (7).

Provedená konstrukce předpokládá, že kuželosečka A má střed o_0. Když ale A je parabolou, jejíž rovnice v téže soustavě o, (x, y) jest: $2y = (ax + by)^2$, potom křivka A_0 se rozkládá ve dva průměry její, jež jsou souměrně položeny vzhledem k bodu o. Zvolme průměry dané rovnicí:

$$(ax + by)^2 - a^2 d^2 = 0. \tag{3'}$$

Rovnice křivky K tu bude:

$$[(ax + by)^2 - 2y]^2 (x^2 + y^2) - d^2 (ax + by)^4 = 0. \tag{4'}$$

Polára libovolného bodu (x, y) vzhledem k (3′) má rovnici:

$$(ax + by) (AX + BY) - a^2 d^2 = 0.$$

Když z této rovnice a z rovnice $y : x = Y : X$ vyjádříme x a y, obdržíme:

$$x = \frac{a^2 d^2 X}{(aX + bY)^2}, \quad y = \frac{a^2 d^2 Y}{(aX + bY)^2}.$$

Touto transformací přechází křivka (4′) v křivku:

$$(2y - a^2 d^2)^2 (x^2 + y^2) - d^2 (ax + by)^4 = 0. \tag{8}$$

Tato křivka má bod o za dvojný, kdežto druhé dva její dvojné body splývají v průsečíku přímek:

$$2y - a^2 d^2 = 0, \quad ax + by = 0.$$

Základní kuželosečka pro kvadratickou transformaci křivky (8) bude se skládati tudíž ze dvou přímek procházejících uvedeným průsečíkem a harmonických k těmto přímkám. Zvolme ji tak, aby měla rovnici:

$$a^2d^2(ax + by)^2 - (2y - a^2d^2)^2 = 0. \tag{9}$$

Polára bodu (x, y) vzhledem k (9) má rovnici:

$$a^3d^2(ax + by)X + [a^2d^2b(ax + by) - 2(2y - a^2d^2)]Y + \\ + a^2d^2(2y - a^2d^2) = 0,$$

z kteréžto rovnice a z úměry $x : y = X : Y$ plynou transformační vzorce:

$$x = -\frac{ad^2(2Y - a^2d^2)X}{a^2d^2(aX + bY)^2 - 2Y(2Y - a^2d^2)},$$

$$y = -\frac{ad^2(2Y - a^2d^2)Y}{a^2d^2(aX + bY)^2 - 2Y(2Y - a^2d^2)}.$$

Touto transformací přejde křivka (8) v křivku:

$$a^4d^2(x^2 + Y^2) - (2y - a^2d^2)^2 = 0. \tag{10}$$

Je to kuželosečka, která má bod o za ohnisko, jejíž parametr je roven d a jejíž řídící přímka, příslušná bodu o, má rovnici:

$$2y - a^2d^2 = 0,$$

takže spojuje body v konečnu, v nichž průměry (3′) paraboly A tuto protínají.

Pomocí těchto dvou transformací kvadratických, pro které jsou křivky A_0 a L základními, lze snadno sestrojiti kuželosečku, jež má v daném bodě p křivky K s touto dotyk řádu třetího postupem vyloženým v odstavci předchozím používajíce známých vlastností racionálních křivek 3. řádu.

S výhodou můžeme též použíti této vlastnosti: Kuželosečky, které mají s racionální kubikou v daném bodě p dotyk 3. řádu, tvoří svazek, jenž z ní vytíná kvadratickou involuci té vlastnosti, že spojnice párů bodových v ní se protínají v jednom bodě r na křivce. Jedna kuželosečka svazku rozpadá se v tečnu křivky v bodě p a v přímku k ní nekonečně blízkou. Protíná-li tedy tato tečna křivku ještě v bodě q, je tento jedním dvojným bodem involuce, následkem čehož tečna ke křivce v bodě q seče ji v bodě r. Spojnice bodu r s dvojným bodem křivky je tečnou v něm té kuželosečky svazku, která jím prochází.

Abychom tedy sestrojili kuželosečku, která má s konchoidou v bodě p dotyk 3. řádu, odvodíme na $\overline{op}$ bod p_1 sdružený vzhledem k A_0 a k bodu p_1 bod sdružený p_2 vzhledem ke kuželosečce L. Bod p_2 leží na kuželosečce K_2. Sestrojme nyní jednoduchou známou konstrukcí kuželosečku Q_2, která K_2 v bodě p_2 oskuluje, prochází o

a dotýká se tu přímky kolmé k $\overline{p_2 o}$. Tato kuželosečka přechází kvadratickou transformací, mající L za kuželosečku základní, v křivku 3. řádu Q_1, jež má s křivkou K_1 v bodě p_1 dotyk 3. řádu. Kuželosečka E, která se křivky Q_2 v bodě p_2 dotýká a je opsána trojúhelníku z dvojných bodů křivky K_1, přechází transformací v tečnu $\overline{p_1 q_1}$ křivky Q_1, která spojuje p_1 s bodem, v němž tečna v p_2 ke Q_2 seče přímku $y = \frac{1}{2} y_0$. Kuželosečka E má s Q_2 ještě společný bod q_2; přímka $\overline{p_2 q_2}$ protíná tečnu $\overline{p_1 q_1}$ v bodě q_1 náležejícím křivce Q_1.

Dále si vytkněme kuželosečku opsanou trojúhelníku z dvojných bodů křivky a dotýkající se Q_2 v q_2 a stanovme přímku I, která spojuje bod p_2 s bodem r_2, v němž ona seče ještě Q_2.

Tečna v q_2 ke Q_2 protíná $y = \frac{1}{2} y_0$ v bodě, jehož spojnice s q_1 je tečnou v tomto bodě ke Q_1, a přímka $\overline{p_2 r_2}$ seče tuto přímku v r_1 na Q_1. Potom kuželosečka Q'_1, která se dotýká přímky $\overline{o r_1}$ v bodě o a křivku Q_1 v bodě p_1 oskuluje, má s K_1 v p_1 dotyk 3. řádu.

Kuželosečce, která oskuluje Q_2 v p_2 a prochází dvojnými body křivky Q_1 na přímce $y = \frac{1}{2} y_0$, přísluší vytčenou transformací kuželosečka, která prochází týmiž dvojnými body, a K_1 v p_1 oskuluje; z ní pomocí homologie lze křivku Q'_1 odvoditi. Transformujeme-li nyní kuželosečku Q'_1 vzhledem ke kuželosečce A_0 přejde v křivku 3. stupně Q', která má dvojný bod o a dotýká se křivky K v bodě p v řádu třetím. Obdobnou konstrukcí jako prve odvodíme i zde kuželosečku Q procházející o, jež má s Q' a tedy i s K v bodě p dotyk řádu třetího.

Při tom kuželosečky, jichž při konstrukci používáme a jež odpovídají kuželosečkám opsaným trojúhelníku z dvojných bodů křivky K_1, procházejí opět bodem o a jsou homotetické s kuželosečkou A. Když ve zvláštním případě kuželosečka A je parabolou, potom právě uvedené kuželosečky prvého druhu použité při přechodu od K_2 ke K_1 procházejí bodem o a dotýkají se přímky $2y - a^2 d^2 = 0$ v průsečném bodě s přímkou $ax + by = 0$, kdežto kuželosečky druhého druhu při přechodu od K_1 ke křivce K_2 jsou paraboly procházející bodem o a homotetické s parabolou A, čímž se konstrukce zjednodušují.

3. Položme si nyní úlohu:

Je dána rotační plocha R, která vzniká otočením dané kuželosečky U kolem takové přímky O v její rovině, která je rovnoběžná s jednou osou kuželosečky; sestrojiti sdružené průměty dotykové křivky této plochy s opsanou jí plochou válcovou P daného směru.

Předpokládáme při tom první průmětnu kolmou, druhou rovnoběžnou k ose O a můžeme předpokládati, že kuželosečka U náleží hlavnímu meridiánu plochy, že tedy leží v rovině rovnoběžné s průmětnou druhou. Posuňme kuželosečku U kolmo k ose O do polohy U_0, v níž splyne O s příslušnou osou křivky U_0. Budiž d

délka tohoto posunutí. Křivka dotyku válcové plochy s rotační plochou 2. stupně R_0, již vytvoří kuželosečka U_0 otáčením kolem O, je kuželosečka ležící v průměrové rovině plochy P_0. Stanovme křivku dotyku K_0 plochy R_0 s válcovou plochou, která má týž směr jako plocha P. Budiž $\varkappa_0$ rovina křivky K_0. Křivku dotyku K plochy R a P lze vytvořiti tím způsobem, že pohybujeme přímkou rovnoběžnou s průmětnou tak, aby ustavičně protínala O a K_0, čímž vytvoří konoid Q, který obsahuje křivku K, a na němž libovolnému bodu p na K přísluší p^1 na K_0 tak, že $\overline{pp^1} = d$.

Vlastní úlohou naší bude sestrojiti v průmětech p_1, p_2 bodu p na K kuželosečky, jež mají s průměty K_1, K_2 křivky K dotyk 3. řádu. Za tím účelem sestrojíme v rovině $\varkappa_0$ kuželosečku A, která má s K_0 v bodě p_0 dotyk 3. řádu a prochází středem o plochy R_0. Křivka K_1 je konchoidou křivky $K_{0,1}$ pro bod o_1 jakožto pól. Můžeme tedy podle předcházejících konstrukcí sestrojiti za pomocí kuželosečky A_1 kuželosečku P_1, která prochází bodem o_1 a má s K_1 v bodě p_1 dotyk 3. řádu.

Konoid Q_0, který má O, A a prvou průmětnu za řídící útvary, protne válcovou plochu C rovnoběžnou s O a procházející křivkou P_1, v křivce P, jež má s křivkou K v bodě p dotyk 3. řádu. Konoid Q_0 je 3. stupně, má O za dvojnou přímku a nekonečně vzdálenou přímku prvé průmětny za jednoduchou přímku. Tvořicí jeho přímky vytnou tudíž na této přímce bodovou involuci, jež je prométná k řadě bodů, v níž protnou přímku O. Proto průměty bodů, v nichž páry přímek na Q_0 v rovinách rovnoběžných s prvou průmětnou protínají ještě plochu C (mimo na O), tvoří involuci na P_1; spojnice bodů v sdružených párech vytvořují tudíž paraboloid H, obsahující přímku $O^1 \parallel O$, jejíž prvý průmět jest střed o_1^1 zmíněné involuce na P_1. Křivka P je tudíž též pronikem plochy H s plochou C.

Budiž dále R_1 kuželosečka, která má s P_1 v bodě p_1 dotyk 3. řádu a prochází bodem o'_1. Plocha válcová křivkou R_1 vedená a rovnoběžná s O protíná potom plochu H mimo o^1 v křivce R 3. řádu, jež má s K v bodě p rovněž dotyk 3. řádu. Její průmět R_2 bude se tudíž dotýkati křivky K_2 v bodě p_2 rovněž v řádu třetím. Přímky v prvé průmětně náležející svazku o_1^1 jsou prométné k řadě na O; tím dospíváme k vytvoření plochy H pomocí svazku rovin majícího O za osu a prométného k němu svazku rovin rovnoběžných s prvou průmětnou. Tím je dána konstrukce jednotlivých bodů křivky R_2 na přímkách rovnoběžných s osou X, v níž se obě průmětny protínají. Křivka ta má nekonečně vzdálený bod na X za dvojný. Přímka bodem o_1 kolmo k X vedená protne R_1 ještě v bodě g_1, jemuž příslušný bod g_2 na základě uvedené prométnosti snadno sestrojíme. Tento bod leží na o_2^1. Nekonečně vzdálený bod této přímky náleží rovněž křivce R_2 a třetí bod l_2 na O_2^1 sestrojíme na základě toho, že leží na oné přímce L plochy H, jejíž průmět L_1 jest tečnou křivky R_1 v bodě o_1^1.

Pro kvadratickou transformaci křivky K_2 můžeme tu za křivku základní zvoliti kružnici nad průměrem $\overline{g_2 l_2}$. Touto transformací přejde R_2 v parabolu R^0, jejíž osa je rovnoběžná s X. Bodu p_2 přísluší na R^0 koncový bod d^0 průměru paraboly vedeného bodem p_2, tečně v p_2 k R_2 přísluší kuželosečka, dotýkající se R^0 v bodě d^0 a procházející dvojným bodem křivky R_2 a body g_2, l_2. Tato má s R^0 ještě další společný bod, pro nějž snadno sestrojíme rovnoběžku k X, která jej obsahuje, a ta protne tečnu křivky R_2 náležející bodu p_2 v bodě d_2^1 na R_2. A obdobnou konstrukcí sestrojíme tečnu v d_2^1 k R_2 a přímku, která spojuje její další průsečík s R_2 a dvojný bod na R_2. Potom kuželosečka, která má tuto přímku za asymptotu a oskuluje R_2 v p_2, dotýká se křivky K_2 v p_2 v 3. řádu.

4. Proveďme dále řešení úlohy obecnější k prve uvedené: *Sestrojiti sdružené průměty křivky K, podél níž se plochy R**) *dotýká rozvinutelná plocha, jejíž řídicí kužel A je dán.*

Půjde tu opět o sestrojení kuželoseček, jež se dotýkají v 3. řádu křivek K_1, K_2 v bodech p_1, p_2, jež jsou průměty libovolného bodu na K.

Sestrojíme opět dotykovou křivku K^0 plochy 2. stupně R^0 s opsanou jí rozvinutelnou plochou, která má kužel A za řídicí. Odpovídá-li podle dřívějšího bodu p na K bod p^1 na K^0, tu jak jsme uvedli v předcházejících úvahách, dovedeme sestrojiti kuželosečku H_1^0, která má s K_1^0 v bodě p_1^1 dotyk 3. řádu, a kuželosečku H_2^0, která má v p_2^1 dotyk 3. řádu s K_2^0. Poněvadž K_1 je konchoidou křivky K_1^0 pro bod o_1, jakožto pól, dovedeme sestrojiti kuželosečku H_1, která s K_1 má v bodě p_1 dotyk 3. řádu a prochází bodem o_1. Křivku H_1^0 nahradíme hyperbolou V_1^0, která má s H_1^0 dotyk 3. řádu v p_1^1, a jejíž jedna asymptota je kolmá k X. Rovněž tak nahradíme H_2^0 hyperbolou V_2^0, jejíž jedna asymptota je kolmá k X, a která se dotýká v 3. řádu kuželosečky H_2^0 v bodě p_2^1.

Křivky V_1^0, V_2^0 jsou průměty prostorové kubiky V, která protíná přímky A a nekonečně vzdálenou přímku prvé průmětny, při čemž druhý průsečík náleží kolmicím k X. Jest proto konoid S^0, který má O, úběžnou přímku prvé průmětny a křivku V za útvary řídicí, plochou 4. stupně.

Přímky, jež protínají O a jsou bisekantami křivky V, vytvořují plochu 2. stupně. Rovněž vytvořují bisekanty křivky V rovnoběžné s prvou průmětnou plochu 2. stupně. Obě plochy se tudíž protínají mimo V v přímce C, která náleží konoidu S^0. Tato přímka, jakožto bisekanta křivky V, jest proto dvojnou plochy S^0. Roviny

*) Odst. 3.

rovnoběžné s prvou průmětnou protínají tudíž V v involuci, která se promítá do prvé průmětny v involuci na V_1.

Vedeme-li pólem o_1^0 této involuce přímku $\overline{o_1 o_1^0}$, obdržíme na ní jeden pár její e_1, f_1, jakožto průmět bodů e, f, na V, pro něž přímka $\overline{e_2 f_2}$ je rovnoběžná k ose X. Jest proto $\overline{ef} = C$.

Libovolná rovina přímkou C protne S^0 ještě v kuželosečce Σ^0. Zvolme za takovou rovinu onu, jež spojuje C s p a stanovme pro Σ^0 tečnu v p a další tři body. Odvoďme potom kuželosečku Σ, která má se Σ^0 v bodě p dotyk 3. řádu a prochází bodem $(O \times C)$. Potom můžeme za účelem naší konstrukce plochu S^0 nahraditi konoidem S, který má nekonečně vzdálenou přímku prvé průmětny, přímku O a kuželosečku Σ za útvary řídicí, a je tudíž 3. stupně. Přímky tvořicí plochy S promítají se opět do prvé průmětny v involuci ve svazku o_1, jenž protne H_1 v involuci, pro niž stanovíme pól o_1^1, načež nahradíme kuželosečku H_1 kuželosečkou R_1, která má s ní v p_1 dotyk řádu třetího a prochází o_1^1. Tím máme další konstrukci této úlohy převedenu na případ předchozí.

*

Quelques applications des transformations quadratiques dans la géométrie descriptive.

(Extrait de l'article précédent.)

Dans l'article précédent, les transformations quadratiques sont appliquées à la solution de quatre problèmes, importants dans la géométrie descriptive. Il s'agit des problèmes de contact et de la construction des projections conjuguées des courbes gauches qui y sont prises en considération. Pour les construire, il faut connaître, outre les points et les tangentes particulières, les coniques qui possèdent un contact d'ordre supérieur avec les courbes. L'auteur construit au point d'une telle courbe la conique qui a avec la courbe un contact du 3-e ordre. Pour ce but, les courbes prises en considération sont remplacées, par un procédé approprié, par des quartiques rationnelles. Une ou deux transformations quadratiques transforment ces quartiques en des cubiques rationnelles ou en des coniques. A l'aide de ces courbes et des propriétés connues des cubiques rationnelles les coniques se trouvent construites.