J. S. Vaněček

O bicirkulární šestiřadce

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 16 (1887), No. 5, 227--229

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122142`

kontrolovati tím, že podrobíme křivky C_n, C_{n-1} atd., vyskytující se v 1. a 2., jiným podmínkám, než jsme právě učinili a přesvědčíme se, že při vhodné volbě těchto podmínek dospějeme opět k rovnicím (I) a (II).

Podobným způsobem lze též určiti, kolik dvojných bodů může míti nejvýše křivka n-ho řádu.

Podotýkám ještě, že k odvození vět kvadratické transformace, jichž jsme tuto užili, dostačí znalosť základních vět o svazku kuželoseček a definice křivky n-ho řádu, že totiž má s přímkou nejvýše n společných bodů.

O bicirkulární šestiřadce.

Podává **J. S. Vaněček**,
professor v Jičíně.

Jsou dány dvě dvouřadky *) O, M ve všeobecné poloze.

Na jedné z nich, O, vytkněme dva body a, b a spojme je s libovolným bodem o této křivky přímkami ao, bo. Přímka ao protíná dvouřadku M v bodě m. Tímto veďme přímku mn tak, aby tvořila s ao daný úhel α. Ta protíná bo v bodě n. Určeme místo N bodu n, když bod o probíhá dvouřadku O, a úhel α zůstává stálým.

Stanovme především, kolik bodů n místa N dostáváme přímo na libovolném paprsku bo. Přímka ao protíná M ve dvou bodech m, m_1. Každým z nich prochází jedna přímka tvořící s ao daný úhel α. Dostáváme tudíž na bo dva body n, n_1 místa N.

Hledejme nyní, kolikrát se dostane bod n do polohy b. K tomu cíli sestrojíme nad ab trojúhelník abm' tak, aby při při vrcholu m' byl výplňkový úhel α' daného úhlu α. Místem takového vrcholu m' je, jak známo, kružnice M', která má ab za tětivu. Když bod m' přijde na dvouřadku M, pak dřívější mn sjednocuje se s $m'b$ a protíná příslušný paprsek ob v bodě b. Takové polohy bodu m' dostaneme čtyry, neboť kružnice M'

---

*) Rčení „křivka čtvrtého řadu" je nahrazeno v tomto článku kratším „čtyřřadka." Zrovna tak místo slova „kuželosečka" užijeme „dvouřadka" neb „dvoutřídka" pro budoucnosť, dle toho, jak na ni pohlížíme.

protíná dvouřadku M ve čtyrech bodech. Z toho plyne, že bod b je čtyrnásobným bodem hledané křivky N.

Tečny křivky N v tomto čtyrnásobném bodě sestrojíme následovně. Budiž m' průsečík křivek M, M'. Přímka am' protíná O v bodě o. Spojnice ob tohoto bodu s b je tečnou křivky N v bodě b.

Jelikož na každém paprsku procházejícím bodem b leží dva body n a čtyrnásobný b, tedy je křivka N šestiřadka.

Padne-li vrchol m' trojúhelníku abm' na křivku O, pak je ob či $m'b$ rovnoběžna s mn, a tedy bod n je v nekonečnu. Poněvadž kružnice M' protíná dvouřadku O mimo body a, b ještě ve dvou bodech, tedy dostáváme takto dva body v nekonečnu a ty jsou dvojné a sice úvratné z následující příčiny.

Přímka am' v tomto případě protíná dvouřadku M ve dvou bodech m, m_1. Každým z nich vedená rovnoběžka s bm' protíná tuto v úběžném bodě; ty jsou n, n_1. Sjednocují se.

Máme takto stanoveny dva dvojné body či čtyry body v nekonečnu na hledané křivce N. Stanovme ještě ostatní dva.

Jeden paprsek ao je rovnoběžný s jednou asymptotou dvouřadky M a protíná ji tudíž v úběžném bodě m. Přímka mn, která jím prochází a tvoří s am daný úhel α, je úběžna a protíná přímku bo v úběžném bodě křivky N. Totéž platí pro druhý úběžný bod křivky M. Všecky úběžné body křivky N máme takto stanoveny.

Pozorujme průsečný bod p daných dvouřadek O, M. V tom se sjednocují všecky tři body o, m, n. Tedy p je bodem křivky N.

Můžeme tedy vysloviti následující poučku:

Pohybuje-li se trojúhelník mno *tak, že jeho vrchol* m *probíhá dvouřadku* M, *vrchol* o *dvouřadku* O, *strany* mo, no *točí se pořadem kolem dvou pevných bodů* a, b *na* O *a úhel při vrcholu zůstává stálý, pak vrchol* n *popisuje šestiřadku* N, *která prochází průsečnými body dvouřadek* O, M, *v bodě* b *má čtyrnásobný bod a dva úvratné body v nekonečnu.*

Předpokládejme, že křivky O, M přejdou v kružnice. V tomto případě rozpadá se křivka N ve dvě jiné a sice ve čtyrřadku N, která má v b dvojný bod a obsahuje ony dvojné body v nekonečnu, jež stanou se kruhovými body i, j. Druhá část rozpadlé křivky je pomyslná kružnice, která majíc v b

dvojný bod se rozpadá ve dvě isotropické přímky vycházející z bodu *b*.

Tuto podanému sestrojení křivky N můžeme podložiti následující výklad.

Střed kružnice M přeložme do bodu *b*. Libovolná přímka *ao* protíná tuto kružnici v bodě *m*; tomu odpovídá určitý bod *n* křivky N. Dostáváme tak čtyrúhelník *abnm*. V tom jsme si zvolili stranu *ab* a úhlopříčnu *bm*. Úhel *amn* je výplňkový daného úhlu *α*.

Poněvadž úhel *aob*, jakožto obvodový kružnice O nad tětivou *ab*, je stálý, tedy je též úhel *mnb* znám. Opíšeme-li druhou úhlopříčnou *an* jakožto poloměrem ze středu *a* kružnici L, pak tato protíná čtyřřadku N obecně ve čtyrech bodech *n*, jež podávají řešení následující úlohy:

Jsou dány: jedna strana, obě úhlopříčny a dva úhly, jež spolu tvoří neznámé tři strany takto stanoveného čtyrúhelníku; sestrojiti ten čtyrúhelník.

Jest patrno, že tu dostáváme obecně čtvero řešení. Avšak mezi těmi přichází též řešení následující úlohy:

Má se sestrojiti čtyrúhelník, když jsou dány dvě protilehlé strany, jedna jeho úhlopříčna a pak oba úhly, jež tvoří druhá úhlopříčna s neznámýma stranama.

Předpokládejme, že úhlopříčna *bm* daného čtyrúhelníku v první úloze rovná se dané straně *ab*. Pak kružnice M má svůj střed v *b* a prochází bodem *a*. Jedny body *m* spadají vesměs do bodu *a*, a bod *n* je pak vrcholem trojúhelníku *aon*, jehož úhly *nmo*, *mon* jsou stálé a tedy i úhel *mno*. Vrchol *n* popisuje tudíž kružnici N′ sestrojenou nad tetivou *ab*. Poněvadž celá křivka N je čtyrřadkou, tedy její druhá část je též kružnice (jeť obecná N bicirkulárná) a sice N, která je shodnou a souměrně položenou s N′ dle přímky, jež spojuje bod *b* se středem kružnice O. Tato osa souměrnosti je společnou tečnou obou kružnic N, N′. Jen kružnice N podává řešení dané úlohy, jak ze sestrojení kružnice N′ vysvítá.

Dostáváme tudíž v tom případě, že jedna z daných úhlopříčen je stejna s danou stranou, buď dvě, jedno aneb žádné řešení dané úlohy, dle toho jakou délku má druhá úhlopříčna.