

# Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

---

Čeněk Strouhal  
Obrazce Lissajous-ovy

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 31 (1902), No. 5, 377--406

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122173>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1902

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## Obrazce Lissajous-ovy.

Napsal

Dr. Č. Strouhal.

Jest tomu nyní bez mála půl století, kdy *Jules Ant. Lissajous* (1822—1880), tehdá professor fysiky na lyceu Saint-Louis v Paříži, předložil (dne 6. dubna 1857) akademii věd práci nadepsanou: Pojednání o zkoumání optickém pohybu kmitavých.\*)

Neobyčejný zájem, který práce tato vzbudila, jevil se již tím, že akademie udělila autorovi cenu Lacazeovou; více však ještě svědčí o významu a důležitosti studií Lissajousových, že pokusy záhy byly od pěstitelů fysiky odborných i těch, kteří jen ze záliby akustikou se zanášejí, opakovány a v četných variacích napodobeny, tak že „obrazce Lissajousovy“ nescházejí ani v sebe stručnější knize o akustice jednající. Dojista plným právem; jsou zajisté jakoby geometrickým znázorněním různých stupňů konsonance, umožňující v tom případě, kdy vznikají ladičkami, posouditi dokonalost a přesnost této konsonance daleko lépe okem než uchem sebe více hudebně vycvičeným. Také žádný experimentator neopomene, přednášeje o akustice, předvésti posluchačům obrazce tyto, tím spíše, poněvadž příslušné pokusy, prováděné světlem elektrickým nebo drummondským, náleží k nejstkvělejším celé fysiky.

Co se však týče zpracování analytického, dlužno doznati, že dosud pohřešuje se jistý *jednotný* způsob, kterým by se o těchto obrazcích jednalo *povšechně* jako o křivkách určitou celkovou skupinu tvořících; dosud jest obyčejem odvoditi ana-

---

\*) Mémoire sur l'étude optique des mouvements vibratoires, Annales de chimie et de physique (3), 51. pag. 147, 1857.

lytickou rovnicí pro jeden neb dva neb tři nejjednodušší případy; jinak přestává se na znázornění grafickém. Jest však patrné, že z oněch málo jednotlivých případů nemohou vyniknouti vlastnosti společné křivkám všem. Lissajous sám podává v práci uvedené též výklad všeobecný, kterýž však není ani přehledným ani jednoduchým; sám poznamenává ke konci své práce: *Nous n'avons pas la prétention d'avoir résolu le problème dans toutes ses parties ni par les méthodes les plus simples, nous laissons à d'autres le soin de faire mieux.* Jest pravda, že rovnice křivek stávají se složitějšími, když od nejjednodušších obvyklých případů se pokračuje k méně jednoduchým; ale tím zajímavější jest, že jisté základní rysy všem i sebe složitějším rovnicím jsou společny a že vytknutím těchto rysů tím určitěji vystupují jisté vlastnosti křivek všech, čímž se o celkové jich povaze docílí názoru jednotného; odpadá též odvozování rovnice pro každý jednotlivý případ zvlášť, poněvadž se rovnice tato prostým dosazením z rovnic všeobecných ihned dá napsati.

## I.

Obrazce Lissajousovy vznikají skládáním dvou různosměrných kmitů jednoduchých, o periodách  $T_1$  a  $T_2$ . Tu není žádným omezením všeobecnosti, když přihlížíme pouze k rozdílu fasovému obou kmitů, předpokládajíce, že v okamžiku nullovém na př. kmit první právě začíná, kdežto kmit druhý jest o fasi  $\varepsilon$  nebo o dobu  $\tau$  napřed.

Patrně jest

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2},$$

dle kteréžto rovnice můžeme vždy z rozdílu fasového  $\varepsilon$  rozdíl časový  $\tau$  anebo naopak počítati. Rovněž můžeme předpokládati, že směry kmitové jsou k sobě kolmé; ukáže se ostatně, že případ všeobecný, kdy jsou k sobě jakkoli šikmé, není podstatně od onoho zvláštního rozdílným, a že výsledků, jichž pro tento případ nabudeme, lze použít i pro onen všeobecný, kdy jsou kmity jakkoli různosměrné.

Směry kmitové buďtež  $X'X$  a  $Y'Y$ ; první rýsujeme od levé

k pravé, druhý z dola vzhůru, pokládáme je v tomto smyslu za kladné, v opačném za záporné. Dle pravidla geometrického sečítání elongací jsou pak elongace tyto pravouhlými souřadnicemi pro výslednou polohu bodu kmitajícího; proto, dle způsobu analytické geometrie, zavedme pro elongace tyto označení  $x$  ve směru  $X'X$  a  $y$  ve směru  $Y'Y$ , počítáme je od společného průseku  $O$  obou těchto směrů; podobně pak pro amplitudy označení  $a$  ve směru  $X'X$  a  $b$  ve směru  $Y'Y$ . Rovnice obou kmitů jsou pak

$$x = a \sin \frac{2\pi}{T_1} t,$$

$$y = b \sin \left( \frac{2\pi}{T_2} t + \varepsilon \right).$$

Kmit ve směru  $X'X$  pokládáme jakoby za *základní*, kmit ve směru  $Y'Y$  za *přidružený*. Má-li z obou periodických pohybů ve směrech těchto vzniknouti výsledný pohyb opět periodický, musí periody  $T_1$  a  $T_2$  a tudíž i kmitočty

$$\frac{1}{T_1} = N_1 \quad \text{a} \quad \frac{1}{T_2} = N_2$$

býti souměřitelné. Zavedme pro jich poměr označení  $n$ , píšíce

$$\frac{T_1}{T_2} = n = \frac{N_2}{N_1}.$$

Akusticky vznikají oběma kmitů tony; poměr  $n$  značí pak *relativní výšku* tonu druhého vzhledem k prvnímu jako základnímu. Tato bývá vyjádřena poměrem dvou — obyčejně malých — celých čísel  $p$  a  $q$ , jež jsou relativní prvočísla, tak že jest

$$n = \frac{q}{p}.$$

Dle akustického způsobu — kde ton základní jest vždy tonem nižším — předpokládáme

$$n > 1, \quad q > p.$$

Jest pak

$$pT_1 = T = qT_2,$$

$$\frac{p}{N_1} = \frac{1}{N} = \frac{q}{N_2};$$

i značí  $T$  periodu,  $N$  kmitočet *výsledné* vibrace. Zavedouce tuto periodu do rovnic hořejších, obdržíme:

$$x = a \sin p \frac{2\pi}{T} t,$$

$$y = b \sin (q \frac{2\pi}{T} t + \varepsilon).$$

Pro výklady následující jest výhodno rovnice tyto formálně co nejvíce zjednodušiti. Zaveďme především na místě proměnlivého času  $t$  úhel časoměrný  $\vartheta$  dle definice

$$\frac{2\pi}{T} t = \vartheta \quad \text{čili} \quad \frac{\vartheta}{2\pi} = \frac{t}{T}.$$

Dále povšimněme sobě, že souřadnice  $x$ ,  $y$  jinak nepřicházejí než vždy jen v poměru k amplitudám  $a$ ,  $b$ ; zaveďme tedy čísla poměrná, píšíce

$$\frac{x}{a} = \xi, \quad \frac{y}{b} = \eta.$$

Tak obdržíme zcela jednoduše

$$\xi = \sin p\vartheta,$$

$$\eta = \sin (q\vartheta + \varepsilon).$$

Rovnice tyto, platíce současně, vyjadřují již rovnici kmitové křivky výsledné pomocí třetí nezávislé proměnné  $\vartheta$ ; tuto dlužno vyloučiti, má-li se zjednati rovnice ve tvaru obyčejném, jako relace mezi pravouhlymi souřadnicemi  $\xi$  a  $\eta$ . Nic nevádí, že souřadnice tyto jsou jakoby provisorní, udávající odlehlostí bodu od os souřadnicových měřené v příslušných amplitudách  $a$ ,  $b$  jako jednotkách. Zavedouce však souřadnice tyto, docílíme, jak z následujících úvah dobře vysvitne, značného zjednodušení a lepšího rozhledu ve výpočtech; ovšem pak dosazení souřadnic definitivních  $x$ ,  $y$ , jež se provede až ve *výsledku závěrečném*, nečiní prázdných obtíží, a nemění výsledek v jeho podstatě pranic. Konstantami  $a$ ,  $b$  určují se blíže jen rozměry výsledné křivky v příslušných směrech, nemění se však nikterak její povaha, asi tak, jako se poloměrem kruhu určuje jenom jeho rozměr, při čemž povaha kruhu zůstává nezměněnou.

## II.

Zdálo by se býti nejjednodušším, v rovnicích

$$\begin{aligned}\xi &= \sin p\vartheta, \\ \eta &= \sin (q\vartheta + \varepsilon),\end{aligned}$$

rozvésti výraz  $\eta$  ve dva sčítance; tím by se objevily funkce sinus a cosinus úhlu násobného. Jest známo, že lze funkce tyto vyjádřiti týmiž funkcemi úhlu jednoduchého. Je-li  $\alpha$  libovolný úhel,  $k$  číslo celé, platí vzorce následující:

$$\begin{aligned}\sin k\alpha &= \binom{k}{1} \cos^{k-1} \alpha \sin \alpha - \binom{k}{3} \cos^{k-3} \alpha \sin^3 \alpha \\ &+ \binom{k}{5} \cos^{k-5} \alpha \sin^5 \alpha - \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos k\alpha &= \cos^k \alpha - \binom{k}{2} \cos^{k-2} \alpha \sin^2 \alpha \\ &+ \binom{k}{4} \cos^{k-4} \alpha \sin^4 \alpha - \dots\end{aligned}$$

Vzorce tyto mají platnost všeobecnou, pro číslo  $k$  jakékoli; je-li však toto číslo celým, pak se řady zakončí, poněvadž v binomických koeficientech  $\binom{k}{1}$ ,  $\binom{k}{2}$ ,  $\binom{k}{3}$ , . . . objeví se konečně činitel  $k - k$ , který jest  $= 0$ . Na pravo přichází funkce  $\sin \alpha$  a  $\cos \alpha$  současně. Jest však možno výrazy tak upravit, aby zůstala funkce buď jen  $\cos \alpha$  nebo jen  $\sin \alpha$ .

Pro účely naše, kde ve výrazech pro  $\xi$  a  $\eta$  přichází funkce sinus, jest výhodnější tuto podržeti. Položme tedy

$$\sin \alpha = u, \quad \cos \alpha = (1 - u^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Vzorce hořejší nabudou pak tvaru

$$\begin{aligned}\sin k\alpha &= \binom{k}{1} (1 - u^2)^{\frac{k-1}{2}} u - \binom{k}{3} (1 - u^2)^{\frac{k-3}{2}} u^3 \\ &+ \binom{k}{5} (1 - u^2)^{\frac{k-5}{2}} u^5 - \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos k\alpha &= (1-u^2)^{\frac{k}{2}} - \binom{k}{2} (1-u^2)^{\frac{k-2}{2}} u^2 \\ &+ \binom{k}{4} (1-u^2)^{\frac{k-4}{2}} u^4 - \dots \end{aligned}$$

Do vzorců těchto vstupují tedy exponenty lomené  $\frac{k}{2}$ ,  $\frac{k-1}{2}$ ,  $\frac{k-2}{2}$ , ..., což by formálně znamenalo, že výrazy stávají se irrationalními. Vskutku jest však pro jisté celé číslo  $k$  jen *jeden* z obou výrazů irrationalním, *druhý* však *rationalním*. Je-li totiž  $k$  číslo celé *liché*, jsou exponenty  $\frac{k-1}{2}$ ,  $\frac{k-2}{2}$ ,  $\frac{k-5}{2}$ , ... vlastně celá čísla, tudíž výraz pro  $\sin k\alpha$  *rationalním*, pro  $\cos k\alpha$  však *irrationalním*. Naopak, je-li  $k$  číslo *sudé*, jsou exponenty  $\frac{k}{2}$ ,  $\frac{k-2}{2}$ ,  $\frac{k-4}{2}$ , ... celá čísla, tudíž výraz pro  $\cos k\alpha$  *rationalním* a ovšem pro  $\sin k\alpha$  *irrationalním*. Pro úkol náš jest důležité, abychom pracovali jen výrazy *rationalními*. Zavedme označení zkrácené

$$\begin{aligned} \varphi(u, k) &= \binom{k}{1} (1-u^2)^{\frac{k-1}{2}} u - \binom{k}{3} (1-u^2)^{\frac{k-3}{2}} u^3 + \dots \\ \psi(u, k) &= (1-u^2)^{\frac{k}{2}} - \binom{k}{2} (1-u^2)^{\frac{k-2}{2}} u^2 + \dots \end{aligned}$$

Funkce  $\varphi$  a  $\psi$  jsou tedy funkce *rationalné*, a to  $\varphi$ , je-li  $k$  číslo *liché* a  $\psi$ , je-li  $k$  číslo *sudé*.

Pro určitá čísla  $k$  lze mocnění na pravo vykonati a výraz upravit dle stoupajících mocnin veličiny  $u$ . V následujícím jsou uvedeny vzorce pro hodnotu  $k$  od 1 do 9, jak jest pro účely akustické postačující.

$$\begin{aligned} \varphi(u, 1) &= \sin \alpha = u \\ \varphi(u, 3) &= \sin 3\alpha = 3u - 4u^3 \\ \varphi(u, 5) &= \sin 5\alpha = 5u - 20u^3 + 16u^5 \\ \varphi(u, 7) &= \sin 7\alpha = 7u - 56u^3 + 112u^5 - 64u^7 \\ \varphi(u, 9) &= \sin 9\alpha = 9u - 120u^3 + 432u^5 - 576u^7 + 256u^9, \end{aligned}$$

a podobně

$$\psi(u, 0) = \cos 0 = 1$$

$$\psi(u, 2) = \cos 2\alpha = 1 - 2u^2$$

$$\psi(u, 4) = \cos 4\alpha = 1 - 8u^2 + 8u^4$$

$$\psi(u, 6) = \cos 6\alpha = 1 - 18u^2 + 48u^4 - 32u^6$$

$$\psi(u, 8) = \cos 8\alpha = 1 - 32u^2 + 160u^4 - 256u^6 + 128u^8.$$

Všeobecně jest pro  $k$  liché

$$\varphi(u, k) = \sin k\alpha = ku - \frac{k(k^2 - 1^2)}{3!} u^3 + \dots \\ + \frac{k(k^2 - 1^2)(k^2 - 3^2) \dots (k^2 - \overline{k-2}^2)}{k!} u^k$$

a pro  $k$  sudé

$$\psi(u, k) = \cos k\alpha = 1 - \frac{k^2}{2!} u^2 + \frac{k^2(k^2 - 2^2)}{4!} u^4 - \dots \\ + \frac{k^2(k^2 - 2^2)(k^2 - 4^2) \dots (k^2 - \overline{k-2}^2)}{k!} u^k.$$

Kdybychom však dle vzorců těchto v rovnicích pro  $\xi$  a  $\eta$  vyjádřili funkce  $\sin p\vartheta$ ,  $\sin q\vartheta$ ,  $\cos q\vartheta$  hodnotou  $\sin \vartheta$ , obdrželi bychom v obou výrazech řady, z nichž  $\vartheta$  eliminovati bylo by všeobecně velmi obtížným. Výhodnou cestu ukazuje však formální eliminace následující. Pišme rovnice pro  $\xi$  a  $\eta$  ve formě

$$\arcsin \xi = p\vartheta,$$

$$\arcsin \eta = q\vartheta + \varepsilon.$$

Násobíme hořejší rovnici koeficientem  $q$ , dolejší koeficientem  $p$  a odečtouce hořejší od dolejší obdržíme

$$p \arcsin \eta - q \arcsin \xi = p\varepsilon.$$

Společný úhel  $pq\vartheta$  se vyloučil. Tím jest již řečeno, že dlužno zavést tento úhel  $pq\vartheta$ , který jest nejmenším společným násobkem úhlu  $p\vartheta$  a  $q\vartheta$  a potom vhodně užiti vzorců nahoře uvedených.

### III.

K původním funkcím

$$\xi = \sin p\vartheta, \quad \sqrt{1 - \xi^2} = \cos p\vartheta,$$

$$\eta = \sin(q\vartheta + \varepsilon), \quad \sqrt{1 - \eta^2} = \cos(q\vartheta + \varepsilon)$$



zavedme nov , pro úhly  $p$  - a  $q$  - n sobn ,  etřice zkr cenn ho ozna en   $\varphi$  a  $\psi$  funkci v p ede l m odstavci zavedených,

$$\begin{aligned}\varphi(\xi, q) &= \sin qp\vartheta, & \psi(\xi, q) &= \cos qp\vartheta \\ \varphi(\eta, p) &= \sin p(q\vartheta + \varepsilon), & \psi(\eta, p) &= \cos p(q\vartheta + \varepsilon) \\ \overline{\varphi(\xi, q)}^2 + \overline{\psi(\xi, q)}^2 &= 1 \\ \overline{\varphi(\eta, p)}^2 + \overline{\psi(\eta, p)}^2 &= 1.\end{aligned}$$

Pak jest, rozvedeme-li,

$$\begin{aligned}\varphi(\eta, p) &= \cos p\varepsilon \cdot \varphi(\xi, q) + \sin p\varepsilon \cdot \psi(\xi, q) \\ \psi(\eta, p) &= \cos p\varepsilon \cdot \psi(\xi, q) - \sin p\varepsilon \cdot \varphi(\xi, q).\end{aligned}$$

Rovnice tyto stanou se rovnicemi křivky, když ještě funkce  $\varphi(\xi, q)$  a  $\psi(\xi, q)$  vyj dřime proměnnou  $\xi$  samou,  etřice při tom požadavku racionalnosti; dle tohoto požadavku, kter  souvisi s otázkou, zda  islo  $p$  neb  $q$  jest lich  neb sud , zařidime p av  volbu buď funkce  $\varphi$  neb funkce  $\psi$ .

1. Budiž  $p$  lich  a  $q$  t   lich ; pak jest funkce  $\varphi(p)$  a  $\varphi(q)$  racionalní, nikoli však  $\psi(p)$  a  $\psi(q)$ ; podr ice tedy ony racionalní, p iseme:

$$\varphi(\eta, p) = \cos p\varepsilon \cdot \varphi(\xi, q) + \sin p\varepsilon \cdot \sqrt{1 - [\varphi(\xi, q)]^2}$$

anebo v úpravě z v eřenn 

$$\overline{\varphi(\xi, q)}^2 - 2\varphi(\xi, q) \cdot \varphi(\eta, p) \cos p\varepsilon + \overline{\varphi(\eta, p)}^2 = \sin^2 p\varepsilon,$$

což jest hledan  rovnice křivky.

2. Budiž  $p$  lich ,  $q$  sud ; pak jest funkce  $\varphi(p)$  a  $\psi(q)$  racionalní, nikoli však  $\varphi(q)$  a  $\psi(p)$ ; podr ice tedy ony racionalní, obdr ime

$$\varphi(\eta, p) = \cos p\varepsilon \cdot \sqrt{1 - [\psi(\xi, q)]^2} + \sin p\varepsilon \cdot \psi(\xi, q)$$

anebo v úpravě z v eřenn 

$$\overline{\psi(\xi, q)}^2 - 2\psi(\xi, q) \cdot \varphi(\eta, p) \cdot \sin p\varepsilon + \overline{\varphi(\eta, p)}^2 = \cos^2 p\varepsilon,$$

což jest t   hledan  rovnice křivky.

3. Budiž kone n   $p$  sud ,  $q$  liché; pak jest funkce  $\psi(p)$  a  $\varphi(q)$  racionalní, nikoli však  $\varphi(p)$  a  $\psi(q)$ ; podr ice tedy opět ony racionalní obdr ime

$$\psi(\eta, p) = \cos p\varepsilon \cdot \sqrt{1 - [\varphi(\xi, q)]^2} - \sin p\varepsilon \cdot \varphi(\xi, q)$$

anebo v úpravě závěrečné

$$\overline{\varphi(\xi, q)}^2 + 2\varphi(\xi, q) \cdot \psi(\eta, p) \sin p\varepsilon + \overline{\psi(\eta, p)}^2 = \cos^2 p\varepsilon,$$

což jest opět hledaná rovnice křivky.

Sestavme přehledně rovnice výsledné křivky kmitové:

1)  $p$  liché,  $q$  liché:

$$\overline{\varphi(\xi, q)}^2 - 2\varphi(\xi, q) \cdot \varphi(\eta, p) \cos p\varepsilon + \overline{\varphi(\eta, p)}^2 = \sin^2 p\varepsilon;$$

2)  $p$  liché,  $q$  sudé:

$$\overline{\psi(\xi, q)}^2 - 2\psi(\xi, q) \cdot \varphi(\eta, p) \sin p\varepsilon + \overline{\varphi(\eta, p)}^2 = \cos^2 p\varepsilon;$$

3)  $p$  sudé,  $q$  liché:

$$\overline{\varphi(\xi, q)}^2 + 2\varphi(\xi, q) \cdot \psi(\eta, p) \sin p\varepsilon + \overline{\psi(\eta, p)}^2 = \cos^2 p\varepsilon.$$

Pozorujeme v úpravě rovnic úplný souhlas; proto jsou také vzhledem k souřadnicím  $\xi$ ,  $\eta$  stupně stejného. Vzhledem k tomu, že funkce  $\varphi(u, k)$  i  $\psi(u, k)$  jest stupně  $k$ -tého, mají čtverce funkcí pro  $\xi$  stupeň  $2q$ , pro  $\eta$  stupeň  $2p$ , a součiny funkcí pro obě proměnné stupeň  $p + q$ . Poněvadž jest pak  $q > p$ , jest rovnice celkově stupně  $2q$ -tého. K součinu přistupuje činitel (nehledíc ke znamení) buď  $\sin p\varepsilon$  nebo  $\cos p\varepsilon$ ; na pravo jest pak  $\cos^2 p\varepsilon$  nebo  $\sin^2 p\varepsilon$ . V určitých případech jsou čísla  $p$ ,  $q$  daná; jsou to konstanty. Naproti tomu rozdíl fázový  $\varepsilon$  může býti měnlivým. Vzhledem k tomu obdržíme pro měničel se  $\varepsilon$  celou řadu křivek, jež všechny náleží dohromady, tvoříce soustavu význačnou pro určitý relativní kmitočet  $n$ .

Ze všech křivek každé takové soustavy vystupují zase v popředí dvě křivky jakožto zvlášť typické. Jedna z nich jest souměrnou k jedné i druhé ose souřadnicové; budeme ji zvatí křivkou *souměrnou*, *symmetrickou* (par excellence). Druhá pak jest křivkou jakoby dvojitou, kterou totiž kmitající bod v periodě  $T$  probíhá dvakrát, tak že její stupeň jest polovičním toho, který mají křivky ostatní; jest tedy křivka ta *zvrhlou*, *degenerovanou*.

*Křivka symmetrická* vznikne, když koeficient součinu funkcí  $\varphi$  neb  $\psi$  v analytické rovnici se stává nullou.

Jsou-li čísla  $p$  a  $q$  obě lichá, nastává případ ten pro

$$\cos p\varepsilon = 0, \quad \sin p\varepsilon = \pm 1,$$

tedy

$$p\varepsilon = (2k + 1) \frac{\pi}{2},$$

z čehož

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2} = \frac{2k + 1}{4p}.$$

Je-li však z čísel  $p$  a  $q$  jedno liché a druhé sudé, nastává případ ten pro

$$\sin p\varepsilon = 0, \quad \cos p\varepsilon = \pm 1,$$

tedy

$$p\varepsilon = 2k \cdot \frac{\pi}{2},$$

z čehož

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2} = \frac{2k}{4p}.$$

Při tom jest  $k = 1, 2, 3, 4, \dots$  až do toho čísla, pro které jest ještě  $\varepsilon < 2\pi$ , čili  $\tau < T_2$ , tedy

$$\frac{2k + 1}{4p} < 1 \quad \text{resp.} \quad \frac{2k}{4p} < 1.$$

V hořejších třech případech utváří se tedy rovnice křivky symmetrické následovně:

1)  $p$  liché,  $q$  liché

$$\overline{\varphi(\xi, q)}^2 + \overline{\varphi(\eta, p)}^2 = 1;$$

2)  $p$  liché,  $q$  sudé

$$\overline{\psi(\xi, q)}^2 + \overline{\varphi(\eta, p)}^2 = 1;$$

3)  $p$  sudé,  $q$  liché

$$\overline{\varphi(\xi, q)}^2 + \overline{\psi(\eta, p)}^2 = 1.$$

Rovnice jsou vzhledem  $k$  úsečce  $\xi$  stupně  $2q$ -tého, vzhledem

k pořadnici  $\eta$  stupně  $2p$ -tého; obě proměnné jsou v rovnicích od sebe oddělené.

*Křivka degenerovaná* vznikne, když koeficient součinu funkcí  $\varphi$  neb  $\psi$  v analytické rovnici stává se rovným jedničce; neboť pak vznikne na levo rovnice úplný čtverec, kdežto člen na pravo stává se nullou.

Jsou-li čísla  $p$  a  $q$  obě lichá, nastává případ ten pro

$$\sin p\varepsilon = 0, \quad \cos p\varepsilon = \pm 1,$$

tedy

$$p\varepsilon = 2k \cdot \frac{\pi}{2},$$

z čehož

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2} = \frac{2k}{4p}.$$

Je-li však z čísel  $p$  a  $q$  jedno liché a druhé sudé, nastává případ ten pro

$$\cos p\varepsilon = 0, \quad \sin p\varepsilon = \pm 1,$$

tedy

$$p\varepsilon = (2k + 1) \frac{\pi}{2},$$

z čehož

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2} = \frac{2k + 1}{4p},$$

kdež  $k$  má týž význam jako dříve.

Jest patrné, že případ křivky degenerované jest *komplementárním* k případu křivky symmetrické.

Rovnice křivky degenerované — když provedeme odmocnění, pšísíce ji jakožto křivku jednoduchou — jest pro případy na-  
hoře vytčené:

1)  $p$  liché,  $q$  liché

$$\varphi(\eta, p) = \pm \varphi(\xi, q);$$

2)  $p$  liché,  $q$  sudé

$$\varphi(\eta, p) = \pm \psi(\xi, q);$$

3)  $p$  sudé,  $q$  liché

$$\psi(\eta, p) = \mp \varphi(\xi, q).$$

Jak viděti, dvojitost znamená koeficientu  $\cos p\varepsilon = \pm 1$  resp.  $\sin p\varepsilon = \pm 1$  — která při křivce symmetrické následkem zdvojnásobení neměla významu — přijde zde k platnosti; obdržíme tedy tutéž křivku degenerovanou ve dvoji poloze. Uvážíme-li, že jest  $\varphi$  funkce lichá,  $\psi$  funkce sudá, t. j. že platí

$$\varphi(-u) = -\varphi(u), \quad \psi(-u) = \psi(u),$$

pozorujeme ihned, že v případě 1) křivka *jednotlivá* nemá osu souměrnosti, ale že jest její druhá poloha souměrnou k poloze první vzhledem k ose  $Y'Y$ ; v případě 2) má každá z obou degenerovaných křivek osu  $Y'Y$  za osu souměrnosti a mimo to její poloha druhá jest vzhledem k ose  $X'X$  souměrnou k poloze první; konečně v případě 3) má každá z obou degenerovaných křivek osu  $X'X$  za osu souměrnosti a mimo to její poloha druhá jest vzhledem k ose  $Y'Y$  souměrnou k poloze první.

Dosazovati do všeobecných rovnic, jak jsme je nyní obdrželi, za funkce  $\varphi$  a  $\psi$  příslušné řadové výrazy a do těch zase hodnoty  $\frac{x}{a}$  a  $\frac{y}{b}$  za  $\xi$  a  $\eta$  rušilo by přehled a neposkytovalo by žádného poznání nového. Jinak jest tomu, jsou-li za  $p$  a  $q$  dána určitá čísla; pak lze rovnice nalezené, jakoby schematické, vyplniti a tak zjednati rovnice tvaru obvyklého, což nečiní již žádných obtíží.

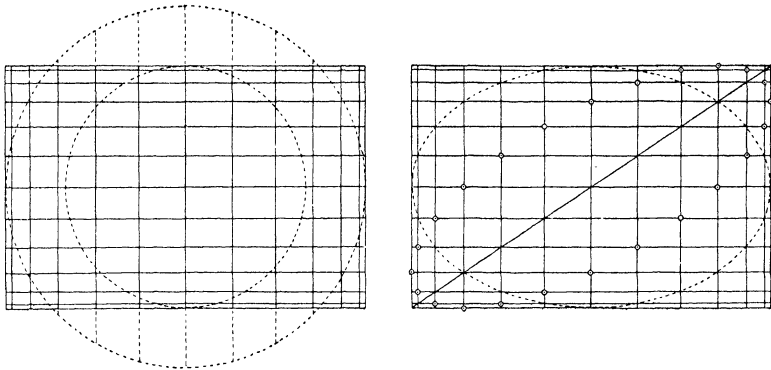
Určitými příklady objasní se zároveň výsledky zde všeobecně odvozené. Provedeme úkol tento v souvislosti s methodou grafickou.

#### IV.

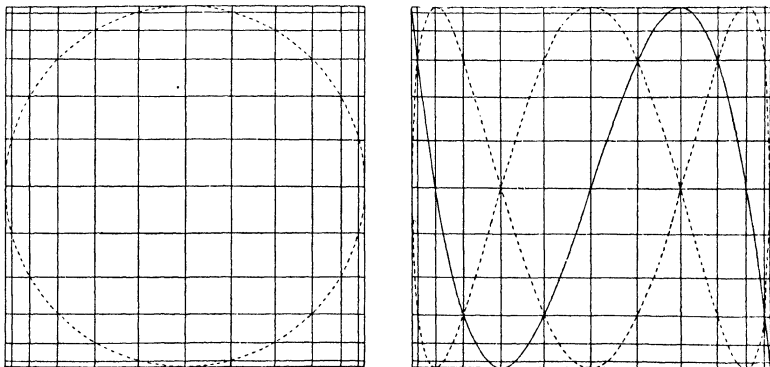
Důležitým doplňkem k výkladům odstavce předešlého jest methoda, kterouž se úkol, jak lze vibrace k sobě kolmé skládati, řeší graficky. Způsob, jakým se methoda tato provádí, zakládá se na tom, že jednoduchý pohyb kmitavý jest průmětem rovnoměrného pohybu kruhového; dle toho zařídí se pro určitý úkol práce *přípravná*, po níž vlastní grafické řešení již jednoduše pokračuje.

Pro přípravnou práci narýsujeme především dvě k sobě přesně kolmé přímky, jednu  $X'X$  pro kmity amplitudou  $a$  na př. směrem od levé ruky k pravé, druhou  $Y'Y$  pro kmity

amplitudou  $b$  ve směru z dolů nahoru, tak jak obvykle se rýsují osy souřadnic pravoúhlých v rovině. Kolem průseku obou těchto základních přímek opíšeme poloměry  $a$  a  $b$  dva soustředné kruhy, a rozdělíme jich kvadranty, oněmi základními přímkami vznikající, na vhodný počet stejných dílů, na př. 6 nebo 9, na



Obr. 1. Přípravná síť pro obrazce Lissajousovy při amplitudách různých.



Obr. 2. Přípravná síť pro obrazce Lissajousovy při amplitudách stejných.

nejvýše 12; lépe jest voliti menší počet dílů, aby se výkres nestal nepřehledným, a raději při práci další interpolovati. Spojíme pak příslušné dělicí body v jednotlivých kvadrantech vedeme přímkou k oněm dvěma základním  $X'X$  a  $Y'Y$  rovnoběžně;

přímkami těmito protínají se oba průměry o délkách  $2a$  na přímce  $X'X$  a  $2b$  na přímce  $Y'Y$  v bodech, jimiž se určuje poloha bodu kmitajícího ve fázích časově stejně odlehých, totiž v intervalech  $\frac{T}{24}, \frac{T}{36}, \frac{T}{48}$ , dle toho, zdali kruhy byly děleny na 24, 36 neb 48 dílů. To platí stejně o kmitech ve směru  $X'X$  i ve směru  $Y'Y$  pro jakýkoli relativní kmitočet  $n$ . Tím jest vykonána práce přípravná; vznikne síť, jak ji znázorňují obrazce 1. a 2.; první pro amplitudy  $a, b$  různé, druhý pro amplitudy  $a = b$  stejné.

Zbývá pak ještě voliti diferenci fázovou  $\varepsilon$ . Vzhledem k tomu, že kmity ve směru  $X'X$  amplitudou  $a$  pokládáme za základní, s nimiž druhé kmity ve směru  $Y'Y$  amplitudou  $b$  srovnáváme, jest rozumno stanoviti, že v okamžiku nullovém  $t = 0$  kmit ve směru  $X'X$  začíná, kdežto kmit ve směru  $Y'Y$  již začal a jest napřed ve fazi  $\varepsilon$ . Při tom jest zde jednodušší, na místě úhlu  $\varepsilon$  zavésti raději dobu  $\tau$ , o kterou kmit ve směru  $Y'Y$  jest napřed. Tato doba stanoví se pak raději relativně, vzhledem k celé periodě  $T_2$ , poněvadž poměrné číslo  $\frac{\tau}{T_2}$  zároveň jest poměrným číslem rozdílu fázového  $\varepsilon$  vzhledem k plnému úhlu  $2\pi$ , dle rovnice již dříve uvedené

$$\frac{\tau}{T_2} = \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

Poněvadž pak celá doba vibrační  $T_2$  jest již rozdělena na jistý počet dílů, na př. 24 (analogicky jako 24 hodin za den), volí se výhodně

$$\frac{\tau}{T_2} = 0, \frac{1}{24}, \frac{2}{24}, \frac{3}{24}, \dots$$

a podobně, kdyby  $T_2$  bylo rozděleno na jiný počet dílů.

Volbou rozdílu časového  $\tau$  určena jest pro okamžik nullový začáteční poloha kmitajícího bodu, od kterých křivka začíná. Jde pak o to, stanoviti pro hledanou tuto křivku dostatečný počet bodů, aby jimi křivka s jistotou mohla býti vedena. K cíli tomu, vycházejíce od oné začáteční polohy, postupujeme na síti krokem dále; postup od jedné dělicí přímky k druhé značí jakoby

krok. Jsou-li kmity stejnodobé, t. j.  $n = 1$ , jdeme vždy o jeden krok v pravo a o jeden nahoru, načež se poloha bodu kmitajícího označí; opět jeden krok na levo, jeden nahoru, atd. po případě též ve směru zpátečním. Je-li vibrace ve směru zdola nahoru o kmitočtu dvojnásobném, t. j.  $n = 2$ , jde se od oné polohy začáteční jeden krok ve směru od levé k pravé, ale dva kroky ve směru z dola nahoru. Všeobecně, je-li  $n = \frac{q}{p}$ , jdeme  $p$  kroků ve směru prvním,  $q$  kroků ve směru druhém, počínající opět od té polohy začáteční, která je určena rozdílem časovým  $\tau$ . Jsou-li čísla  $p$ ,  $q$  poněkud veliká (na př. 4, 5, 6), jest výhodno, místo kroků celých počítati kroky poloviční a interpolovati, aby jednotlivé body hledané křivky nebyly od sebe daleko.

K předběžnému objasnění toho, co zde řečeno, jest v obr. 1. a 2. na pravo na síti připojena konstrukce křivek Lissajousových pro hodnoty  $\tau = 0$  (křivka plně vytažená) a  $\tau = \frac{T}{4}$  (křivka čárkovaná), a to v obr. 1. pro  $n = 1$ , v obrazci 2. pro  $n = 3$ . Mimo to jest v obrazci 1. proveden ještě případ  $n = 1$  pro  $\tau = \frac{T}{8}$ , a to tak, že jsou jen jednotlivé body křivky čili jednotlivé polohy bodu kmitajícího označeny.

V odstavcích následujících jsou pro jednotlivé číselné hodnoty relativního kmitočtu  $n = \frac{q}{p}$  obrazce Lissajousovy rýsovány. O jich uspořádání budiž všeobecně poznamenáno následující. Ve všech případech jest uspořádání obrazců založeno tak, aby vynikly *základní jejich typy*, stanovené podmínkou

$$\sin p\varepsilon = 0, \quad \cos p\varepsilon = 0.$$

Tyto typy tvoří začátek a konec serie obrazců. Jsou však kresleny *serie dvě* nad sebou; to proto, poněvadž se vždy jeden z obou základních typů ukazuje ve *dvou souměrných polohách*, buď první, pro který jest  $\sin p\varepsilon = 0$ , nebo druhý, pro který jest  $\cos p\varepsilon = 0$ ; souměrnost platí pak buď vzhledem k ose  $X'X$  nebo vzhledem k ose  $Y'Y$ ; to řídí se číslem  $n$  a vynikne pěkně svým uspořádáním nad sebou. Vedle typů základních jsou pak rýsovány obrazce přechodní, jež mají něco z jednoho a něco z dru-



hého typu, blížíce se buď jednomu neb druhému. Jest velmi poučeno tyto přechody studovati. Když kmit základní, o periodě  $T_1$  ve směru  $X'X$  začíná, jest kmit přidružený, o periodě  $T_2$  ve směru  $Y'Y$  o dobu  $\tau$  napřed. Pod každým obrazem jsou udány číselné hodnoty poměru  $\frac{\tau}{T_2}$  (který jest týž jako  $\frac{\varepsilon}{2\pi}$ ), pro který obrazec vzniká. Jest viděti, že týž obrazec se opakuje několikráte pro různé ony hodnoty (při čemž zůstává  $\tau < T_2$ ,  $\varepsilon < 2\pi$ ); proto jest třeba tyto hodnoty, jak dle řady arithmetické jdou za sebou, sledovati, aby souvislost obrazců a jich přechody dobře vynikly. Když se tak obrazce studují, ukáže se zároveň, že se tytéž křivky, zejména složitější, při různých oněch číselných hodnotách opisují v různém smyslu.

Při tomto rýsování obrazců Lissajousových naskytá se každému podobná otázka, jako při rýsování diagrammů pro skládání stejnosměrných vibrací. Rozměry obrazce souvisí s volbou amplitud  $a$  a  $b$ , nikoli s jich absolutní, nýbrž s jich relativní velikostí. Mohly by se voliti stejné,  $a = b$ ; avšak tu vznikají křivky — jako v obr. 2., kde jest  $n = 3$  — které činí rozhodně dojem nepřírozenosti, jsouce v jednom směru jakoby sražené, v druhém roztáhlé. Podmínka  $a = b$  značí akusticky, že tony, při nichž ony kmity studujeme, jsou stejné intensity. Podmínka taková nesrovnává se z pravidla se skutečností, kde tony vyšší jsou slabšími svou intensitou nad tony vyšší. Dle toho bylo by nutno, amplitudu  $b$  — vyjímajíc unisono — voliti menší. Aby pak zde vyloučena byla jakákoli nahodilost nebo libovůle, provedeny zde obrazce Lissajousovy dle zásady vyjádřené rovnicí

$$\frac{a^2}{b^2} = n,$$

kterouž se stanoví, že ton  $n$ -kráte vyšší jest  $n$ -kráte méně intenzivní než ton základní. Volbou touto jest pro obrazce zjednáno určitý základ, a jest také viděti, že se jím pro rozměry obrazců v obou směrech získává jistá přiměřenost.

Aby se téže sítě dalo použití pro případy rozmanité, ne kreslí se křivky do sítí samých, nýbrž na průsvitný papír, který se přes síť položí, křivky rýsují se pak z jednotlivých bodů grafickou interpolací.

Rýsovati obrazce Lissajousovy jest nejen důležité, aby se důkladněji poznaly a hloub v paměť vstípily, nýbrž též zajímavě, aspoň pro každého, kdo má pochopení pro geometrickou pravidelnost a úhlednost.

## V.

Budiž  $n$  číslo celé, tedy  $n = 1, 2, 3, \dots$ . V akustice zovou se tony o této relativní výšce harmonickými.

Přibližejíce k obecným úvahám analytickým, položíme v příslušných rovnicích, kde přichází relativní kmitočet  $n = \frac{q}{p}$ , specialně  $p = 1$ .

Tím jest

$$\varphi(\eta, p) = \varphi(\eta, 1) = \eta = \frac{y}{b}.$$

Je-li tedy  $q$  liché, obdržíme rovnici křivky výsledné

$$\overline{\varphi(\xi, q)^2} - 2\varphi(\xi, q) \cdot \eta \cos \varepsilon + \eta^2 = \sin^2 \varepsilon;$$

pak-li jest  $q$  sudé, obdržíme rovnici křivky výsledné

$$\overline{\psi(\xi, q)^2} - 2\psi(\xi, q) \cdot \eta \sin \varepsilon + \eta^2 = \cos^2 \varepsilon.$$

Jednoduchostí svou vyniká tu křivka degenerovaná, kteráž jest určena rovnicí:

pro  $q$  liché

$$\eta = \pm \varphi(\xi, q),$$

pro  $q$  sudé

$$\eta = \pm \psi(\xi, q).$$

Křivka jest tedy povšechně parabolou stupně  $q$ -tého.

Projednejme nyní určité případy zvláštní.

1. Budiž  $n = 1$ . Zde jest

$$\varphi(\xi, q) = \xi = \frac{x}{a},$$

tudíž rovnice křivky výsledné

$$\xi^2 - 2\xi\eta \cos \varepsilon + \eta^2 = \sin^2 \varepsilon$$

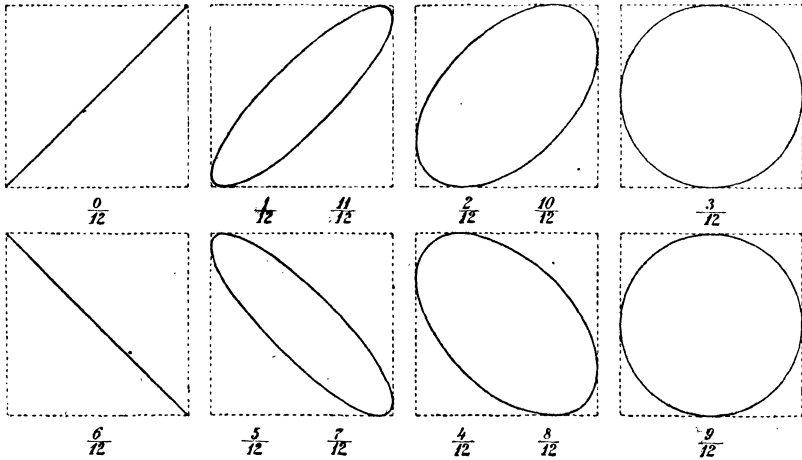
anebo v souřadnicích původních

$$\frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \cos \varepsilon + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \varepsilon.$$

Rovnice náleží ellipse. Ze dvou k sobě kolmých vibrací stejnodobých vzniká tudíž vibrace elliptická.

Křivky typické obdržíme pro hodnoty

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2} = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4} \right\}.$$



Obraz 3. Lissajousovy obrazce; unisono  $\left(\frac{1}{1}\right)$ .

Dolejší hodnoty stanoví křivku symmetrickou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

hořejší pak křivku degenerovanou

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Obrazec 3. podává přehled změn, jaké vznikají, když hod-

noty poměru  $\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2}$  se postupně mění, v intervalech  $\frac{1}{12}$  od 0 do 1; intervall jest volen tak, aby mezi křivkami typickými byly ještě dvě přechodní. Při nenáhle rostoucím  $\tau$  neb  $\varepsilon$  začíná serie obrazů křivkou degenerovanou v poloze první, přechází ke křivce souměrné, touto zase k degenerované v poloze druhé, načež ve zpětném pořádku k původní.

2. Budiž  $n = 2$ . Zde jest

$$\psi(\xi, 2) = 1 - 2\xi^2 = 1 - \frac{2x^2}{a^2},$$

a rovnice výsledné křivky

$$\left(1 - \frac{2x^2}{a^2}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{2x^2}{a^2}\right) \frac{y}{b} \cos \varepsilon + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \varepsilon.$$

Křivky typické obdržíme pro hodnoty

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2} = \left\{ 0, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\}.$$

Zde naopak hořejší hodnoty stanoví křivku symmetrickou

$$\left(1 - \frac{2x^2}{a^2}\right)^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

čili

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{4x^2}{a^2} - \frac{4x^4}{a^4},$$

dolejší pak parabolu

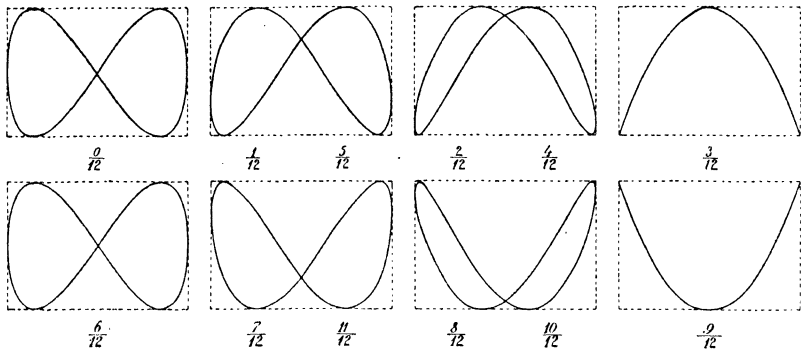
$$\pm \frac{y}{b} = 1 - \frac{2x^2}{a^2}.$$

Křivka symmetrická označuje se často jako lemniskata (od *λημνίσκος* ó stuha, klička), ale nesmí pak býti stotožňována s lemniskatou, jež jest zvláštním případem křivek Cassiniho; neboť tato jest určena jedinou konstantou  $a$ , majíc za rovnici

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

kdež  $a$  má týž význam jako při naší lemniskatě (poloosa); při této však rozhoduje ještě konstanta  $b$ ; ale i při  $b = a$  jest rovnice obou těchto tak zvaných lemniskat zcela rozdílnou.

Jak se serie obrazců utváří, když  $\varepsilon$  a  $\tau$  postupně se mění, objasňuje obr. 4. Řada zde začíná křivkou souměrnou, pokračuje k parabole v první poloze, jde zpět ke křivce souměrné a postupuje k parabole v druhé poloze, odkud se opět vrací ke křivce souměrné. Pořadí obrazců jest kresleno v intervalech  $\frac{1}{12}$  pro  $\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2}$  jako v případě předešlém.



Obr. 4. Lissajousovy obrazce; prima a oktava  $\left(\frac{2}{1}\right)$ .

3. Budiž  $n = 3$ . Zde jest

$$\varphi(\xi, 3) = 3\xi - 4\xi^3 = \frac{3x}{a} - \frac{4x^3}{a^3},$$

a rovnice výsledné křivky

$$\left(\frac{3x}{a} - \frac{4x^3}{a^3}\right)^2 - 2\left(\frac{3x}{a} - \frac{4x^3}{a^3}\right)\frac{y}{b} \cos \varepsilon + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \varepsilon.$$

Křivky typické obdržíme pro hodnoty

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2} = \begin{cases} 0, & \frac{2}{4}, \\ \frac{1}{4}, & \frac{3}{4}. \end{cases}$$

• Hořejší hodnoty stanoví jakožto křivku degenerovanou parabolou stupně třetího

$$+\frac{y}{b} = \frac{3x}{a} - \frac{4x^3}{a^3},$$

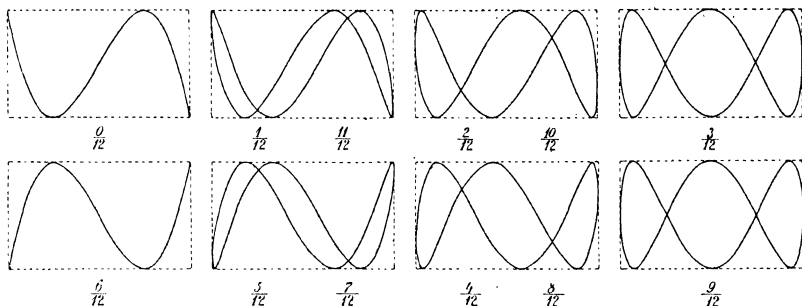
dolejší pak křivku souměrnou

$$\left(\frac{3x}{a} - \frac{4x^3}{a^3}\right)^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Jiná forma rovnice této jest

$$\frac{y^2}{b^2} = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{a^2}\right)^2,$$

kteřá má tu formální výhodu, že udává ihned průseky křivky s osou úseček. Křivka má tvar jakoby dvou ležatých osmiček, jež jsou u prostřed sloučeny tak, že zbývají jen dva body, v nichž se větve kříží.



Obr. 5. Lissajousovy obrazce; prima a duodecima  $\left(\frac{3}{1}\right)$ .

Obr. 5. znázorňuje postup křivek při rostoucím  $\varepsilon$  a  $\tau$ ; začíná se parabolou v první poloze, pokračuje skrze křivku souměrnou k parabolě v druhé poloze, odtud zpětným postupem skrze křivku souměrnou opět k parabolě v první poloze. Pro poměr  $\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2}$  volen opět intervall  $\frac{1}{12}$ .

Příklady uvedené dostačí. Snadno lze již posouditi, jak se věc má všeobecně, když si představíme, jako by rozdíl fázový se měnil nepřetržitě. Je-li  $q$  liché, podobá se změna obrazců jakoby oscilaci od paraboly v první poloze skrze křivku souměrnou k parabolě v druhé poloze a zase zpět. Je-li  $q$  sudé, vychází tato oscilace od křivky souměrné, jde k parabolě

v první poloze, pak zpět ke křivce souměrné, odtud k parabole v druhé poloze, pak zase zpět ke křivce souměrné.

Diskussi křivek opomineme, poněvadž pohled na obrazce stačí a poněvadž provést diskussi takovou analyticky — dle známých pravidel — nečiní obtíží žádných.

## VI.

Přejdeme dále k případům, kde  $n$  jest číslo lomené.

4. Budiž  $n = \frac{3}{2}$ , tedy  $p = 2$ ,  $q = 3$ ; sem náleží tedy všeobecná rovnice ( $p$  sudé,  $q$  liché):

$$\overline{\varphi(\xi, q)^2} + 2\varphi(\xi, q) \cdot \psi(\eta, p) \sin p\varepsilon + \overline{\psi(\eta, p)^2} = \cos^2 p\varepsilon,$$

do kteréž dlužno dosaditi:

$$\varphi(\xi, 3) = 3\xi - 4\xi^3 = \frac{3x}{a} - \frac{4x^3}{a^3},$$

$$\psi(\eta, 2) = 1 - 2\eta^2 = 1 - \frac{2y^2}{b^2}.$$

Křivky typické obdržíme pro hodnoty

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2} = \left\{ 0, \frac{2}{8}, \frac{4}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8} \right\}.$$

Hořejší hodnoty určují křivku symmetrickou

$$\left(\frac{3x}{a} - \frac{4x^3}{a^3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2y^2}{b^2}\right)^2 = 1$$

čili

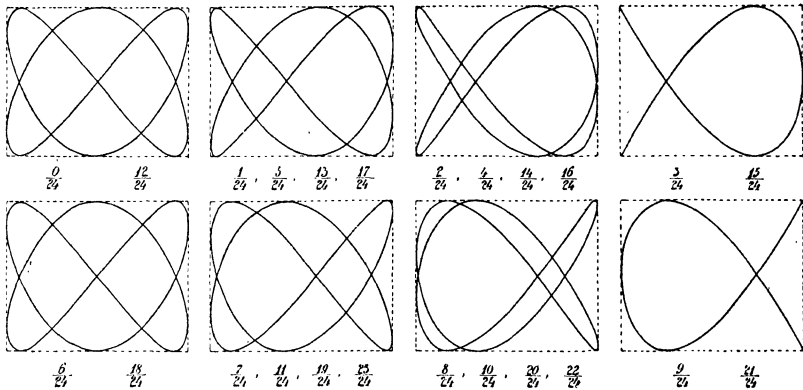
$$\frac{4y^2}{b^2} - \frac{4y^4}{b^4} = \frac{x^2}{a^2} \left(3 - \frac{4x^2}{a^2}\right)^2,$$

dolejší pak křivku degenerovanou

$$\frac{2y^2}{b^2} = 1 \pm \frac{x}{a} \left(3 - \frac{4x^2}{a^2}\right).$$

Postup obrazců při rostoucím  $\varepsilon$  a  $\tau$  znázorňuje obr. 6. Řada začíná křivkou symmetrickou, pokračuje k degenerované v první

poloze, vrací se k symmetrické, pokračuje k degenerované v druhé poloze a zakončuje symmetrickou. Křivky jednotlivé kresleny pro intervall  $\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2}$  takový, aby mezi obě křivky typické přišly ještě dvě přechodní; v předešlých případech byl tento intervall  $\frac{1}{12}$ , zde nutno k témuž cíli voliti  $\frac{1}{24}$ .



Obr. 6. Lissajousovy obrazce; prima a kvinta  $\left(\frac{3}{2}\right)$ .

5. Budiž  $n = \frac{4}{3}$ , tedy  $p = 3$ ,  $q = 4$ ; (akusticky prima a kvarta). Užijme tedy všeobecné rovnice ( $p$  liché,  $q$  sudé)

$$\overline{\psi(\xi, q)}^2 - 2\psi(\xi, q) \cdot \varphi(\eta, p) \sin p\varepsilon + \overline{\varphi(\eta, p)}^2 = \cos^2 p\varepsilon,$$

do kterých dosadíme

$$\psi(\xi, 4) = 1 - 8\xi^2 + 8\xi^4 = 1 - \frac{8x^2}{a^2} + \frac{8x^4}{a^4}$$

$$\varphi(\eta, 3) = 3\eta - 4\eta^3 = \frac{3y}{b} - \frac{4y^3}{b^3}.$$

Křivky typické obdržíme pro hodnoty

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2} = \left\{ 0, \frac{2}{12}, \frac{4}{12}, \frac{6}{12}, \frac{8}{12}, \frac{10}{12}, 1, \frac{1}{12}, \frac{3}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{9}{12}, \frac{11}{12} \right\}.$$



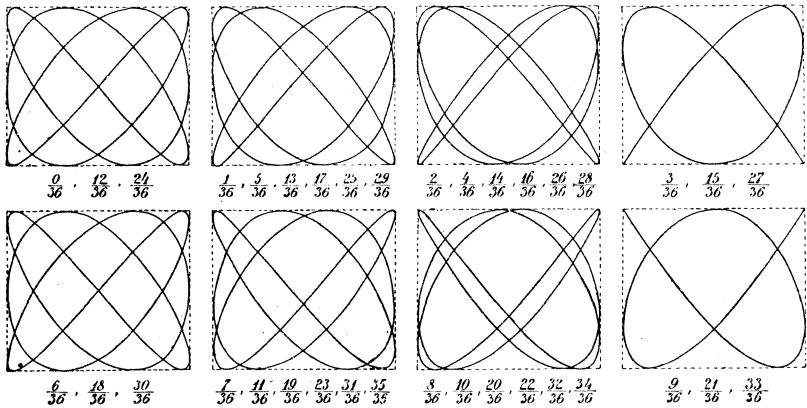
Hořejší hodnoty stanoví křivku symmetrickou

$$\left(1 - \frac{8x^2}{a^2} + \frac{8x^4}{a^4}\right)^2 + \left(\frac{3y}{b} - \frac{4y^3}{b^3}\right)^2 = 1,$$

dolejší pak křivku degenerovanou

$$\frac{3y}{b} - \frac{4y^3}{b^3} = \pm \left(1 - \frac{8x^2}{a^2} + \frac{8x^4}{a^4}\right).$$

Obr. 7. představuje serii křivek při rostoucím  $\varepsilon$  a  $\tau$ . Řada začíná křivkou souměrnou, pokračuje k degenerované v první poloze,



Obr. 7. Lissajousovy obrazce; prima a kvarta  $\left(\frac{4}{3}\right)$ .

vrací se k souměrné, pokračuje k degenerované v druhé poloze. vrací se k souměrné, a tento postup opakuje se ještě dvakrát, Aby mezi křivkami typickými byly dvě přechodní, jako vždy dříve, nutno pro intervall  $\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2}$  voliti hodnotu  $\frac{1}{36}$ .

6. Budiž  $n = \frac{5}{3}$  (akusticky: prima a sexta), tedy  $p = 3$ ,  $q = 5$ ; sem náleží rovnice všeobecná ( $p$  i  $q$  liché)

$$\overline{\varphi(\xi, q)}^2 - 2\varphi(\xi, q) \cdot \varphi(\eta, p) \cos p\varepsilon + \overline{\varphi(\eta, p)}^2 = \sin^2 p\varepsilon,$$

kde dlužno dosaditi

$$\varphi(\xi, 5) = 5\xi - 20\xi^3 + 16\xi^5 = \frac{5x}{a} - \frac{20x^3}{a^3} + \frac{16x^5}{a^5}$$

$$\varphi(\eta, 3) = 3\eta - 4\eta^3 = \frac{3y}{b} - \frac{4y^3}{b^3}.$$

Křivky typické obdržíme pro hodnoty

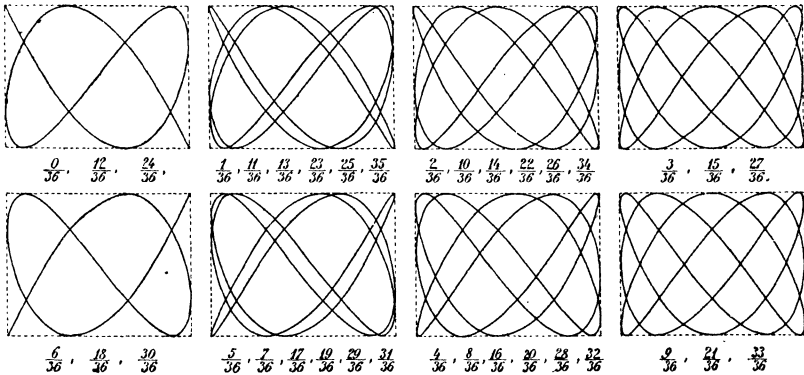
$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2} = \left\{ 0, \frac{2}{12}, \frac{4}{12}, \frac{6}{12}, \frac{8}{12}, \frac{10}{12}, \frac{11}{12}, 1, \frac{1}{12}, \frac{3}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{9}{12}, \frac{11}{12} \right\}.$$

Hořejší hodnoty stanoví křivku degenerovanou

$$\frac{3y}{b} - \frac{4y^3}{b^3} = \pm \left( \frac{5x}{a} - \frac{20x^3}{a^3} + \frac{16x^5}{a^5} \right),$$

dolejší pak křivku souměrnou

$$\left( \frac{5x}{a} - \frac{20x^3}{a^3} - \frac{16x^5}{a^5} \right)^2 + \left( \frac{3y}{b} - \frac{4y^3}{b^3} \right)^2 = 1.$$



Obr. 8. Lissajousovy obrazce; prima a sexta  $\left(\frac{5}{3}\right)$ .

Obr. 8. představuje postup křivek při rostoucím  $\varepsilon$  a  $\tau$ ; serie začíná křivkou degenerovanou v první poloze a přechází křivkou souměrnou k degenerované v druhé poloze a zase zpět křivkou souměrnou k degenerované v první poloze, a tento

postup opakuje se třikrát. Pro intervall  $\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2}$  volena jako v případu předešlém hodnota  $\frac{1}{36}$ .

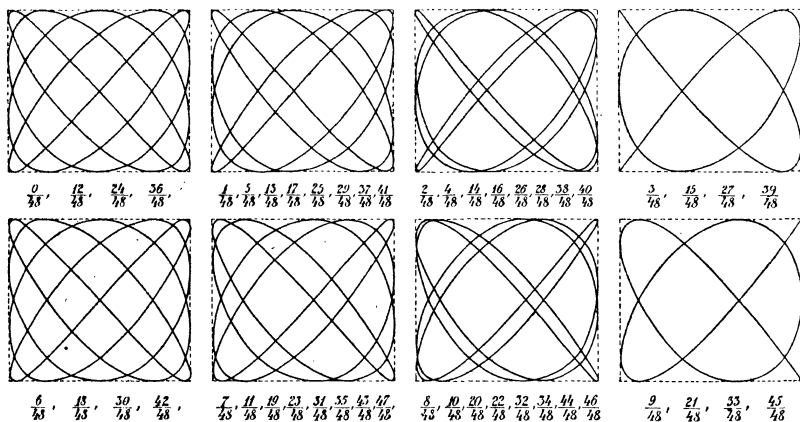
7. Budiž konečně  $n = \frac{5}{4}$  (prima a tercie), tedy  $p = 4$ ,  $q = 5$ ; všeobecná rovnice sem náležející jest ( $p$  sudé,  $q$  liché)

$$\overline{\varphi(\xi, q)^2} + 2\varphi(\xi, q) \cdot \psi(\eta, p) \sin p\varepsilon + \overline{\psi(\eta, p)^2} = \cos^2 p\varepsilon,$$

kde dlužno dosaditi

$$\varphi(\xi, 5) = 5\xi - 20\xi^3 + 16\xi^5 = \frac{5x}{a} - \frac{20x^3}{a^3} + \frac{16x^5}{a^5}$$

$$\psi(\eta, 4) = 1 - 8\eta^2 + 8\eta^4 = 1 - \frac{8y^2}{b^2} + \frac{8y^4}{b^4}.$$



Obr. 9. Lissajousovy obrazce: prima a tercie ( $\frac{5}{4}$ ).

Typické tvary obdržíme pro hodnoty

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2} = \left\{ 0, \frac{2}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{8}{16}, \frac{10}{16}, \frac{12}{16}, \frac{14}{16}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}, \frac{9}{16}, \frac{11}{16}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}, 1. \right.$$

Hořejšími hodnotami jest určena křivka souměrná

$$\left( \frac{5x}{a} - \frac{20x^3}{a^3} + \frac{16x^5}{a^5} \right)^2 + \left( 1 - \frac{8y^2}{b^2} + \frac{8y^4}{b^4} \right)^2 = 1,$$

dolejšími pak křivka degenerovaná

$$1 - \frac{8y^2}{b^2} + \frac{8y^4}{b^4} = \pm \left( \frac{5x}{a} - \frac{20x^3}{a^3} + \frac{16x^5}{a^5} \right).$$

Obr. 9. předvádí postup křivek při rostoucím  $\varepsilon$  a  $\tau$ ; serie začíná křivkou souměrnou, odtud přechází k degenerované v první poloze, pak zpět skrze souměrnou k degenerované v druhé poloze a vrací se k souměrné; tento postup se pak opakuje čtyřikrát. Aby mezi křivkami typickými opět byly dvě přechodní,

nutno zde pro intervall  $\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2}$  voliti hodnotu  $\frac{1}{48}$ .

Uvedené příklady, při nichž jsme diskussi analytických rovnic pomínuli, na grafickém znázornění přestávajíce, postačí úplně, abychom poznali, jak se věc má zcela všeobecně. Probíhá-li  $\varepsilon$  všechny hodnoty od 0 do  $2\pi$ , mění se křivky mezi tvary typickými, tak že změna se opakuje  $p$ -krát; je-li  $p$  a  $q$  liché, začíná se křivkou degenerovanou, je-li buď  $p$  nebo  $q$  sudé, křivkou souměrnou. Aby mezi typickými křivkami byly dvě přechodní, nutno pro hodnotu

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2} \text{ voliti intervall } \frac{1}{4} : 3 : p = \frac{1}{12p}.$$

## VII.

Jednajíce o obrazcích Lissajousových poukázali jsme k veliké rozmanitosti, jaká i při určitém relativním kmitočtu  $n$  ve tvarech obrazců vzniká růzností fasového rozdílu daných kmitů, ale jinak předpokládali jsme, že z oněch rozmanitých tvarů jeden určitý se objevuje a zůstává. Tomu je vskutku tak při geometrických konstrukcích. Avšak při skutečných pokusech objevuje se úkaz jiný, nový; obrazec nejeví se v určitém tvaru, nejeví se býti strnulým, jako obraz konstrukcí zjednaný, nýbrž měnlivým, přecházejícím plynule z jednoho tvaru do následujícího, jenž vzniká při rozdílu fasovém poněkud jiném. Měnlivost tato ukazuje se tedy tak, jakoby rozdíl fasový nepřetržitě stoupal nebo klesal; následkem toho není vlastně žádná křivka uzavřenou, poněvadž ke konci vibrační periody jsou již poměry poněkud změněné.

Jedná se zde o zjev tomu podobný, jaký nastává při dvou

kmitech stejnosměrných, z nichž jeden jen přibližně jest stejnodobý s druhým; malý rozdíl period způsobuje tu nenáhlou změnu původního rozdílu fasového. Nejinak je tomu i v případě našem.

Poměr  $\frac{N_2}{N_1} = \frac{q}{p}$  obou kmitočtů nelze fysikálně s naprostou přesností realizovati, nýbrž jen více méně přibližně; malý rozdíl periody  $T_2$ , jaká by býti měla a jaká v skutku jest, způsobuje pak nenáhlou změnu původního fasového rozdílu  $\varepsilon$ , a následkem toho nenáhlý spojitý přechod obrazce z jednoho tvaru do následujícího. Pokus nabývá tím zvláštní zajímavosti; jest viděti

všechny tvary obrazce, pro jistý poměr  $\frac{q}{p}$  dle rozdílů fasových možné, přecházeti jeden ve druhý. Zejména, když se obrazce promítají objektivně, světlem elektrickým nebo slunečním, ať již lamellami nebo ladičkami, jichž vibrace se udržují elektromagneticky, vzniká nenáhlou změnou obrazců zjev neobyčejně živý a poutavý. Celkový dojem jest ten, jakoby pozorovatel měl před sebou jakýsi zjev oscillační; na krajích této oscillace jsou křivky typické *degenerované*, u prostřed, jakoby ve stavu rovnovážném, jest křivka *symmetrická*, kterou se děje přechod od křivky degenerované v poloze jedné ke křivce degenerované v poloze druhé. Stává se ovšem, že tytéž vibrační křivky, když se opakují, bývají bodem kmitajícím opisovány v různých směrech; ale oko této různosti neznamená, poněvadž jednotlivé polohy bodu kmitajícího — při dostatečné frekvenci — splývají v křivky souvislé.

Položme sobě otázku, jaké změně  $\Delta\tau$  oscillace přísluší. Přechod od jednoho typického tvaru křivky ke druhému nastává dle dřívějších výkladů všeobecných, je-li

$$\frac{\tau}{T_2} = \frac{1}{4p} \quad \text{anebo} \quad \frac{\tau}{T_1} = \frac{1}{4q}.$$

Zavedme raději celkovou periodu  $T$  stanovenou rovnicí

$$pT_1 = T = qT_2.$$

Pak jest

$$\tau = \frac{T}{4pq}.$$

Poněvadž pak při oné právě popsané oscillaci přechod se děje od degenerované křivky v první poloze ke křivce souměrné, pak ke křivce degenerované v druhé poloze, a opět křivkou souměrnou ke křivce, od níž celá oscillace začala, tedy celkem 4-kráté, jest patrně

$$\Delta\tau = \frac{T}{pq}.$$

Proto, nežli předbíhání  $\tau$  projde celou periodou  $T$ , opakuje se ona oscillace  $pq$ -kráté, při čemž jednotlivé z oněch typických křivek se opisují v různém smyslu. Čím jsou čísla  $p$ ,  $q$  větší, t. j. čím jest poměr kmitočtů složitější, tím větší počet oscillací těch vznikne, než předbíhání  $\tau$  projde plnou periodou  $T$ .

Popisovali jsme zjev, jak nastává; je-li doba  $T_2$  jen *nepatrně* rozdílná od té, jež by kmitočtu  $\frac{q}{p}$  přesně vyhovovala; změna obrazce se děje pozvolna. Je-li rozladění *větší*, děje se změna tato rychleji, ale pak zjev stává se neklidným; oko nemá již dojem, jako by pozorovalo obrazce relativnímu kmitočtu  $n$  příslušící; vskutku také neklidné ty obrazce přísluší již onomu poměru kmitočtů složitěmu, jak následkem rozladění vzniká. Je-li na př. rozladění — v případě unisono —  $\frac{81}{80}$ , má oko dojem, že vidí střídající se ellipsy; pakli rozladění jest  $\frac{25}{24}$ ,  $\frac{16}{15}$  nebo dokonce  $\frac{10}{9}$ ,  $\frac{9}{8}$ , pak nelze již mluviti o ellipsách rychle se měnících, nýbrž obrazec, který vzniká, přísluší vlastně tomuto kmitočtu složitějšímu.

Můžeme však věc též obrátiti. Když v určitém případě, na př. u dvou ladiček, shledáme, že tvar obrazce se mění velmi málo anebo dokonce že obraz se jeví strnulým, soudíme naopak, že ladičky jsou dle poměru  $n$  velmi dobře anebo zcela dobře naladěny. Prostředek tento, ladění ladiček zkoumati, jest velice citlivým, a v tom spočívá hlubší akustický význam obrazců Lissajousových.

Ke konci ještě malou poznámku. Když se obrazce Lissajousovy ukazují objektivně opticky, upozoruje každý, že

v různých svých větvích jsou různé intensity, a to větší, kde jest zakřivení větve větší. Vysvětlení podává obr. 1., ve kterém úmyslně ellipsa není vytažena, nýbrž naznačena jen jednotlivými polohami kmitajícího bodu; jest ihned viděti, že na místech, kde ellipsa jest zakřivenější, bod se pohybuje menší rychlostí, tudíž že na místech těch jako déle setrvává; odtud dojem zra-  
kový déle trvá, tak že se tu křivka jeví jasnější. Ovšem to vše předpokládá, že pohybem vibrujícího bodu vzniká dojem úplné spojitosti křivky, což zase vyžaduje, aby světlý bod pro-  
běhl celou křivkou v době menší, než asi  $\frac{1}{15}$  sekundy.

## Jak třeba zvoliti vazby a síly, aby soustava jimi daná dala se realizovati.

Napsal

Arnošt Dittrich v Praze.

(Dokončení.)

2. v souřadnicích Lagrangeových. Jak na počátku § 5. uvedeno, obdržíme differencialní rovnice, jimž všeobecné kom-  
ponenty sil hoví, má-li o soustavě platiti věta třetí, z výrazů

$$(W'_i A) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

Poněvadž v Lagrangeových souřadnicích jest dle vzorce (19)  $A$  dáno výrazem

$$A f \equiv \sum_1^m \left( \alpha'_s \frac{\partial f}{\partial \alpha_s} + \xi_s \frac{\partial f}{\partial \alpha'_s} \right)$$

a symboly  $W'_i$  dány výrazy

$$U'_i f \equiv \sum_1^m \left( \eta_{i\mu} \frac{\partial f}{\partial \alpha_\mu} + \frac{\partial f}{\partial \alpha'_\mu} \sum_1^m \frac{\partial \eta_{i\mu}}{\partial \alpha_\sigma} \alpha'_\sigma \right), \quad i = 1, \dots, 6.$$

Provedeme-li nyní závorkové výrazy  $(U'_i A) \equiv 0$ , obdržíme, že

$$(U'_i A) = \sum_1^m [(U'_i \alpha'_\mu - A \eta_{i\mu}) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\mu} + (U'_i \xi_\mu - A \sum_1^m \frac{\partial \eta_{i\mu}}{\partial \alpha_\sigma} \alpha'_\sigma) \frac{\partial f}{\partial \alpha'_\mu}] = 0.$$