Matyáš Lerch

Poznámky o inversi řad a o číselných rovnicích. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 46 (1917), No. 4-5, 377--382

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122160

Poznámky o inversi řad a o číselných rovnicích.

Sdílí M. Lerch v Brně.

(Dokončení.)

Této methody můžeme užiti také k separaci kořenů v případě jich *shluku*, t. j. kdy p kořenů rovnice $f(x)=0$ leží tak blízko sebe, že je při obyčejném grafickém šetření stěží možno rozeznati. V tom případě uvážíme, že kořen rovnice $f^{(\nu)}(x)=0$ separuje kořeny rovnice

$$f^{(\nu-1)}(x)=0, \quad (\nu=p-1, \quad p-2, \ldots 1).$$

Rozřešíme-li veškery tyto rovnice, obdržíme jako kořeny rovnice $f'(v)=0$ veličiny v_1, v_2, ... v_{p-1} separující p kořenů shluklých rovnice $f(x)=0$,

Zajímavý, sem spadající příklad uvažoval *R. Mehmke* *)

Jde o rovnici

$$(a) \qquad f(x) \equiv x^{11}+x^7-x^3+0{\cdot}694x-0{\cdot}232=0;$$

grafickou methodou shledal Mehmke, že má tři blízké kořeny, jichž decimální logarithmy v prvním sblížení jsou

$$0{\cdot}7-1, \quad 0{\cdot}75-1, \quad 0{\cdot}8-1.$$

První grafické šetření podá však pouze okolnost, že v naznačeném místě (sblíženě) má rovnice kořeny buď tři, neb pouze jeden a to buď jednoduchý neb trojnásobný.

Je-li kořen jednoduchý, objeví se zde $f'(x)$ jako veličina kladná; poněvadž je to málo pravděpodobné, začněme s rovnicí

$$f''(a) \equiv 110a^9+42a^5-6a=0,$$

*) *R. Mehmke*, Praktische Methode zur Berechnung der reellen Wurzeln etc., Darmstadt, 1890.

která je vůči a^4 kvadratickou:

$$a^4 = \frac{-21 + \sqrt{1101}}{110} = 0{\cdot}110739273$$

a odtud pro logarithmus*)

$$La = 0{\cdot}76107542 - 1.$$

Výpočet dává

$$f(a) = -\frac{901}{10^8},\quad af'(a) = -0{\cdot}00085184,\ f'(a) = -0{\cdot}0014767,$$

$$f'''(a) = 29{\cdot}395801,$$

z čehož zřejmo, že obratní bod ($y'' = 0$) čáry $y = f(x)$ leží pod osou Ox u velmi malé vzdálenosti od ní $\left(\frac{9}{10^6}\right)$, a že jeho tečna směřuje pod osu, svírajíc s ní malý úhel asi pěti minut

Můžeme z hodnoty a vyjíti jako sbližné hodnoty kořene x_2 rovnice $f(x) = 0$; první krok dle Newtona podá zlepšenou hodnotu

$$x = a\left[1 - \frac{f(a)}{af'(a)}\right],\ Lx = 0{\cdot}75646 - 1,\ f(x) = \frac{-111}{10^8},$$

$$xf'(x) = -\frac{5379}{10^7},\quad x_2 \doteq x(1 - 0{\cdot}002063),$$

$$Lx_2 = 0{\cdot}75556312 - 1.$$

Systematický postup žádá však stanovení kořenů v_1, v_2 rovnice $f'(v) = 0$. Položíme $v = a + \alpha$, a s rovnicí tak vzniklou

$$-f'(a) = \tfrac{1}{2}f'''(a)\alpha^2 + \tfrac{1}{6}f^{(4)}(a)\alpha^3 + \ldots$$

naložíme dle methody (9[a]), t. j. zavedeme

$$\beta^2 = -\frac{2f'(a)}{f'''(a)} = \alpha^2 + \frac{1}{3}\frac{f^{(4)}(a)}{f'''(a)}\alpha^3 + \ldots$$

a odmocníme, načež inversí vyjde

$$\alpha = \beta - \frac{1}{6}\frac{f^{(4)}(a)}{f'''(a)}\beta^2 + \ldots$$

Napsané členy dávají pro kořeny v_1, v_2 (příslušné k oběma opačným hodnotám β) první sblížení, asi

$$0{\cdot}567 \quad \text{a} \quad 0{\cdot}587.$$

---

*) Desetinné logarithmy značím literou L.

Několikrát opakovaný postup Newtonův pak vede pro první (menší) obou kořenů k hodnotám

$$Lv_1 = 0{\cdot}75331523, \quad v_1 = 0{\cdot}56665044,$$

$$f(v_1) = \frac{1}{10^6}, \quad f''(v_1) = -0{\cdot}2834.$$

Pro hledané kořeny x_1, x_2 rovnice $f(x) = 0$ blízké při v_1 klademe $x = v_1 + \xi$, a máme dle (9) první sblížení

$$\xi = \eta = \pm\sqrt{-\frac{2f(v_1)}{f''(v_1)}} = \pm\, 0{\cdot}0026563,$$

$$x_1 = 0{\cdot}5639941, \quad Lx_1 = 0{\cdot}75127456 - 1$$

$$x_2 = 0{\cdot}5693067, \quad Lx_2 = 0{\cdot}75534629 - 1.$$

Od těchto hodnot možno vyjíti pro další sblížení Newtonovým postupem. U x_2 máme sblížení dvojí; střední hodnota logarithmů je kolem

$$Lx_2 = 0{\cdot}75545 - 1,$$

a pro *tuto* hodnotu x_2 máme při počítání na osm míst

$$f(x_2) = -\frac{2}{10^8}, \quad f'(x_2) = -0{\cdot}00039219.$$

Pro stanovení opravy za účelem dalšího sblížení bude nutno přepočítati hodnotu $f(x_2)$ s větším počtem desetinek, poněvadž nalezený výsledek $-2 : 10^8$ nedostačuje.

Pro stanovení třetího kořene x_3 třeba určiti přesněji druhý kořen derivace (2. kulminaci) v_2.

Poněvadž pak $x_2 \doteq v_2 - \eta_2$, $x_3 \doteq v_2 + \eta_2$, máme pro první sblížení

$$x_3 \doteq 2v_2 - x_2,$$

aniž třeba stanoviti veličiny $f(v_2)$, $f''(v_2)$, nutné k výpočtu*) η_2.

6. Právě počítaný příklad ukazuje, jak značné námahy početní vyžadují někdy rovnice, když první derivace funkce (tvořící levou stranu) je velmi malá, zvlášť když některé z vyšších derivací jsou velmi veliké. Jiného druhu je následující příklad

*) Také bychom byli výše stačili s hodnotami v_1, x_2 k určení prvního sblížení pro $x_1 \doteq 2v_1 - x_2$.

vzatý z politické arithmetiky, totiž rovnice o neznámé q (úročitel)

$$\psi(q) \equiv \frac{1 - q^{-n}}{q - 1} = B.$$

Tuto rovnici přepišme na

$$f(q) \equiv q^{-n} + Bq - (B + 1) = 0.$$

Funkce $f(q)$ má minimum q_0, určené z rovnice $f'(q) = 0$, t. j.

$$q_0^{n+1} = \frac{n}{B};$$

položíme zavádějíce novou neznámou ξ

$$q = q_0(1 + \xi),$$

rovnice nabude tvaru

$$q_0^{-n}(1 + \xi)^{-n} + Bq_0(1 + \xi) - (B + 1) = 0,$$

který lze psáti

$$(1 + \xi)^{-n} + n\xi = [1 - B(q_0 - 1)]\, q_0^n,$$

aneb při označení

$$C = [1 - B(q_0 - 1)]\, q_0^n - 1,$$
$$\varphi(\xi) \equiv (1 + \xi)^{-n} + n\xi - 1 = C.$$

Ježto pro malá ξ

$$\varphi(\xi) \equiv \frac{n(n+1)}{2}\xi^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\xi^3 + \ldots,$$

položíme

$$\frac{2C}{n(n+1)} = \eta^2,$$

a rovnici

$$(a) \qquad \eta^2 = \xi^2 - \frac{n+2}{3}\xi^3 + \frac{(n+2)(n+3)}{3 \cdot 4}\xi^4 - \ldots$$

řešíme inversí

$$\xi = A_1\eta + \frac{A_2}{2!}\eta^2 + \frac{A_3}{3!}\eta^3 + \ldots$$

Řešení formálně existuje i při proměnném malém η; tu platí rovnice differenciální mezi φ a ξ

$$(1 + \xi)\, d\varphi + n\varphi d\xi = n(n + 1)\, \xi\, d\xi,$$

a rovnice (a) vzniká substitucí

$$\varphi = \frac{n(n+1)}{2}\eta^2;$$

máme tak rovnici differenciální

$$\left(\xi - \frac{n}{2}\eta^2\right)\frac{d\xi}{d\eta} = (1+\xi)\eta$$

pro veličiny ξ, η vázané vztahem (a).

Derivujme obě strany ν-kráte, považujíce η za neodvisle proměnnou; vyjde tak

$$\left(\xi - \frac{n}{2}\eta^2\right)\xi^{(\nu+1)} + \binom{\nu}{1}(\xi' - n\eta)\,\xi^{(\nu)} + \binom{\nu}{2}(\xi'' - n)\,\xi^{(\nu-1)}$$

$$+ \sum_{k>2}\binom{\nu}{k}\xi^{(k)}\,\xi^{(\nu+1-k)} = \eta\xi^{(\nu)} + \nu\xi^{(\nu-1)},\ (\nu \geqq 2).$$

Veličina A_ν v hořejší řadě pro ξ jest hodnota $\xi^{(\nu)}$ příslušná ku $\eta = 0$, mimo to je zde $\xi' = 1$, $\xi^{(0)} = 0$; poslední vztah tedy dává

$$\binom{\nu}{1}A_1A_\nu + \binom{\nu}{2}A_2\,A_{\nu-1} + \binom{\nu}{3}A_3\,A_{\nu-2} + \ldots = \left[n\binom{\nu}{2} + \nu\right]A_{\nu-}$$

Na levé straně přicházejí členy dvojmo:

$$\binom{\nu}{\alpha}A_\alpha\,A_{\nu+1-\alpha} + \binom{\nu}{\nu+1-\alpha}A_{\nu+1-\alpha}A_\alpha = \binom{\nu+1}{\alpha}A_\alpha\,A_{\nu+1-\alpha},$$

a nalezený vztah zní

$$\left\{\binom{\nu+1}{1}A_\nu + \binom{\nu+1}{2}A_2\,A_{\nu-1} + \binom{\nu+1}{3}A_3\,A_{\nu-2} + \ldots\right\}$$

$$+ \binom{\nu}{\frac{\nu+1}{2}}A^2_{\frac{\nu+1}{2}} = \left[n\binom{\nu}{2} + \nu\right]A_{\nu-1},$$

při čemž v závorce $\{\}$ mají členy

$$\binom{\nu+1}{\alpha}A_\alpha\,A_{\nu+1-\alpha}$$

přípony $\alpha < \frac{\nu+1}{2}$, a bude $A_{\frac{\nu+1}{2}}$ v případě sudého ν nahraditi nulou.

Z této rekurentní rovnice vypočteme postupně pro $\nu = 2$, 3, 4... hodnoty

$$A_1 = 1,\ A_2 = \frac{n+2}{3},\ A_3 = \frac{(2n+1)(n+2)}{12},$$

$$A_4 = \frac{2}{45}(n-1)(n+2)(2n+1),$$

$$A_5 = \frac{1}{144}(n+2)(2n+1)(2n^2 - 19n + 2),$$

$$A_6 = -\frac{2}{189}(n-1)(n+2)(2n+1)(2n^2 + 2 + 23n),$$

. . . .

Rovnice $q = q_0 + q_0\xi$ po dosazení naší řady za ξ bude

$$q = q_0 + q_0\left(A_1\eta + \frac{A_2}{2!}\eta^2 + \frac{A_3}{3!}\eta^3 + \ldots\right);$$

avšak naše rovnice $f(q) = 0$ má ještě řešení $q = 1$, jež odpovídá záporné hodnotě η, tedy platí zároveň

$$1 = q_0 + q_0\left(-A_1\eta + \frac{A_2}{2!}\eta^2 - \frac{A_3}{3!}\eta^3 + \ldots\right),$$

a sečtením obou řad plyne *rozvoj*

$$q = -1 + 2q_0\left(1 + \frac{A_2}{2!}\eta^2 + \frac{A_4}{4!}\eta^4 + \frac{A_6}{6!}\eta^6 + \ldots\right)$$

pro kořen rovnice

$$\frac{1}{q^n}\,\frac{q^n - 1}{q - 1} = B,$$

při čemž

$$q_0^{n+} = \frac{n}{B},\quad \eta^2 = 2\,\frac{[1 - B(q_0 - 1)]\,q_0^n - 1}{n\,(n+1)}.$$

Logarithmy součinitelů A_2, A_4, A_6 . . . závislých pouze na počtu období n se vypočtou jednou pro vždy, pro užitečné případy ovšem; napsané členy dávají 9 míst správných.

Čtenář srovnej tuto methodu s postupem J. Kolouška ve 24. roč. Časopisu a propočítej příklad $n = 35$, $B = \frac{1000}{55}$ vyloženou právě methodou; při čemž se doporučuje užiti tabulek aspoň osmimístných.