Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Dusl

O obecných polynomech Laguerrových

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 61 (1932), No. 8, 281--290

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122184`

O obecných polynomech Laguerrových.

Napsal *Karel Dusl.*

(Došlo 19. března 1932.)

1. V tomto pojednání chci ukázati, jak se některé vlastnosti polynomů Hermitových dají dokázati i pro polynomy Laguerrovy[1]) a zejména podati zevšeobecnění Laguerrova řetězce pro integrállogaritmus.

Laguerrovy polynomy stupně n-ho určeny jsou tvořící funkcí:

$$y = \frac{e^{\frac{xt}{1-t}}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{t^n}{n!}. \tag{1}$$

Laguerrovy zobecnělé polynomy k-ho řádu pak poskytuje rozvój:

$$y = \frac{e^{\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} L_{n,k}(x) \frac{t^n}{n!} \tag{2}$$

konvergentní pro každé x a pro $|t| < 1$. Budu uvažovati jen tyto obecnější polynomy k-ho řádu a psáti je krátce $L_n(x)$ a jen, kde bude nutno uvedu index řádový.

2. Především je známo, že polynom $L_n(x)$ vyhovuje diferenciální rovnici:

$$xL''_n + (k + x) L'_n - nL_n = 0. \tag{I}$$

Tato rovnice jest jen specielním případem rovnice:

$$xy'' + (\gamma - x) y' + \alpha y = 0, \tag{I'}$$

jejíž jedno řešení jest funkce Kummerova:[2])

$$y = G(\alpha, \gamma, x), \tag{II}$$

---

[1]) Jos. Korous: O řadách Laguerrových polynomů. Rozpravy II. tř. XXXVII. č. 40.

[2]) Kummer: Journal für reine und angewandte Matematik. Sv. XV. 1836, str. 139.

při čemž:

$$G(\alpha, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{3}$$

Srovnáme-li obě diferenciální rovnice, vidíme, že

$$L_{n,k}(x) = c\, G(-n, k, -x) = \tag{4}$$

$$= c\left[1 + \frac{n}{k} x + \frac{n(n-1)}{k(k+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{k(k+1)\dots(k+n-1)}\right].$$

Jestliže skutečně rozvineme oba faktory tvořící funkce (2) v řadu potenční vidíme, že součinitel x^n v $L_{n,k}(x)$ musí býti rovný jedné a tedy:

$$c = k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1). \tag{5}$$

Jeví se tedy polynomy Laguerrovy jako konfluentní degenerace oněch polynomů, které vystupují v rozvoji hypergeometrické funkce: $\frac{1}{x} F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{1}{x}\right)$ a jsou příbuzné polynomům Jacobiho.[3])

Klademe-li:

$$\mathfrak{F}_n(\alpha, \gamma, x) = F(-n, \alpha+n, \gamma, x), \tag{6}$$

jest pak:

$$G(-n, k, -x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathfrak{F}_n\left(\frac{1}{\varepsilon}, \gamma, -\varepsilon x\right). \tag{III}$$

Z této souvislosti s funkcí Kummerovou vyplývá druhá definice polynomů Laguerrových, totiž:

$$L_{n,k}(-x) = \frac{x^{1-k} e^x}{(k, n)} \frac{d^n}{dx^n} [x^{k+n-1} e^{-x}] \tag{7}$$

$$L_{0,k}(-x) = 1, \tag{8}$$

při čemž: $(k, n) = \dfrac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(k)}$ jest symbol Appellův. (9)

3. Důležité jsou vzorce rekurentní. Z definice (2) na základě tvořící funkce y plyne především:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_{n,k}(x) \frac{t^n}{n!} = (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} L_{n,k+1}(x) \frac{t^n}{n!} \tag{10}$$

odtud:

$$L_{n,k}(x) = L_{n,k+1}(x) - n\, L_{n-1,k+1}(x). \tag{IV}$$

---

[3]) Dr. L. Truksa: On the hypergeometric orthogonal systems of polynomials et. c. Praha 1931.

P. Appell-J. Kampé de Fériet: Fonctions hypergéométriques etc. Paris 1926. Str. 11 a násl.

Podobně na základě (1) a (2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_{n,k+1}(x)\frac{t^n}{n!} = (1-t)^{-k}\sum_{n=0}^{\infty} L_{n,o}\frac{t^n}{n!}. \tag{11}$$

Odtud rozvoj podle polynomů řádu nultého

$$L_{n,k+1}(x) = L_{n,o} + nk\,L_{n-1,o} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}k(k+1)\,L_{n-2,o} + \dots \tag{V}$$

Jelikož dále pro:

$$y = \frac{1}{(1-t)^k}\,e^{\frac{xt}{1-t}} \tag{12}$$

jest

$$(1-t)^2\frac{\partial y}{\partial t} - [k(1-t)+x]\,y = 0 \tag{13}$$

a

$$\left(\frac{\partial^n y}{\partial t^n}\right)_{t=0} = L_{n,k}(x) \tag{14}$$

obdržíme

$$L_{n+1,k}(x) = (2n+k+x)\,L_{n,k}(x) - n(n+k-1)\,L_{n-1,k}(x) \tag{VI}$$

a pro řád $k+1$ní:

$$\begin{aligned} L_{n+1,k+1}(x) = (2n+k+1+x)\,L_{n,k+1}(x) - \\ - n(n+k)\,L_{n-1,k+1}(x). \end{aligned} \tag{VII}$$

Obě poslední rekurentní formule týkají se jen indexu n.

4. Laguerre v Oeuvres I. 1898 str. 428 a Niels Nielsen v Theorie des Integrallogaritmus, Leipzig 1906, str. 45 udávají rozvoj integrallogaritmu

$$e^x\int_x^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,dx$$

ve zlomek řetězový ve tvaru:

$$\int_x^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,dx = e^{-x}\left[\cfrac{1}{x+1-\cfrac{1}{x+3-\cfrac{\frac{1}{4}}{x+5-\cfrac{\frac{4}{9}}{x+7-\dots}}}}\right] \tag{VIII}$$

při čemž lze dokázati, že jmenovatel n-ho přibližného zlomku jest právě specielní Laguerrův polynom $L_n(x)$ zcela podobně, jako polynom Hermitův $H_n(x)$ jest jmenovatelem n-ho přibližného zlomku řetězce:[4])

$$\cfrac{1}{x - \cfrac{1}{x - \cfrac{2}{x - \cfrac{3}{x - \dots}}}} \tag{15}$$

Protože pak obecné polynomy Laguerrovy jsou konfluentní polynomy Jacobiho, vyskytující se ve jmenovatelích přibližných zlomků rozvoje funkce $\frac{1}{x}F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{1}{x}\right)$ ve zlomek řetězový, lze nalézti výraz, který rozvinut ve zlomek řetězový dává ve jmenovateli n-té hodnoty přibližné Laguerrův polynom $L_{n,k}(x)$.

Tento výraz jest:

$$x^k e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^{k+1}} dx \tag{16}$$

což dokáži v následujícím způsobem odlišným od metody Laguerrovy:

5. Položme:

$$S = 1 - \frac{k}{x} + \frac{k(k+1)}{x^2} - \frac{k(k+1)(k+2)}{x^3} + \dots + \\ + \frac{k(k+1)\dots(k+2n-1)}{x^{2n}}. \tag{IX}$$

Je-li φ a ψ čitatel a jmenovatel n-té hodnoty sblížení příslušného řetězce, musí

$$S = \frac{\varphi}{\psi} + O\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right). \tag{17}$$

Z toho patrno, že lze napsati:

$$S = \frac{\varphi}{\psi} + \frac{1}{x^{2n}}\frac{\chi}{\psi}, \tag{18}$$

kde polynomy φ a ψ jsou stupně n-ho, polynom χ stupně $n-1$. Z rovnice:

$$\psi(x^{2n} S) = \varphi x^{2n} + \chi \tag{19}$$

vyplývá právě dostatečný počet rovnic k určení koeficientů příslušných polynomů, při čemž možno koeficienty u x^n v polyn. φ a ψ klásti rovny jedné. S vyhovuje pak diferenciální rovnici:

$$\frac{dS}{dx} - \frac{k+x}{x}S + \frac{p}{x^{2n+1}} + 1 = 0, \tag{20}$$

[4]) P. Appel-J. Kampé de Fériet: Fonctions hypergéométriques. Citov. str. 337.

kde

$$p = k(k+1)\dots(k+2n). \tag{21}$$

Dosadíme-li za S výraz z rovnice (18) nalezneme:

$$\frac{\varphi'\psi - \varphi\psi'}{\psi^2} - \frac{2n}{x^{2n+1}}\frac{\chi}{\psi} + \frac{1}{x^{2n}}\frac{\chi'\psi - \chi\psi'}{\psi^2} - \\ - \frac{k+x}{x}\left(\frac{\varphi}{\psi} + \frac{1}{x^{2n}}\frac{\chi}{\psi}\right) + \frac{p}{x^{2n+1}} + 1 = 0. \tag{22}$$

Násobíme-li celou rovnici výrazem stupně $2n+1 : x\psi^2$ tu část, která jest polynomem, musí vymizeti, a jelikož koeficient u x^n ve φ a ψ jsme kladli rovný jedné, musí

$$x(\varphi'\psi - \psi\varphi') - (k+x)\varphi\psi + x\varphi^2 + p - q = 0, \tag{23}$$

kde q jest koeficient u mocnosti x^{n-1} v χ (jak plyne ze členu $\frac{1}{\chi^{2n}}\frac{\chi}{\psi}$ v rovnici (22)).

Tuto rovnici možno psáti ve tvaru:

$$\frac{\varphi'\psi - \varphi\psi'}{\psi^2} - \frac{k+x}{x}\frac{\varphi}{\psi} = \frac{q-p}{x\psi^2} - 1, \tag{24}$$

což je lineární diferenciální rovnice pro podíl: $\frac{\varphi}{\psi}$, jejíž řešení obvyklým způsobem dává:

$$\frac{e^{-x}}{x^k}\frac{\varphi}{\psi} = \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^k}dx + (p-q)\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^{k+1}\psi^2}dx, \tag{25}$$

$\frac{\varphi}{\psi}$ bude patrně n-tým přibližným zlomkem řetězového rozvoje pro integrál

$$x^k e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^k}dx,$$

jestliže

$$\lim_{n\to\infty}(p-q)\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^{k+1}\psi^2}dx = 0. \tag{X}$$

6. *Diferenciální rovnice pro φ a ψ.* Tvar diferenciální rovnice (23) ukazuje:

1. Že rovnice $\psi = 0$ má všechny kořeny různé, neboť faktor ψ a ψ' by musel též být faktorem čísla $p - q$;
2. φ a ψ nemají společného činitele z téhož důvodu.

Jestliže rovnici (23) diferencujeme, nalézáme:

$$x(\varphi''\psi - \varphi\psi'') + (\varphi'\psi - \varphi\psi') - (k + x)(\varphi'\psi + \varphi\psi') - \varphi\psi + \\ + 2x\psi\psi' + \psi^2 = 0 \tag{26}$$

čili

$$[x\varphi'' + (1 - k - x)\varphi' - \varphi + \psi + 2x\psi']\psi = \\ = [x\psi'' + (1 + k + x)\psi']\varphi. \tag{27}$$

Na základě obou vytčených vlastností polynomů φ a ψ to může být splněno jen tenkrát, jestliže jest současně:

$$x\psi'' + (1 + k + x)\psi' = a\psi, \\ x\varphi'' + (1 - k - x)\varphi' - \varphi + \psi + 2x\psi' = a\varphi, \tag{28}$$

při čemž a jest konstanta. Ježto koeficient x^n v polynomu ψ byl volen rovný jedné, jest $a = n$ a diferenciální rovnice pro ψ zní:

$$x\psi'' + (1 + k + x)\psi' - n\psi = 0; \tag{29}$$

tudíž jest:

$$\psi = L_{n,\,k+1}(x). \tag{XI}$$

Diferenciální rovnice adjungovaná pro φ jest dále:

$$x\varphi'' + (1 - k - x)\varphi' - (n + 1)\varphi + \psi + 2x\psi' = 0. \tag{30}$$

7. Abych mohl podati konvergenční důkaz rovnice (X), je nutno vypočísti hodnotu konstanty q. Srovnáme-li koeficienty x^{n-1} v rovnici (19) se zřetelem ku (XI):

$$x^{2n} S L_{n,\,k+1}(x) = x^{2n}\varphi + \chi; \tag{31}$$

a použijeme-li hodnoty p již vypočítané v rovnici (21), nacházíme:

$$p - q = \frac{n!\,(k + n)!}{(k - 1)!}, \tag{32}$$

$$R_n = \frac{n!\,(k + n)!}{(k - 1)!}\int\limits_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^{k+1}\psi^2}\,dx. \tag{XII}$$

Z vyjádření (4) pro $\psi = L_{n,\,k+1}(x)$ je patrno, že derivace ψ' je kladná pro kladné hodnoty x, ψ je tedy funkcí stoupající a

$$\psi(0) = L_{n,\,k+1}(0) = (k + 1)(k + 2)\ldots(k + n). \tag{33}$$

Jest tedy:

$$0 < R_n < \frac{n!\,(k + n)!}{(k - 1)!\,[(k + 1)(k + 2)\ldots(k + n)]^2}\,\frac{1}{x^{k+1}}\int\limits_x^\infty e^{-x}\,dx \tag{34}$$

a dále:

$$0 < R_n < \frac{n!\,k}{(k + 1)(k + 2)\ldots(k + n)}\,\frac{e^{-x}}{x^{k+1}},$$

$$0 < R_n < \frac{k \,.\, k!\, n!}{(k+n)!} \frac{e^{-x}}{x^{k+1}}, \tag{35}$$

$$0 < R_n < \frac{k!\, k}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} \frac{e^{-x}}{x^{k+1}}$$

a tedy jest: $$\lim_{n \to \infty} R_n = 0$$

a tím jest rovnice (X) dokázána.

8. Rekurentní rovnice pro φ a ψ. Nalezli jsme již dříve (VII) v odstavci (3):

$$L_{n+1,k+1}(x) = (2n + k + 1 + x)\, L_{n,k+1}(x) - n(n+k)\, L_{n-1,k+1}(x). \tag{37}$$

Jelikož tatáž rekurentní rovnice spojuje čitatele φ_{n+1}, φ_n a φ_{n-1}, což plyne z diferenciální rovnice (30), lze psáti:

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^k} dx = \frac{e^{-x}}{x^k}\left[1 - \cfrac{k}{x+k+1 - \cfrac{k+1}{x+k+3 - \cfrac{2(k+2)}{x+k+5 - \ldots}}}\right]. \tag{XIII}$$

Jelikož ale integrací per partes dostaneme:

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^k} dx = \frac{e^{-x}}{x^k} - k \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^{k+1}} dx \tag{38}$$

dospějeme k řetězovému rozvoji:

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^{k+1}} dx = \frac{e^{-x}}{x^k}\left[\cfrac{1}{x+k+1 - \cfrac{k+1}{x+k+3 - \cfrac{2(k+2)}{x+k+5 - \cfrac{3(k+3)}{x+k+7 - \ldots}}}}\right] \tag{XIV}$$

což souhlasí s dřívějším výsledkem Nielsenovým a Laguerrovým pro $k = 0$.

Jestliže n-tý přibližný zlomek hořejšího řetězce jest $\frac{\varphi_{1,n-1}}{\psi_n}$, pak diferenciální rovnice pro φ_1 zní:

$$x\varphi''_1 + (1 - k - x)\,\varphi'_1 - (n+1)\,\varphi_1 + 2\psi' = 0 \tag{39}$$

jednoduššeji než (30).

9. *Součtové vzorce pro Laguerrovy polynomy* lze odvoditi touže cestou jako pro polynomy Hermitovy.[5])

Píšeme-li dvakrát tvořící funkci (2) odstavce (1) pro proměnné x a y příslušných Laguerrových polynomů, bude:

$$\frac{e^{\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^k} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} L_{m,k}(x), \tag{40}$$

$$\frac{e^{\frac{yt}{1-t}}}{(1-t)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^m}{n!} L_{n,k}(y). \tag{41}$$

Znásobíme-li tyto rovnice, obdržíme:

$$\frac{e^{\frac{(x+y)t}{1-t}}}{(1-t)^{2k}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{u=\infty}^{\infty} \frac{t^m t^n}{m!\, n!} L_{m,k}(x) L_{n,k}(y). \tag{42}$$

Rozvineme-li na levé straně v řadu Laguerrových polynomů $L_{\mu,2k}(x+y)$, podle téže rovnice (2) odstavce (1) obdržíme:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{t^\mu}{\mu!} L_{\mu,2k}(x+y) = \sum_{m,n}^{0\ldots\infty} \frac{t^{m+n}}{m!\, n!} L_{m,k}(x) L_{n,k}(y) \tag{43}$$

odkud vychází součtová věta pro Laguerrovy polynomy srovnáním stejných mocností t:

$$L_{\mu,2k}(x+y) = \sum_{m,n}^{0\ldots\infty} \frac{\mu!}{m!\, n!} L_{m,k}(x) L_{n,k}(y) \quad \mu = m+n, \tag{XV}$$

což lze symbolicky napsati:

$$L_{\mu,2k}(x+y) = [L_k(x) + L_k(y)]^\mu, \tag{XVI}$$

při čemž pro obě proměnné symbolicky

$$[L_k(x)]^r = L_{r,k}(x) \text{ a } L_{o,k}(x) = 1.$$

Rovnice (XVI) jest analogická ke specielní součtové rovnici pro polynomy Hermitovy:

$$H_n\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) = \left[\frac{H(x)+H(y)}{\sqrt{2}}\right]^n \tag{44}$$

s touže symbolikou. Vzorec (XVI) lze psáti ve tvaru obecnějším:

$$L_{\mu,pk}(x_1 + x_2 + \cdots + x_p) = [L_k(x_1) + L_k(x_2) + \cdots L_k(x_p)]^\mu. \tag{XVII}$$

---

[5]) J. Kampé de Fériet: Sur une formule d'addition des polynomes d'Hermite". Det. Kgl. Videnskabernes Selskab. Mathematisk-fysiske Meddelelser. Sv. V. r. 1923. str. 5.

10. V tomto pojednání poukázal jsem k souvislosti polynomů Laguerrových s funkcemi Kummerovými a polynomy Jacobiho a odvodil jsem rozvoj výrazu

$$x^k e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^{k+1}} dx$$

v řetězec a dokázal jsem, že jmenovatel n-tého přibližného zlomku jest právě Laguerrův polynom $L_{n,k+1}(x)$ Tento výsledek jest zevšeobecněním výsledku Laguerrova a Nielsenova nalezeného pro $k = 0$ a způsob důkazu jest od obou autorů odlišný. V posledním odstavci odvozena součtová formule pro polynomy Laguerrovy.

*

Sur les polynomes généralisés de Laguerre.

(Extrait de l'article précédent.)

J'établis par une méthode différente de celle de Laguerre, le développement de la fonction:

$$x^k e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^{k+1}} dx$$

en fraction continue. Le dénominateur de la n-ième réduite $\frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}$ est le polynome généralisé de Laguerre: $L_{n,k+1}(x)$ fourni par le développement de la fonction génératrice: (1).

L'équation différentielle (I) et la relation de récurrence (VI) liant trois polynômes consecutifs, sont caractéristiques pour les polynômes en question. L'ensemble de ces deux relations constitue la base pour la considération suivante. Considérons l'expression S (formule IX du texte). Soit $\frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}$ la n-ième reduite du polynôme S.

Les fonctions $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ satisfont à l'équation différentielle (23):

$$x(\varphi'_n \psi_n - \varphi_n \psi'_n) - (k + x) \varphi_n \psi_n + x \varphi_n^2 + r = 0$$

où $r = \frac{n!\,(k+n)!}{(k-1)!}$ dont l'intégrale est donnée par (25), où $p - q = r$.

On voit par la forme de l'équation différentielle (23) que:

1. l'équation $\psi_n(x) = 0$ a toutes ces racines distinctes, tout diviseur commun de $\psi_n(x)$ et $\varphi'_n(x)$ devrait être diviseur de r.

2. par le même raisonement on voit que les polynômes $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$ n'ont de diviseur commun.

Quand on fait la dérivée de l'équation (23) en se rapportant aux propriétés (1) et (2) des polynômes $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$ on retrouve deux équations:

$$x\psi''_n + (1+k+x)\ \psi'_n = a\psi_n \tag{28}$$

et son adjointe:

$$x\varphi''_n + (1-k-x)\ \varphi'_n - \varphi_n + \psi_n + 2x\psi'_n = a\varphi_n$$

et $a = n$, le coefficient de x^n en $\psi_n(x)$ étant égal à l'unité.

Le simple rapprochement des deux équations (28) et (I) donne le résultat:

$$\psi_n(x) = L_{n,k+1}(x).$$

Puisque la limite du reste R_n (XII) dans le second membre de (25) devient égale à zéro, en voit que $\frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}$ est en effet la n-ième réduite du développement:

$$x^k e^x \int\limits_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^k}\,dx$$

en fraction continue.

Les relations de récurrence (VI) et (VII) vérifiées par les deux fonctions $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$ donnent immédiatemment le développement (XIII) et par l'integration par parties nous obtenons par conséquent, la fraction continue (XIV), d'accord avec le résultat antérieur donné pour $k = 0$ par Laguerre, loc. cit. Ce résultat constitue une analogie à celui pour des polynômes d'Hermite.

A la fin du mémoire l'auteur établit la formule d'addition pour les polynômes de Laguerre sous la forme:

$$L_{\mu,pk}(x_1 + x_2 + \ldots + x_p) = [L_k(x_1) + L_k(x_2) + \ldots + L_k(x_p)]^\mu$$

en convenant de remplacer dans le développement du second membre une puissance telle que $[L_k(x_i)]^r$ par $L_{r,k}(x)$. Cette formule, d'une forme très condensée, avait été donnée par N. Nielsen et J. Kampé de Fériet pour les polynômes d'Hermite.[2])

---

[1]) J. Kampé de Fériet: Sur une formule des polynômes d'Hermite. Det. Kgl. Dankse Videnskabernes Selskab. M.—f. M. V. 2. 1923.

[2]) N. Nielsen: Recherches sur les polynômes d'Hermite. Ibid. 1. 6. 1918.