Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Š. Šwarz

Niekol'ko poznámok k určeniu čísla π

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 63 (1934), No. 3, R31--R35

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122156`

Poznámka. Riešenie tu podané na podklade geometrickom *nezahrňuje v sebe všetky možné rešenia,* ale vyjadruje strany pomerne veľmi jednoduchými výrazmi ako v článku uvedeném na počiatku.

Niektoré špeciálné prípady:

1. Pravoúhly trojuholník dostaneme, keď je:

a) $$u = 1,$$
alebo:

b) $$v = 1,$$
alebo:

c) $$\frac{uv - 1}{u + v} = 1.$$

V tomto poslednom páde bude

$$u = \frac{v + 1}{v - 1}, \quad \text{alebo} \quad v = \frac{u + 1}{u - 1}.$$

2. Rovnoramenný trojuholník dostaneme, keď je:

a) $$u = v,$$
alebo:

b) $$\frac{1}{u} = \frac{uv - 1}{u + v}, \quad \text{teda} \quad v = \frac{2u}{u^2 - 1},$$

c) $$u = \frac{2v}{v^2 - 1}.$$

Obecný príklad číselný:

1. $$u = 2, \quad v = \tfrac{3}{2},$$
$$a = \tfrac{13}{6}, \quad b = \tfrac{5}{2}, \quad c = \tfrac{7}{3}.$$

Tieto strany: $\frac{13}{6}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{3}$, môžeme však v tom istom pomere zväčšiť, alebo zmenšiť. Na pr.: 13, 15, 14, alebo 1,3, 1,5, 1,4.

2. $v = \frac{5}{3}$, $u = \frac{7}{2}$, $a = \frac{34}{15}$, $b = \frac{53}{14}$, $c = \frac{899}{210}$.

Miesto strán: $\frac{34}{15}$, $\frac{53}{14}$, $\frac{899}{210}$ si môžeme zvoliť tiež: 476, 795, 899, alebo: 47,6, 79,5, 89,9 atď.

Niekoľko poznámok k určeniu čísla π.

Š. Šwarz, posl. přírod. fakulty v Praze.

V následujúcom chcem poukázať k niekoľkým prípadom, ktoré umožnujú elementárnym spôsobom vyjádriť číslo π nekonečným súčinom, respektíve radami.

I. Budiž do kružnice polomeru r vpísaný pravidelný n-uholník. Jeho strana, ako jednoducho plynie, je $a_n = 2r \,.\, \sin 2R/n$ a obsah $P_n = \frac{1}{2}nr^2 \sin 4R/n$. Obsah $2n$-uholníka je $P_{2n} = nr^2 \,.\, \sin 2R/n$; zároveň platí $P_n = nr^2 \sin 2R/n \,.\, \cos 2R/n = P_{2n} \cos 2R/n$.

Vsaďme do tejto rovnice za n po rade $n = 4, 8, \ldots, 2^n$ a rovnice znásobme. Po krátení ostane

$$P_4 = P_{2^n+1} \,.\, \cos R/2 \,.\, \cos R/4 \ldots \cos R/2^{n-1},$$

kde P_4, ako obsah štvorca kružnici vpísaného je $2r^2$. Jestliže prejdeme k limite, pre $n \to \infty$ bude podľa definície obsah kružnice, $\lim\limits_{n\to\infty} P_{2^n+1} = \pi \,.\, r^2$ a teda

$$2/\pi = \cos R/2 \,.\, \cos R/4 \ldots \cos R/2^n \ldots \qquad (1)$$

alebo tiež

$$2/\pi = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \,.\, \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}} \,.\, \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}} \ldots \qquad (\mathrm{I})$$

Že skutočne súčin je konvergentný, plynie zo vzťahu (1), kde všetky členy sú od nuly rôzné, stále rostúce, ale vždy menšie než 1.

II. Uvažujme výrazy $P_n = nr^2 \sin 2R/n \,.\, \cos 2R/n$, $P_{2n} = nr^2 \sin 2R/n$. Umocnime oba výrazy na druhú a odčítajme; platí

$$P_{2n}{}^2 - P_n{}^2 = n^2 r^4 \sin^4 2R/n.$$

Dosadíme-li po rade za $n = 4, 8, \ldots, 2^n$ a rady vzniklých výrazov sčítame, ostane

$$P_{2^n+1}{}^2 - P_4{}^2 = r^4 (4^2 \,.\, \sin^4 R/2 + 8^2 \,.\, \sin^4 R/4 + \ldots$$
$$\ldots + 2^{2n} \,.\, \sin^4 R/2^{n-1}).$$

Prejdime k limite; je $\lim\limits_{n=\infty} P_{2^n+1}{}^2 = \pi^2 r^4$, $P_4{}^2 = 4r^4$ a píšme $4 = 4 \sin^4 R$, máme:

$$(\pi/2)^2 = \sin^4 R + 2^2 \sin^4 R/2 + 4^2 \sin^4 R/4 + 8^2 \sin^4 R/8 + \ldots \qquad (\mathrm{II})$$

Rada (II) je ovšem konvergentnou. Odhliadnuc od geometrického významu, ktorý činí túto vlastnosť samozrejmou, možno to dokázať cestou čiste aritmetickou, užijúc na pr. limitného kritéria d'Alembertovho. Je $\lim\limits_{n=\infty} a_{n+1}/a_n = \frac{1}{4} < 1$ — pri čom a_n je n-tý člen rady (II) — a to, ako vieme, je nutnou a postačujúcou podmienkou pre konvergenciu.

III. Uvažujme pravideľný n-uholník kružnici opísaný. Platí pre neho jednoduchý vzťah $P'_n = nr^2 \operatorname{tg} 2R/n$ a z toho pre $2n$-uholník $P'_{2n} = 2nr^2 \operatorname{tg} R/n$

$$P'_n = nr^2 \,.\, \frac{2 \operatorname{tg} R/n}{1 - \operatorname{tg}^2 R/n}, \text{ dosaďme } \operatorname{tg} R/n = P'_{2n}/2nr^2.$$

Úpravou máme

$$\frac{1}{P'_{2n}} - \frac{1}{P'_n} = \frac{P'_{2n}}{4n^2r^4} = \frac{\operatorname{tg} R/n}{2nr^2}.$$

Dosadzujme opäť do toho vztahu $n = 4, 8, \ldots, 2^n$ a sčítajme rovnice; bude

$$\frac{1}{P'_{2^{n+1}}} - \frac{1}{P'_4} = \frac{1}{2r^2}\left(\tfrac{1}{4} \operatorname{tg} R/4 + \tfrac{1}{8} \,.\, \operatorname{tg} R/8 + \ldots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} R/2^n\right).$$

Prejdeme-li k limite pre $n \to \infty$, je $\lim\limits_{n=\infty} 1/P_{2^{n+1}} = 1/\pi r^2$ a ďalej $1/P_4 = 1/4r^2$, takže platí

$$2/\pi = \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} R/2 + \tfrac{1}{4} \operatorname{tg} R/4 + \tfrac{1}{8} \operatorname{tg} R/8 + \ldots \tag{III}$$

Poznámka: 1. Mohli sme ovšem vyjsť od P_3, P_5 a pod. a dostali by sme obdobné výsledky vo všetkých troch prípadoch.

2. Vzťahy (I) a (III), udávajúce závislosť π na funkciach goniometrických, nehodia sa ovšem k numerickému výpočtu, jednak pre pomerne malú konvergenciu (ačkoľvek na pr. u rady (III) už piaty člen nemá vlivu na stotiny) a jednak pre značnú námahu, ktorej vyžaduje dostatočné určenie jednotlivých členov.

IV. Určíme teraz radu, udávajúcu π priamo číslami — bez funkcí goniometrických.

Zo stredu pravouhlých súradnic O opíšme polomerom r kružnicu. Rozdelme polomer, ležiaci na pr. v kladnom smeru osi x na n dielov a vpíšme nad nimi do kružnice obdialníky. Dostaneme $n - 1$ obdialníkov, ktorých plochy majú súčet

$$S_n = \frac{r^2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

Určíme-li $\lim\limits_{n=\infty} S_n$, máme obsah štvrtkruhu. Vykonajme to takto: rozveďme pro odmocninu podľa binomickej poučky a až potom preveďme prechod k limite. Máme

$$S_n = r^2\left[\frac{n-1}{n} - \binom{\frac{1}{2}}{1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2}{n^3} + \binom{\frac{1}{2}}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^4}{n^5} - \ldots\right]. \tag{2}$$

Aby sme určili $\lim\limits_{n=\infty} S_n$, stačí znať $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{1^p + 2^p + \ldots + (n-1)^p}{n^{p+1}} =$ $= \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{1}{n^{p+1}} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n-1} k^p$. Uvažujme k tomu cieľu identitu

$$(k+1)^{p+1} = k^{p+1} + \binom{p+1}{1} \cdot k^p + \ldots + \binom{p+1}{p+1}.$$

Vsaďme za k čísla $1, 2, 3, \ldots, n-1$ a sčítajme rovnice; dostaneme

$$n^{p+1} = 1 + \binom{p+1}{1}\sum_{k=1}^{n-1} k^p + \binom{p+2}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k^{p-1} + \ldots + n - 1. \quad (3)$$

Vidíme, že súčet $\sum_{k=1}^{n-1} k^p$ obsahuje člen v n najvýš $p+1$-ho stupňa.

Preto $\sum_{k=1}^{n-1} k^q$, kde $q \leq p-1$ obsahuje člen najvýš p-tého stupňa.

Aby sme zistili hľadanú limitu, deľme výraz (3) n^{p+1} a prejdime k limite. Na pravej strane odpadne jednak prvý člen a ďalej všetky súčty mimo prvý sú, vzhľadom na predchádzajúcu poznámku, rovné nule, takže ostane iba

$$1 = \lim_{n=\infty} \binom{p+1}{1} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n-1} k^p}{n^{p+1}} \text{ t. j. } \lim_{n=\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1}.$$

Rovnina (2) prejde teda na tvar

$$\lim S_n = r^2 \left[1 - \binom{\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{1}{3} + \binom{\frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{1}{5} - \ldots\right],$$

a ponevážd $\lim_{n=\infty} S_n = \frac{\pi r^2}{4}$, platí konečne

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \binom{\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{1}{3} + \binom{\frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{1}{5} - \binom{\frac{1}{2}}{3} \cdot \frac{1}{7} + \ldots \quad \text{(IV)}$$

V. Rozdelme opäť jeden polomer štvrtkruhu na n dielov a sostrojme k týmto bodom príslušné body na obvodu. Dostaneme zase lomenú čiaru, ktorá v limite pre $n = \infty$ prejde v obvod štvrtkružnice.

Ľubovoľné dva body vedľa seba stojáce majú súradnice

$$\left[k \cdot \frac{r}{n}, r\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}\right], \quad \left[(k+1)\frac{r}{n}, r\sqrt{1 - \left(\frac{k+1}{n}\right)^2}\right],$$

takže dĺžka lomenej čiary je

$$o_n = r\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left[\sqrt{1 - \left(\frac{k+1}{n}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}\right]^2}.$$

Úpravou máme — užijeme-li známeho vzorca $\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - b})} - \sqrt{\frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - b})}$

$$o_n = r\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{k(k+1)}{n^2}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{k(k+1)}{n^2}}\right).$$

Oba výrazy rozvedeme podľa binomickej poučky pro lomený exponent v nekonečné rady:

$$o_n = r\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right]-\binom{\frac{1}{2}}{1}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}-\right.\right.$$
$$-\left.\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\cdot\frac{k(k+1)}{n^2}+\binom{\frac{1}{2}}{2}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{3}{2}}-\right.$$
$$\left.\left.-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]\frac{k^2(k+1)^2}{n^4}-\dots\right\}.$$

Keď rozvedeme výrazy v hranatých zátvorkách a delíme 2, ostane

$$\frac{o_n}{2} = r\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\left[\binom{\frac{1}{2}}{1}\cdot\frac{1}{n}+\binom{\frac{1}{2}}{3}\cdot\frac{1}{n^3}+\dots\right]+\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\cdot\binom{\frac{1}{2}}{l}\left[\binom{\frac{1}{2}-l}{1}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\binom{\frac{1}{2}-l}{3}\cdot\frac{1}{n^2}+\dots\right]\frac{k^l(k+1)^l}{n^{2l+1}}\right\}.$$

Prejdime k limite pre $n \to \infty$. Podľa definície $\lim\limits_{n=\infty}\frac{o_n}{2r}=\frac{\pi}{4}$. Na pravej strane dá prvá hranatá zátvorka pre $n \to \infty$ hodnotu $\frac{1}{2}$, poneváč sa vyskytuje v každom súčtu, t. j. n — 1-krát. Limita druhého výrazu sa redukuje ihned na

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\binom{\frac{1}{2}}{l}\binom{\frac{1}{2}-l}{1}\frac{k^l\cdot(k+1)^l}{n^{2l+1}}=$$
$$=\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\binom{\frac{1}{2}}{l}\binom{\frac{1}{2}-l}{1}\cdot\frac{1}{2l+1},$$

jak hned plynie uvážime-li, že v hornom súčtu je rozhodujúcim iba výraz $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{k^{2l}}{n^{2l+1}}$. Je teda

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\binom{\frac{1}{2}}{l}\left(\tfrac{1}{2}-l\right)\frac{1}{2l+1}.$$

Odčítame-li od tohoto vzťah (IV) ostane (— pri tom je (IV) deleno dvoma —)

$$\frac{\pi}{8}=\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\binom{\frac{1}{2}}{l}\cdot\frac{1}{2l+1}\cdot l,\quad \text{t. j.}$$

$$\frac{\pi}{8}=\binom{\frac{1}{2}}{1}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1-\binom{\frac{1}{2}}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot 2+\binom{\frac{1}{2}}{3}\cdot\frac{1}{7}\cdot 3-\dots \qquad \text{(V)}$$