František Josef Studnička

Ryze analytický důkaz poučky že mezi dvěma hodnotami, jež poskytují opačně označené výsledky, leží nejméně jeden realný kořen rovnice

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 11 (1882), No. 1, [1a]--38

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122127


SCHULZ. Sc.

RYZE ANALYTICKÝ
DŮKAZ POUČKY,

že

mezi dvěma hodnotami, jež poskytují opačně označené výsledky, leží nejméně jeden realný kořen rovnice.

Podal

BERNARD BOLZANO,

světský kněz, doktor filosofie, c. k. professor vědy náboženské a řádný člen král. společnosti náuk v Praze.

(Abhandlungen der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, V. Bd. 1817.)

Z němčiny přeložil, poznámkami opatřil

a k oslavě stoletých narozenin Bolzanových

vydal

Dr. F. J. STUDNIČKA,

v. ř. professor mathematiky na c. k. universitě, řádný člen král. české společnosti náuk v Praze a král. belgické společnosti náuk v Lutychu atd.

V PRAZE.

Nákladem Jednoty českých mathematiků.

1881.

Tiskem dra. Edv. Grégra.

„Šťastným být a jiné blažit, to jest úkol člověka."
Bolzano.

Jsem úplně přesvědčen o tom, že *Bolzano* *) nikdy se při svých předsevzetích neřídil výsledkem úvahy, zdali mu vyplyne z jich provedení chvála a sláva čili nic; patřilť on zcela k oněm duševním velikánům, jimž jest pravda a účinek pravdy jedině důstojným cílem lidského snažení, jimž tedy vyhledávání pravdy v oboru kterémkoli jest úkolem nejvyšším. I bylo mu zajisté věcí vedlejší a podřízenou, dosáhne-li vyšetřením a rozšířením nějaké nové pravdy zároveň zevního zisku nějakého ať hmotného, ať idealního, jakýmž se jeví býti oslava druhu obvyklého. Při známé své skromnosti nemohl ani býti přítelem okázalých ovací a hlučného oslavování, nechť platilo komukoli, najmě pak jemu. —

Avšak slavnostní projevy tohoto druhu mají i stránku druhou, k slavícím se vztahující, jelikož ukazují, jak si potomstvo dovede vážiti toho, co před ním v oboru badání vědeckého bylo vykonáno a jemu co šťastnému dědici němým odkazem odevzdáno. A tu platí stará zásada, že ctíce památku zasloužilých a slavných předchůdců

*) Narodil se dne 5. října 1781 v Praze, kdež zemřel dne 18. prosince 1848.

svých, ctíme zároveň v míře stejné i sebe. A s tohoto hlediska by zajisté i spanilomyslný *Bolzano* ničeho nenamítal proti oslavě stoletých svých narozenin, byť i projevu tohoto se zřetelem ke své osobnosti neočekával a si nepřál, ba veřejná ovace uváděla do rozpaků skromnou prostomyslnost a velebnou jednoduchost jeho.

Nechť se soudí o mnohotvárné činnosti a kulturní důsažnosti *Bolzanově* jakkoli, popírati nebude se moci, že dějiny vzdělanosti v Čechách, objímající první polovici našeho století, shledají v jeho životě a působení mohutné ohnisko, z něhož řinoucí se paprsky vzdělávací dodaly zvláštního rázu celé generaci vzdělanců téže doby, takže objevila se tu v moderním rouše obdoba slavných antických kruhů filosofických, jichž nejskvělejším představitelem byl Pythagoras.

A jako jsou mathematické výzkumy nejtrvalejším základem slávy tohoto původce autority, potrvají zajisté nejdéle, ba nezaniknou nikdy zásluhy, jichž si *Bolzano* získal o zdokonalení naší nejdokonalejší vědy, o prohloubení a rozšíření mathematiky. *Theolog* snad nalezne v duchu jeho výkladů nejednu neshodu, jakož učí osudný obrat v jeho životě. *Filosof*, porovnávající různé pokusy ducha lidského v oboru metafysickém, zajisté nebude se vším souhlasiti, co *Bolzano* v obsažnosti své víry dovedl si uspokojivě srovnati. *Mathematik* však bude vždy s největším uznáním čísti jasné jeho výklady algebraické i geometrické*) a bude vždy obdivovati se vzácné přesnosti logické, jakou se honosí všechny mathematické práce

*) Na důkaz uvádím pojednání: „B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung“ von *O. Stolz* in Innsbruck, uveřejněné v Mathem. Annal. XVIII. Bd. pag. 255 et seqq.

Bolzanovy, takže i abstraktní logik tu shledává nejvzácnějších případů konkretních hojnost a rozmanitost velikou.

A poněvadž z četných prací mathematických, jež popřáno bylo *Bolzanovi* uveřejniti*) — větší ještě počet plodů mathematických jeho snah zůstal z příčin neznámých a nevysvětlených v rukopise, — vyniká pojednání krátké, jež tuto v rouše českém podáváme k upomínce na stoleté jeho narozeniny, doufáme, že nalezneme omluvení, proč právě tímto spůsobem jsme se odhodlali pozornost k jeho zásluhám obrátiti. Mámeť na zřeteli především bystrého mathematika v Čechách zrozeného, u něhož

*) Sem patří spisové tito:

1. Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie, Prag, 1804.

2. Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik, Prag, 1810.

3. Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössen dienen, genauer als bisher erwiesen. Prag, 1816.

4. Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Prag, 1817.

5. Die drei Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst, zugleich als Probe einer gänzlichen Umgestaltung der Raumwissenschaft allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt. Leipzig, 1817.

6. Versuch einer objektiven Begründung der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte. Prag, bei Kronberger 1842.

7. Versuch einer objektiven Begründung der Lehre von den drei Dimensionen des Raumes. Prag, bei Kronberger 1843.

8. Dr. Bernard Bolzano's Paradoxien des Unendlichen herausgegeben aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers von Dr. Fr. Přihonský. Leipzig, 1851.

jen dlužno litovati, že mu nebyla usouzena stolice mathematiky na tehdejším ústavu filosofickém, kteráž byla současně se stolicí náboženství uprázdněna. Jak by se bylo studium této vědy, již tu zastupoval tolik let přísný Jandera, u nás prohloubilo a rozšířilo, kdyby ji byl současně též vykládal nadšený *Bolzano!*

V Jindřichově Hradci, dne 20. července 1881.

Dr. F. J. Studnička.

Předmluva.

O dvou větách v nauce o rovnicích bylo ještě nedávno možná tvrditi, že se nezná jich zcela správný důkaz. První věta zní, *že mezi dvěma hodnotami neznámé veličiny, jež poskytují opačné výsledky, vždy leží nejméně jeden realný kořen rovnice.* Druhá pak věta zní, že *každá algebraická racionalní celistvá funkce jedné veličiny proměnné se dá rozložiti v realné činitele prvního nebo druhého stupně.* [1]) — Po několika nepodařených pokusech, jež ke druhé větě této podal *d'Alembert*, *Euler, de Foncenex*, *La Grange, La Place*, *Klügel* a j., poskytl nám v minulém roce konečně p. *Gauss* dvé důkazů, u nichž sotva jest něčeho pohřešovati. Tento výtečný učenec nás sice již roku 1799 obohatil důkazem této věty, [2]) kterýž však dle

---

[1]) Tato věta souvisí, jak známo, nutně s předcházející; neb vyhovuje-li rovnici

$$f(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = 0\,, \quad a_0 = 1\,, \tag{1}$$

realná hodnota $x = \alpha_1$, jest levá strana její dělitelna rozdílem $(x - \alpha_1)$, tak že platí

$$f(x) = (x - \alpha_1) f_1(x),$$

načež podílu $f_1(x)$ svědčí opět věta první a vede tedy kořen α_2 ku podmínce

$$f_1(x) = (x - \alpha_2) f_2(x),$$

což možná stejným spůsobem n-kráte opakovatí, je-li rovnice (1) stupně n-tého, takže spojením těchto podmínek se konečně obdrží

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \equiv \prod_{k=1}^{n} (x - \alpha_k). \tag{2}$$

Jsou-li některé veličiny α_k soujemné, vyskytují se, jak známo, sdružené, načež součin dvou příslušných faktorů takovýchto jest realný a stupně druhého. *Std.*

[2]) Demonstratio nova Theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Helmstadii, 4°, 1799.

vlastního doznání jeho měl tu vadu, že ryze analytickou pravdu dovozoval *geometrickými úvahami.* Jeho dva nejnovější důkazy[3]) jsou však i této vady prosty, jelikož trigonometrické funkce, jež se v posledním důkazu vyskytují, mohou a mají se pojímati ryze analyticky.

První věta, o níž byla dříve učiněna zmínka, nepatří zrovna k oněm poučkám, jimiž se důmysl učenců dosud zanášel spůsobem velmi vynikajícím. Avšak i tu shledáváme, že mathematikové vážnosti nemalé se jí obírali a o různé důkazy její se pokoušeli. Kdo by se o tom chtěl přesvědčiti, nechť porovná jen rozličné výklady, jež k této větě přičinil na příklad *Kästner* [4]), *Clairaut* [5]), *Lacroix* [6]), *Metternich* [7]), *Klügel* [8]), *La Grange* [9]), *Rösling* [10]) a m. j.

Že však žádný z těchto důkazů nelze považovati za dostatečný, shledá se velmi záhy při důkladnějším jich prozkoumání.

I. Při nejobyčejnějším důkazu užívá se pravdy z geometrie vyňaté, že totiž *každá nepřetržitá čára jednoduchého zakřivení, jejíž pořadnice jsou napřed positivní a pak negativní* (neb naopak), *nutně protíná osu úseček v nějakém bodě, ležícím mezi oněmi pořadnicemi.* Ani proti správnosti, ani proti jasnosti této geometrické poučky není možná činiti námitky. Avšak je taktéž zřejmo, že se nesnáší se správností methody, odvozují-li se pravdy *ryzé* (neb obecné) mathematiky (t. j. arithmetiky, algebry neb analyse) z úvah, příslušných jen *upotřebené* (neb zvláštní) její části, zejména *geometrii.* A nebyla již dávno cítěna a uznána

---

[3]) Demonstratio nova altera etc. Demonstratio nova tertia; obě z roku 1816.

[4]) Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen. 3. Aufl. §. 316.

[5]) Elémens d'Algèbre. 5 eme Edit. Supplémens. Chap. I. n° 16.

[6]) Elémens d'Algèbre. 7 eme Edit.

[7]) V překladu předcházejícího spisu od Lacroix. Mainz 1811. §. 211.

[8]) Ve svém mathematickém slovníku, II. Bd. pag. 447.

[9]) Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés. Paris, 1808.

[10]) Grundlehren von den Formen, Differenzen, Differentialien und Integralien der Functionen. I. Thl., §. 49.

nespůsobilost takovéto $\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}\beta\alpha\sigma\iota\varsigma$ $\varepsilon\grave{\iota}\varsigma$ $\check{\alpha}\lambda\lambda o$ $\gamma\acute{\varepsilon}\nu o\varsigma$?[11]) Nebyla již ve sterých případech jiných, kde se znaly prostředky, odstraněna a nebylo toto odstranění k zásluhám počítáno?[12]) Nemá se k témuž táhnouti snaha i zde, chce-li se šetřiti důslednosti? — Zajisté, uváží-li se, že důkazy vědecké nemají býti pouhé *postavení na jisto*, nýbrž spíše *odůvodnění*, t. j. výklady objektivních důvodů, pravdě hledané svědčících: vyjde o sobě na jevo, že ryze vědecký důkaz neb objektivní základ nějaké pravdy, platící o *všech* veličinách, ať jsou prostorové čili nic, nemůže vězeti v pravdě, platící jen o veličinách *prostorových*. Ba, přidržíme-li se tohoto náhledu, pochopíme, že takovýto důkaz *geometrický*, jak nejčastěji, tak i v případě tomto, jest pravým kroužkem. Jestli totiž geometrická pravda, k níž se odvoláváme, (jak jsme již připustili) i nanejvýš *jasnou* a nepotřebuje-li tedy žádného důkazu co *na jisto postavení*, vyžaduje přes to předc *odůvodnění*. Nebo patrně jsou pojmy ji skládající tak složity, že ani okamžik nelze zadržeti výrok, že nepatří k oněm *jednoduchým* pravdám, jež jmenujeme *základné* nebo *zásady*, poněvadž jsou jen *základem*, nikoli však *výsledkem* jiných; ba že jest *poučkou* nebo *pravdou výslednou*, t. j. pravdou takovou, kteráž základ svůj má v jistých pravdách jiných a tedy i u vědě co výsledek z nich odvozena býti musí.[13]) A tu nechť uvažuje, komu libo, objektivní důvod, proč čára protíná svou osu úseček za okolností dříve vytknutých: i pozná zajisté velmi záhy, že důvod tento nespočívá v ničem jiném, nežli v pravdě všeobecné, že každá spojitá funkce proměnné x, kteráž pro jistou hodnotu tohoto x jest positivní, pro jinou pak negativní, musí pro nějakou mezi oběma ležící hodnotu státi se nullou. A právě tato pravda má se zde dokázati. Aniž by se tedy poslední tato pravda z předcházející odvodila (jakož se děje spůsobem důkazu, jejž tuto zkoumáme), musí spíše naopak tato z oné se

---

[11]) Tuto okolnost vykládá Bolzano zcela obšírně v předmluvě ke spisu svému, na prvním místě dříve uvedenému a učiteli svému *St. Vydrovi* věnovanému. *Std.*

[12]) Příkladem toho jsou pojednání p. prof. *Gausse* dříve uvedená.

[13]) Srovnej mimo to mé „Beiträge zu einer begründeten Darstellung der Mathematik“ I. Lieferung, Prag, 1810, II. Abthl. §. 2., 10., 20., 21., kdež vyvinuty jsou logické pojmy, jež tuto za známé považuji.

vyváděti, mají-li se vědecké pravdy tak vykládati, jak jsou spojeny dle své objektivní souvislosti.

II. Taktéž sluší zamítnouti důkaz, jejž někteří vyvinují z pojmu *spojitosti* funkce pomocí pojmu *času* a *pohybu*. „Mění-li se," jak praví, „dvě funkce fx a φx dle zákona spojitosti a platí-li pro $x = \alpha$ podmínka $f\alpha < \varphi\alpha$, pro $x = \beta$ však $f\beta > \varphi\beta$: musí býti mezi α a β nějaká hodnota u, pro niž platí $fu = \varphi u$. Nebo představíme-li si, že proměnná veličina x dosáhne v těchto dvou funkcích postupně všech mezi α a β ležících hodnot a v témž okamžiku vždy na obou stranách stejné hodnoty: tedy jest na *začátku* této nepřetržité změny hodnot x patrně $fx < \varphi x$ a na *konci* $fx > \varphi x$. Ale poněvadž obě funkce při své spojitosti napřed musí proběhnouti všemi hodnotami středními, nežli dosáhnou vyšší, musí býti *okamžik střední*, kde se obě rovnaly." — Toto rozumování znázorňuje se pak pohybem dvou těles, z nichž jedno s počátku bylo *za* druhým, na konci pak je *před*běhlo a tedy nutně v jistém okamžiku *vedlé* něho musilo se octnouti. —

Nikdo zajisté nebude upírati, že pojem *času* a tím spíše pojem *pohybu* jest obecné mathematice tak cizím jako pojem *prostoru*. A předc bychom ničeho proti tomu nenamítali, kdyby tyto dva pojmy sem byly uvedeny jen k vůli *objasnění*. Neb se nekloníme nijak ku přehnanému *purismu*, kterýž vyžaduje k odstranění všeho vědě cizího, aby se u výkladu neužívalo výrazu přejatého z oboru cizího ani v přenešeném smyslu a k tomu účelu, aby se věc vyjádřila kratčeji a jasněji nežli možná popisem pomocí samých vlastních pojmenování neb aby se vyhnulo nelibozvučnému stálému opakování týchže slov aneb aby se pouhým jmenem věci daným již připomenulo příkladu, sloužícího k odůvodnění onoho tvrzení. Z čehož jde zároveň na jevo, že nijak nepovažujeme příklady a upotřebení za věc, umenšující dokonalost vědeckého výkladu. Tolik však naproti tomu žádáme zcela přesně: nechť se nikdy nekladou místo důkazů příklady a nezakládá na obraty v nevlastním smyslu volené a na vedlejší představy s nimi spojené podstata závěrku sama, takže by tento odpadl, jakmile by se ony změnily.

Po vyslovení těchto náhledů dalo by se snad vmísení pojmu *času* do předcházejícího důkazu omluviti, poněvadž se na obraty v řeči od něho odvozené nezakládá žádný závěrek, kterýž by neplatil i bez něho. Nižádným spůsobem nelze však považovati znázornění pomocí *pohybu* tělesa ku konci podané za více, nežli za pouhý *příklad,* kterýž větu sám nedokazuje, ba jí teprva má býti dokázán.

a) Přidržme se tedy, vynechavše tento případ, jen ostatního rozumování. Poznamenejme *napřed,* že v něm jest za základ položen nepravý pojem *spojitosti.* Dle *pravého výkladu* se totiž výrokem, že *funkce fx pro všechny hodnoty x, ležící vně nebo krom jistých mezí,*[14]) *mění se dle zákona spojitosti,* rozumí jen tolik, že *když x značí nějakou hodnotu takovou, rozdíl $f(x+\omega)-fx$ možná učiniti menším nežli každou danou hodnotu, možná-li jen dosaditi za ω hodnotu tak malou, jak vůbec libo,* nebo jestli (podlé označení v §. 14. pojednání „Der binomische Lehrsatz", Prag, 1816, zvoleného) $f(x+\omega)=fx+\Omega$.[15]) Že však spojitá funkce, jak se v tomto důkazu předpokládá, nikdy nedosáhne vyšší hodnoty, pokud neproběhla všechny nižší, t. j. že $f(x+n\Delta x)$ dosáhnouti může každé, mezi fx a $f(x+\Delta x)$ ležící hodnoty, vezme-li se libovolně za n hodnota mezi 0 a $+1$, jest tvrzení zcela *pravdivé,* avšak nemůže býti *výkladem* pojmu spojitosti, nýbrž jest spíše *poučkou* o ní platící a sice takovou, již možná dokázati teprva po kladení věty, k jejímuž důkazu se jí má užíti. Nebo značí-li M nějakou mezi fx a $f(x+\Delta x)$ ležící veličinu, jest tvrzení, že jest nějaká mezi 0 a $+1$ ležící hodnota n, takže $f(x+n\Delta x)=M$, jen zvláštní případ všeobecné pravdy, že pro $fx<\varphi x$ a zároveň pro $f(x+\Delta x)>\varphi(x+\Delta x)$ jest nějaká střední hodnota $x+n\Delta x$, pro niž platí $f(x+n\Delta x)=$

---

[14]) Jsouť funkce, kteréž pro *všechny* hodnoty svých kořenů jsou spojitě proměnné, jako na př. $\alpha x+\beta x$. Avšak jsou též funkce, kteréž se jen vně nebo krom jistých hodnot mezních řídí zákonem spojitosti. Výraz $x+\sqrt{(1-x)(2-x)}$ mění se spojitě jen pro všechny hodnoty $x<+1$ nebo $>+2$, nikoli však pro hodnoty, ležící mezi $+1$ a $+2$.

[15]) Tam značí ω neb Ω veličinu, již možná menší učiniti nežli kteroukoli danou veličinu; podlé naší symboliky jest $\lim\omega=\lim\Omega=0$. *Std.*

$\varphi(x+n\Delta x)$. Z této všeobecné pravdy plyne totiž ono tvrzení v případě zvláštním, kde přejde funkce φx ve stálou veličinu M.

b) Avšak dejme tomu, že by se tato věta dala na jiné cestě dokázati; předc by měl důkaz, jejž zkoumáme, ještě jinou chybu. Z nerovností $f\alpha > \varphi\alpha$ a $f\beta < \varphi\beta$ následovalo by jenom, značí-li u nějakou mezi α a β ležící hodnotu, pro níž $\varphi u > \varphi\alpha$, ale $< \varphi\beta$, že fx nežli přejde $f\alpha$ v $f\beta$ t. j. pro *nějaké* x mezi α a β ležící též $= \varphi u$. Stane-li se to při *téže* hodnotě x, kteráž $= u$, t. j. (poněvadž u značiti může libovolnou hodnotu mezi α a β ležící, kteráž spůsobuje $\varphi u > \varphi\alpha$ a $< \varphi\beta$) vyskytuje-li se mezi α a β nějaká hodnota x, pro niž *obě* funkce fx a φx sobě se rovnají: to by předce z toho vždy nenásledovalo.

c) Klamná stránka celého důkazu se zakládá vůbec na vměšování pojmu *času*. Nebo vynechá-li se, jde na jevo ihned, že důkaz není ničím jiným nežli opakováním dokazované věty jinými slovy. Řekne-li se totiž, že funkce fx, nežli přejde ze stavu menší hodnoty do stavu větší hodnoty, musí napřed projíti stavem hodnoty s φx stejné, znamená bez pojmu času, že mezi hodnotami, jichž dosahuje fx, dosadíme-li za x každou libovolnou hodnotu mezi α a β ležící, též jest hodnota jedna, jíž se stane $fx = \varphi x$; což jest věta, již chceme dokázati.

III. Jiní dokazují naši větu, užívajíce následující, buď bez důkazu dané nebo podepřené jen na některé příklady z geometrie vzaté: *„Každá proměnná veličina může ze stavu positivního přejíti do stavu negativního pouze skrze hodnotu nullu nebo nekonečnou.“* A poněvadž výsledek rovnice při konečné hodnotě kořene nemůže býti *nekonečně velkým:* tedy musí, jakož soudí, onen přechod díti se nullou.

a) Odloučíme-li od oné věty nevlastní představu *přechodu* kteráž obsahuje pojem *času* a *prostoru*, čímž od sebe odpadne nepřiměřený výraz *stavu nejsoucnosti:* přijdeme konečně k větě této: *Stane-li se proměnná veličina, závislá na jiné proměnné x, pro $x = \alpha$ kladnou, pro $x = \beta$ zápornou: jest vždy pro x hodnota mezi α a β ležící, kterouž se stane nullou nebo kterouž se stane nekonečnou.* A tu pozná zajisté každý, že tvrzení takto složené není žádnou pravdou základní, nýbrž musí býti dokázáno, a že však důkaz jeho sotva bude jednodušší nežli důkaz věty samy, k vůli níž se pronáší.

b) Ba při vyšetření přesnějším se ukazuje, že jest vlastně s ním *totožnou*. Neb nesmí se přehlédnouti, že toto tvrzení jest jenom tehdáž pravdivé, vztahuje-li se jen k veličinám *nepřetržitě proměnným.*[16]) Podle toho má na př. funkce $x+\sqrt{(x-2)(x+1)}$ pro $x=+2$ sice hodnotu *kladnou*, pro $x=-1$ pak *zápornou;* avšak jelikož se v těchto mezích nemění podlé zákona spojitosti, není pro x v mezích $+2$ a -1 hodnoty, pro kterou by se stala nullou nebo nekonečnou. Obmezíme-li pak ono tvrzení na veličiny nepřetržitě proměnné, musíme vyloučiti funkce, kteréž se pro jistou hodnotu kořene stávají nekonečnými. Neb taková funkce, jako $\frac{a}{b-x}$, není vlastně pro všechny hodnoty x, nýbrž jen pro $>$ neb $<b$ spojitou. Nebo pro hodnotu $x=b$ neobdrží žádné určité hodnoty, nýbrž stane se prostě *nekonečně velkou.* Nelze tedy ani tvrditi, že hodnoty pro $x=b+\omega$, jež jsou vesměs *určity,* mohou se libovolně přiblížiti hodnotě pro $x=b$ plynoucí. A to patří ku pojmu spojitosti (II. *a*). Spojíme-li s předešlým tvrzením ještě pojem spojitosti a vynecháme-li případ, kde stane se *nekonečně velkou,* promění se slovně u větu, již by třeba bylo teprva dokázati, že totiž každá spojitě proměnná funkce *x,* která pro $x=\alpha$ stane se *kladnou,* pro $x=\beta$ *zápornou,* pro nějakou mezi α a β ležící hodnotu přejde v nullu.

IV. Na jistém místě se čte tato věta: „*Poněvadž fx jest pro $x=\alpha$ kladné, pro $x=\beta$ záporné, musí mezi α a β býti dvě hodnoty a, b, pro něž se děje tento přechod z kladných hodnot fx k záporným a sice tak, že mezi a, b nepřipadá žádná hodnota x, pro kterouž by fx ještě bylo kladné nebo záporné*“ atd. — Omyl

---

[16]) Bolzano rozeznává dvojího druhu proměnné veličiny, jež jmenuje „frei veränderlich“, pokud mohou nabýti všech mezi dvěma veličinami ležících hodnot, a „stetig veränderlich“, pokud v okolí jisté hodnoty vzdalují se od ní tak málo, jak jen libo. Tyto slují nyní dle G. Cantora (Mathem. Ann. Bd. XV. pag. 2.) *v mezích a, b „überall-dicht“*, podlé du Bois-Reymonda (l. c. pag. 287) *„pantachisch“ vertheilt.* *Std.*

tento sotva nutno vyvraceti a neuváděl by se ani zde, kdyby nesloužil za příklad, jak nejasné jsou o tomto předmětu pojmy mnohých i na slovo vzatých mathematiků. Vždyť se ví dobře, že mezi dvěma sebe bližšími hodnotami *neodvisle proměnné veličiny*, jakouž jest kořen x nějaké funkce, vždy ještě nekonečně mnoho *středních* hodnot existuje, a že žádná nepřetržitá funkce nemá žádného *posledního* x, kterým by se stala kladnou a žádného *prvního* x, které by ji učinilo zápornou, a tedy žádného takového a a b, jak se zde vypisuje.

V. Že se nepodařilo větu, o níž jednáme, *bezprostředně* dokázati, vedlo ku pokusu, aby se odvodila z druhé věty svrchu jmenované, totiž z *rozložitelnosti každé funkce v určité činitele.* A není též pochybnosti, připustí-li se druhá, že první se z ní může odvozovati. Ale tu vadí okolnost, že takovéto odvození není žádným vědeckým *odůvodněním*, jelikož druhá věta patrně obsahuje mnohem *složitější* pravdu, nežli předložená první; pročež možná též tuto zakládati na první, nikoli však naopak. A skutečně se nepodařilo nikomu dokázati tuto větu bez oné.[17]) Co se týče důkazů, jichž nesprávnost již p. *Gauss* ve svém pojednání z roku 1799 ukázal, o těch není třeba vykládati, zdali spočívají na větě naší čili nic, jelikož byly již co nesprávné objeveny. Důkaz p. *La Place-a* [18]) má taktéž své chyby, jež nemusíme však tuto vykládati, poněvadž se výslovně zakládá na větě naší. A taktéž není třeba zřetel míti ku *prvnímu* důkazu p. *Gausse*, poněvadž se opírá o geometrické výzkumy. Ostatně bylo by snadno i dokázati, že i v něm se mlčky naše věta předpokládá, jelikož geometrické výzkumy, jež se v něm provádějí, zcela se podobají těm, jež jsme v č. I. uvedli. — Zbývá tedy jen p. *Gausse* Demonstratio nova altera a tertia. První se odvolává zřejmě k naší větě, jelikož na str. 30. předpokládá: æquationem ordinis imparis certo solubilem esse, což jest tvrzení, jež není ničím jiným nežli snadným výsledkem naší věty. Méně jasně se jeví v „Demonstratio nova *tertia*“, že vyplývá z věty naší. Zakládáť se mezi jiným na této poučce:

---

[17]) Viz poznámku 1.

[18] Journal de l'École normale, neb La Croix Traité du calcul diff. et int. T. I. n° 162, 163.

Zůstane-li funkce pro všechny hodnoty proměnné veličiny x, které leží mezi α a β, stále positivní, tedy má její integrál tak volený, že pro $x = \alpha$ zmizí a že v něm pak se $x = \beta$ položí, hodnotu positivní. V důkaze, jejž *La Grange*[19]) pro tuto větu podal, neshledává se sice zřetelného odvolání k větě naší. Avšak tento důkaz La Grange-ův má též mezeru. Vyžadujeť se v něm, aby se i učinilo tak malým, aby

$$\frac{f(x+i)-fx}{i}-f'x<$$

$$<\frac{f'x+f'(x+i)+f'(x+2i)+\ldots+f'(x+\overline{n-1}i)}{n},$$

při čemž součin $i.n$ se má rovnati *dané* veličině a známé označení $f'x$ představuje první derivaci funkce fx. A tu nastává otázka, zdali možná též vyhověti tomuto požadavku? Čím menší jest i, aby se rozdíl $\frac{f(x+i)-fx}{i}-f'x$ umenšil, tím větší musí býti n co *dělitel* výrazu na pravé straně, má-li se $i.n$ stále rovnati dané veličině. Množství členů se sice v čitateli zvětšuje; jestli však toto rozmnožení v stejném poměru zvětšuje čitatele, v jakém roste jmenovatel, jestli se hodnota celého zlomku zmenšením veličiny i snad tak značně neb ještě značněji zmenší jako výraz $\frac{f(x+i)-fx}{i}-f'x$, to ještě jest dokázati. Aby se mezera tato vyplnila, bude nutno se odvolati k naší předložené větě, jelikož jsme se k ní táhnouti musili při důkazu věty La Grange-ově příbuzné, avšak mnohem jednodušší.[20])

Tak nedostatečné jsou tedy všechny dosavadní důkazy věty v nadpisu tohoto pojednání jmenované. Důkaz však, jejž tuto učencům předkládám ku posouzení, neobsahuje, jak si lichotím, pouhé *na jisto postavení*, nýbrž *objektivní odůvodnění* pravdy dokázánu býti mající, což znamená, že jest ryze vědecký. [21])

---

[19]) Leçons sur le Calcul des fonctions. Nouvelle Edition, Paris, 1806. Leç. 9. pg. 89.

[20]) Totiž věty §. 29. v pojednání „Der binomische Lehrsatz u. s. w.“

[21]) Nechť se však neočekává, že zde se přidržím *všech* pravidel, jež jsem

Krátký přehled postupu, jakýmž se béře, jest tento: Pravda, již jest dokázati, že mezi dvěma hodnotami α a β, poskytujícími opačně označené výsledky, leží vždy nejméně jeden realný kořen, zakládá se patrně na pravdě *všeobecnější*, že jsou-li dvě spojité funkce proměnné x, fx a φx takové, že pro $x = \alpha$ platí $f\alpha < \varphi\alpha$, pro $x = \beta$ pak $f\beta > \varphi\beta$, vždy existuje nějaká, mezi α a β ležící hodnota veličiny x, pro niž $fx = \varphi x$. Avšak platí-li $f\alpha < \varphi\alpha$, musí podlé zákona spojitosti též $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$, vezme-li se jen dostatečně malé i. Vlastnost funkce $f(\alpha + i)$, že jest *menší*, přísluší funkci veličiny i pro všechny hodnoty, které jsou menší nežli jistá hodnota. Avšak tato vlastnost jí nepřináleží pro *všechny* hodnoty i bez obmezení, zejména vyloučeno jest $i = \beta - \alpha$, jelikož $f\beta > \varphi\beta$. Platí však *poučka:* přísluší-li nějaká vlastnost M všem hodnotám proměnné veličiny i, kteréž jsou menší nežli jistá hodnota daná, nikoli však *všem vůbec*, jest vždy nějaká největší hodnota u, o níž možná tvrditi, že všechny $i < u$ mají vlastnost M. Pro tuto hodnotu veličiny i samu nemůže tedy $f(\alpha + u) < \varphi(\alpha + u)$ býti, poněvadž by podlé zákona spojitosti též platilo $f(\alpha + u + \omega) < \varphi(\alpha + u + \omega)$, vezme-li se ω jen dosti malé. A tedy by nebylo pravda, že u jest největší hodnota, o níž platí, že všechny pod ní stojící hodnoty veličiny i spůsobují $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$, nýbrž bylo by $u + \omega$ větší hodnotou, o níž by tože platilo. Tím méně však může býti $f(\alpha + u) > \varphi(\alpha + u)$, poněvadž by pak i $f(\alpha + u - \omega) > \varphi(\alpha + u - \omega)$, vezme-li se ω jen dosti malé; a tedy by nebylo pravda, že pro všechny hodnoty $i < u$ platí $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$. I musí tedy býti $f(\alpha + u) = \varphi(\alpha + u)$, t. j. mezi α a β leží hodnota x, totiž $\alpha + u$, pro niž funkce fx a φx se sobě rovnají. Jednáť se jen ještě o důkaz zmíněné poučky. Kterouž

---

v pojednání „Beiträge zu einer begründeteren u. s. w. (II. Abth.)“ pro sestavení *ryze vědeckého výkladu* sám vytknul. Neb ačkoli jsem o správnosti těchto pravidel zcela přesvědčen, jest předc jich šetření jedině tam možné, kde se výklad nějaké vědy *prvními* pojmy a větami začíná, nikoli však tam, kde se jedná jen o některých poučkách jejich, z celku vyňatých, jakož se děje tuto. Poznamenání toto vztahuje se, jak se samo sebou rozumí, též ku pojednání „Der binomische Lehrsatz“.

odůvodníme, ukážeme-li, že hodnoty *i*, o nichž možná tvrditi, že všechny menší mají vlastnost *M*, a pak hodnoty, o nichž tvrzení takové neplatí, mohou se sblížiti tak sobě, jak jen libo; z čehož plyne pro každého, kdož má pravý pojem o *veličině*, že mysliti si *i*, kteréž největší jest z těch, o nichž možná tvrditi, že všechny pod ním stojící mají vlastnost *M*, znamená *mysliti si realnou*, t. j. *skutečnou* veličinu.

Nežli skončím tuto předmluvu, budiž mi ještě dovoleno vyznání a prosba, vztahující se nejenom ke spisu *tomuto*, nýbrž ke všem spisům mým a dá-li Bůh, i k *budoucím*.

Již z toho, co *dosud* uveřejněno bylo, zejména pak z obrysu *nové logiky*, jejž obsahuje první sešit mých „Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik" a sice v druhém oddělení s nadpisem „über die mathematische Methode", mohl pozorný čtenář seznati, že mám jisté náhledy, kteréž by *všechny ryze aprioristické vědy úplně přetvořily*, neshledají-li se býti zcela nesprávnými. Největší a nejdůležitější část těchto náhledů zkoumal jsem již po dlouhou dobu a se vší nepředpojatostí, takže není příliš záhy, mluvím-li nyní již o nich něco zřejměji. Náhledy, vztahující se k celému objemu jedné nebo více věd, mohou se dvojím spůsobem uvésti ve známost, a sice tím, že se buď najednou a souvisle nebo částečně a v jednotlivých pojednáních vyloží. *První* spůsob byl dosud nejobyčejnějším, an jest bez pochyby též cestou, jíž musí voliti každý, komu se o to jedná, aby v nejkratší době přišel k velké vážnosti při učené části svých současníků. Pro zdokonalení věd zdá se mi však *druhý* spůsob mnohem býti příhodnějším a sice z důvodů těchto:

Především se tímto spůsobem objevitel nových náhledů nejméně vydává do nebezpečenství, že se ukvapí, jelikož částečný výklad jeho mínění mu dovoluje vyjádření o takových věcech, o nichž sám byl s počátku v pochybnosti, pošinouti na pozdější dobu, přiučiti se pak z posudků, jež dosavadní jeho výklady stihnou, a opraviti konečně mnohou věc nesprávně dříve vyloženou.

Dále možná při takovémto částečném vyvinování svých náhledů očekávati, že čtenář je mnohem přísněji prozkoumá. Neb kdo vystoupí se soustavou již hotovou, poskytuje pozornosti našeho ducha najednou příliš veliký počet nových tvrzení, takže nelze doufati, že bychom každou z nich prozkoumali s touže přesností, jako kdyby nám jednotlivě se předkládaly. Kdo přednáší úplnou soustavu náukovou, ukazuje nebo má alespoň ukázati, jak možná vyvésti z jeho *odchylných* vět předních ony pravdy, jež zdravý rozum lidský poznává s nepopíratelnou bezpečností. Avšak právě to smiřuje nás s oněmi větami předními a jest příčinou, že mu je připouštíme s menší pochybností nežli kdyby je byl podal jednotlivě a nás v pochybnostech nechal vězeti, jestli a jak se snášejí se vším ostatním, co nám jest pravdou. Konečně nelze též popříti, že pouhý pohled na *tlustou knihu*, kteráž slibuje úplnou soustavu té neb oné vědy, vzbuzuje v nás jistý druh bázně, nežli jsme ji ještě přečetli. Nalezneme-li pak při čtení samém nějakou souvislost v její tvrzeních; má-li budova lidského vědění, jež se tu v obryse předkládá, líbeznou formu; jestli všechno založeno dle míry, počtu a souměrnosti: tedy se úsudek náš předpojímá a počínáme si přáti, aby zde konečně obsažena byla *ona jedině pravá soustava*, již tak dlouho jsme hledali! A tu jest to nejmenší, co následuje, že se totiž domníváme, že pro zpozorovanou souvislost jest nám volno buď celek přijmouti nebo zavrhnouti, ač by skutečně ani to ani ono se nemělo státi.

Toť asi byly důvody, pro které jsem již r. 1804 si předsevzal, že v žádné vědě nepočnu s vydáváním *úplné soustavy*, nýbrž jen v jednotlivých pojednáních o každé uveřejním od obyčejných pojmů odchylné své mínění. A teprva když by toto nalezlo po opětné opravě pochvaly u části obecenstva, má se pomýšleti na vypracování celých soustav, nekáže-li smrt, abychom úlohu tuto přenechali jiným.

I počal jsem tedy svou činnost spisovatelskou pojednáním mathematiky se týkajícím a vyložil jsem pod nápisem „Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie“ (Prag, bey C. Barth, 1804), mimo některé jiné náhledy též *novou náuku o přímkách rovnoběžkách.* [22]) Několik let později jsem se od-

[22]) Tato theorie zasluhovala by pozornosti aspoň z dvou důvodů: *pře-*

hodlal vydati v sešitech veškeré své do oboru mathematiky připadající náhledy pod nápisem „*Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*". Ale hned první z těchto sešitů (Prag, bey C. Widtmann, 1810) stihla přes veškeru důležitost obsahu nehoda, že v některých vědeckých časopisech vůbec nebyl ohlášen, v jiných pak jen povrchně uveden a posouzen. Což mne přinutilo pokračování těchto příspěvků odložiti na dobu pozdější a mezitím učiniti pokus, zdali by se mi snad nepodařilo státi se učenému světu známějším a to vydáním nějakých pojednání, která by již titulem svým pozornost k sobě obracela. K tomuto cíli vyšel r. 1816 dříve již uvedený „*Binomischer Lehrsatz*" u. s. w. (Prag, bey Enders). K témuž cíli má dle přání mého sloužiti též předložené pojednání, jehož vydání stalo se mimo to i nutným, jelikož se ku poučce v něm dokázané odvolávám již v pojednání dřívějším. Některá *jiná* pojednání, kteráž jsou taktéž k tisku připravena, hledají ještě nakladatele, jako na př. jedno s nápisem: „*Die drei Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes, und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst.*"

Abych mohl pokračovati na této dráze, která se mi vidí býti nejprospěšnější, záleží jedině na *přízni* obecenstva, o niž mi jest *prositi*, a na tom, aby se tato jednotlivá pojednání pro jich skrovnější objem nepřehlédla, nýbrž se vší možnou přísností zkoumala a výsledky tohoto prozkoumání pak do veřejnosti daly, aby se pak jasněji vyjádřilo, co snad jest řečeno nejasně, a odvolalo, co zcela jest nesprávné, pravdivé a správné však aby čím dříve tím lépe všeobecně se ujalo.

---

devším že jest jediná, jíž se patrná vada dokázati nedala, *dále* pak, že největší nyní žijící geometr Francie, *Legendre v desátém* vydání svých „Elémens de Géometrie", Paris, 1813, zajisté zcela neodvisle ode mne připadl na totožné o těchto věcech mínění.

§. 1.

P ř e d b ě ž n á p o u č k a. Nevyskytuje-li se *u řady veličin* zvláštní případ, že počínajíc jistým členem všechny ostatní jednotlivě jsou *nullou*, jakož se děje na př. u *řady binomialní* pro každého kladného a celistvého lomitele n po členu $(n+1)$ ním: jest jasno, že *hodnota řady této*, t. j. veličina, jež povstává sečtením jejích členů, nemůže zůstati táž, množí-li se počet členů dle libosti. Zvláště pak se musí tato hodnota pokaždé změniti, zvětší-li se počet členů o *jeden*, kterýž není nullou. Hodnota řady závisí tedy vedlé *zákona*, jímž se řídí vývoj jednotlivých členů, též na *počtu* jejich, takže představuje i při nezměněné podobě a velikosti jednotlivých členů veličinu *proměnnou*. Podlé toho označujeme funkci x, skládající se z libovolně rozmnožitelné *řady* členů a jejíž hodnota závisí na x a na počtu jejích členů r, znakem $\overset{r}{F}(x)$ nebo $\overset{r}{F}x$. I jest tedy na př.

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots + Rx^r = \overset{r}{F}x,$$

naproti tomu

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots + Rx^r + \ldots + Sx^{r+s} = \overset{(r+s)}{F}x.$$

§. 2.

D o d a t e k 1. *Změna hodnoty*, t. j. přibývá-li neb ubývá-li hodnoty řady rozmnožením jejích členů o *určité* množství, na př. o jeden, může dle okolností býti buď veličinou *stálou* (jsou-li totiž členové řady stejní) nebo *proměnnou*, a v tomto případě buď veličinou, které někdy přibývá, někdy ubývá, nebo která stále roste anebo které stále ubývá. Podle toho jest změna, jíž podléhá řada

$$1 + 1 + 1 + 1 + \ldots,$$

rozmnoží-li se počet členů o *jeden*, veličinou *stálou*; změna, jíž podléhá řada

$$a + ae + ae^2 + ae^3 + \dots$$

rozmnožením členů o *jeden*, jest veličinou *proměnnou*, není-li snad $e = 1$, stává se vždy *větší*, je-li $e > \pm 1$, a vždy *menší*, je-li $e < \pm 1$.

§. 3.

Dodatek 2. Zůstane-li změna hodnoty (přibývá-li neb ubývá-li jí), jíž podléhá řada rozmnožením množství členů o určitý počet (na př. o jeden), vždy *stejně velikou* anebo stává-li se *větší* a má-li v obou případech též *stejné označení*, jest patrno, že hodnota řady této může se státi *větší nežli jest kterákoli daná veličina*, jen když se smí dosti daleko rozšířiti. Neb dejme tomu, že přírůstek, jehož se dostane řadě rozmnožením o n členů, buď $=$ neb $> d$, a má-li se řada státi tak velkou, že převyšuje danou hodnotu D: zvolme celistvé číslo r, kteréž $=$ neb $> \frac{D}{d}$ a rozmnožme řadu o $r.n$ členů, načež dosáhne přírůstku, kterýž buď $=$ nebo $>$ ($r.d$ nebo $> \frac{D}{d} d = D$).

§. 4.

Dodatek 3. Naproti tomu jsou též řady, jichž hodnota, nechť se rozšíří jakkoli, *nikdy nepřesáhne jistou veličinu*. Tako vého rázu jest řada

$$a - a + a - a + \dots,$$

jejíž hodnota jest vždy buď 0 nebo a [23]) a tedy veličinu a nikdy nepřekročí, nechť se rozšíří jakkoli.

---

[23]) Příklad tento není zcela vhodně volený, jelikož tu představuje se řada zvláštního rázu, ana v novějších dobách sluje *oscillující* nebo *kolísavou*; vhodnější byla by aspoň v určitém smyslu geometrická řada

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots,$$

jejíž hodnota čili součet nikdy nepřesáhne 1. *Std.*

§. 5.

Dodatek 4. Mezi těmito vyniká zvláště třída takových řad, které mají tu vlastnost, že *změna* (přírůstek neb úbytek), jíž podlehne rozmnožováním členů sebe dále vedeným, vždy *menší* zůstává nežli jistá veličina, kteráž může se zvoliti tak *malou*, jak se *právě chce*, jen když se před tím řada dostatečně daleko rozšířila. Že jsou takové řady, dokazují na př. všechny, u nichž členové, od jistého místa počínajíc, jsou vesměs *nullou*, takže vlastně *přes* tento člen dále nesahajíce nepodléhají pak žádné změně hodnoty, jako *řada binomialní* v §. 1.; téhož rázu jsou též všechny řady, jichž členové se buď tak neb ještě více menší nežli členové *geometrické posloupnosti*, jejíž exponent (poměr) jest ryzým zlomkem. Neb hodnota geometrické řady

$$a + ae + ae^2 + \ldots + ae^r$$

jest, jakož známo,

$$= a\frac{1 - e^{r+1}}{1 - e}.$$

Prodlouží-li se však tato řada ještě o s členů, tedy jest přírůstek její

$$ae^{r+1} + ae^{r+2} + ae^{r+3} + \ldots + ae^{r+s} = ae^{r+1}\frac{1 - e^s}{1 - e}.$$

Jestli tedy $e < \pm 1$ a vezme-li se dostatečně velké r, zůstane přírůstek tento menší nežli každá veličina daná, nechť se vezme pak s jakkoli veliké. Nebo jelikož e^s zůstane vždy $< \pm 1$, tedy jest

$$ae^{r+1}\frac{1 - e^s}{1 - e} \text{ menší nežli } ae^{r+1}\frac{2}{1 - e}.$$

Tato veličina může se zvětšováním r státi menší nežli každá zvolená, jelikož hodnota pro r nejblíže vyšší plynoucí povstává z předcházející násobením ryzím a stálým zlomkem e. (Viz „Der binomische Lehrsatz, §. 22.). Možná tedy každou geometrickou řadu, jejíž exponent jest ryzí zlomek, tak daleko rozšířiti, že přírůstek, povstávající jakýmkoli dalším rozmnožením členů, zůstává menším nežli kterákoli daná veličina. Což tím spíše platí o řadě, jejíž členové rychleji se menší nežli se děje u klesající posloupnosti geometrické.

§. 6.

Dodatek 5. Označíme-li hodnotu, jíž dosáhne součet prvních

$$n,\ n+1,\ n+2,\ \ldots,\ n+r$$

členů řady s §. 5. souhlasné, postupně symbolem (§. 1.)

$$\overset{n}{F}x,\ \overset{n+1}{F}x,\ \overset{n+2}{F}x,\ \ldots,\ \overset{n+r}{F}x,$$

představují veličiny

$$\overset{1}{F}x,\ \overset{2}{F}x,\ \overset{3}{F}x,\ \ldots,\ \overset{n}{F}x,\ \ldots,\ \overset{n+r}{F}x,\ \ldots$$

novou řadu (*součtovou* čili *summatorickou* předešlé). Dle podmínky vyšetřené má tato řada i tu zvláštní vlastnost, že rozdíl mezi jejím členem n-tým $\overset{n}{F}x$ a každým následujícím $\overset{n+r}{F}x$, nechť jest jakkoli od tohoto n-tého vzdálen, zůstává menším nežli každá veličina daná, zvolí-li se napřed jen dosti veliké n. Tento rozdíl jest totiž *přírůstek*, jejž udělíme *původní* řadě rozmnožením členů přes člen n-tý; a tento přírůstek má dle předcházejícího tak malým zůstati, jak je libo, jen když se n zvolí dostatečně veliké.

§. 7.

Poučka. Jestli v řadě hodnot

$$\overset{1}{F}x,\ \overset{2}{F}x,\ \overset{3}{F}x,\ \ldots,\ \overset{n}{F}x,\ \ldots,\ \overset{n+r}{F}x,\ \ldots$$

rozdíl mezi n-tým členem $\overset{n}{F}x$ a každým pozdějším $\overset{n+r}{F}x$ sebe vzdálenějším od něho menší nežli každá veličina daná, jest vždy určitá *stálá* veličina, jíž se členové této řady vždy více blíží a jíž se mohou tak přiblížiti, jak jen libo, prodlouží-li se řada dosti daleko.[24])

Důkaz. Že jest možnou taková řada, jak jí vyžaduje poučka, vysvítá z §. 6. Abychom však připustili, že jest veličina

---

[24]) Zde zavádí se patrně pojem *meze* čili *limity*, jenž v naší algebraické analysi hrají úkol tak důležitý a jehož symbolem jest *lim.* — Poučku tuto nově vyvinuje *Hankel*, neznaje patrně této práce Bolzanovy, ač jiné jeho výklady chválí. *Std.*

X, jíž se členové řady této při stále postupujícím rozšiřování tak blíží, jak se chce, neobsahuje zajisté též nic nemožného, nepředpokládá-li se jen, že tato veličina jest *jedinou* a *neproměnnou*. Neb má-li to býti veličina, která se smí měniti, tedy se arci bude moci vždy tak zvoliti, že se členu s ní porovnanému značně přiblíží, ba s ním stane se stejnou. Předpokládáme-li však *neproměnnou* veličinu, kteráž má tuto vlastnost přibližovati se členům naší řady, nežádáme nic nemožného, což plyne z toho, že v případě tomto jest možná tuto veličinu určiti tak přesně jak jen libo. Neb dejme tomu, že by se mělo X tak určiti, aby rozdíl mezi zvolenou a pravou hodnotou X nepřesahoval sebe menší danou veličinu d; tedy vyhledejme v dané řadě takový člen $\overset{n}{F}x$, že každý následující $\overset{n+r}{F}x$ se od něho liší o méně nežli $\pm d$. A takové $\overset{n}{F}x$ musí dle předešlého existovati. I pravím tedy, že hodnota $\overset{n}{F}x$ liší se od pravé hodnoty X nanejvýš o $\pm d$. Nebo zvětšujeme-li r při stejném n dle libosti, musí rozdíl

$$X - \overset{n}{F}x = \pm \omega$$

zmenšitelným býti dle libosti. Avšak rozdíl

$$\overset{n}{F}x - \overset{n+r}{F}x$$

zůstává $< \pm d$, nechť jest r sebe větší. Musí tedy býti vždy i rozdíl

$$X - \overset{n}{F}x = (X - \overset{n+r}{F}x) - (\overset{n}{F}x - \overset{n+r}{F}x) < \pm (d + \omega).$$

Poněvadž tento rozdíl při stejném n jest veličinou *stálou*, zvětšováním r však může ω státi se malým, jak libo; tedy musí býti rozdíl

$$X - \overset{n}{F}x = \text{neb} < \pm d.$$

Nebo kdyby byl *větší* na př. $= \pm (d + e)$, nemohl by poměr $d + e < d + \omega$, t. j. $e < \omega$ trvati, když by se ω stále zmenšovalo. Pravá hodnota X liší se tedy od hodnoty členu $\overset{n}{F}x$ nanejvýš o d, a dá se tedy libovolně přesně určiti, jelikož možná d libovolně malým učiniti. I *jest* tedy *realní veličina*, jíž se členové naší řady tak přibližují, jak se toho žádá, jen když se dostatečně daleko prodlouží. Avšak jest jenom *jediná* veličina taková. Nebo dejme tomu, že by vedlé X ještě jiná *stálá* veličina Y existovala, jíž by se členové řady tak blížily, jak by libo bylo, jen když by dosti daleko se prodloužila: musili by rozdílové

$$X - \overset{n+r}{F}x = \omega, \quad Y - \overset{n+r}{F}x = \omega'$$

tak zmenšitelnými býti, jak by libo bylo, jen když by r dostatečně se zvětšilo. Totéž by musilo platiti též o jich vlastním rozdílu, t. j. o

$$X - Y = \omega - \omega';$$

což není možná, značí-li X a Y veličiny *stálé* a není-li současně $X = Y$.

§. 8.

Poznamenání. Snažíme-li se hodnotu X určiti spůsobem v předcházejícím §. provedeným, totiž pomocí nějakého členu, z nichž se řada sama skládá, neurčíme X nikdy zcela *určitě*, nejsou-li členové této řady, od jistého počínajíc, vesměs sobě rovni. Z toho však nesmí se zavírati, že musí tu X býti vždy *irracionalní*. Nebo předložena-li řada

$$0{\cdot}1,\ 0{\cdot}11,\ 0{\cdot}111,\ 0{\cdot}1111\ldots$$

(kteráž jest řadou součtovou geometrické posloupnosti

$$\frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{10000},\ldots)$$

nebyla by veličina, jíž se její členové libovolně blíží, irracionalní, nýbrž zlomkem $\frac{1}{9}$. Z toho totiž, že se nějaká veličina na *určité cestě jedné* nedá zcela přesně ustanoviti, nenásleduje ještě, že není na *jiné* cestě možná ji určiti, a že tedy jest *irracionalní.*

§. 9.

Dodatek. Má-li tedy nějaká daná řada tu vlastnost, že každý její člen jednotlivý jest *konečný,* změna však, jíž podléhá rozšířením sebe větším, stává se menší nežli každá veličina daná, jen když se počet jejích členů učiní dosti velikým: vyskytuje se vždy jedna a sice jen jedna *veličina stálá,* jíž se hodnota této řady tak blíží, jak libo, jen když se dosti daleko prodlouží. Neb řada taková má ráz v §. 5. vyložený a činí tedy hodnoty, jichž dosahují součty n, $n+1$, ... členů, řadu rázu, vyloženého v §§. 6. a 7.; i mají tedy též vlastnost v §. 7. dokázanou.

§. 10.

Poznamenání. Nechť se však nesoudí, že v předcházející větě §. 9. jest zbytečnou podmínka: *že změna* (přírůstek neb úbytek), *jíž podlehá řada kterýmkoli prodloužením, musí zmenšitelná býti pod každou danou veličinu, když byla před tím dosti daleko prodloužena,* a že by snad věta se dala s větší všeobecností vyjádřiti takto: *Mohou-li se členové nějaké řady jejím prodloužením státi vždy menšími a tak malými, jak libo, jest vždy veličina stálá, jíž se hodnota řady blíží dalším prodloužením tak velice, jak se vůbec chce.*" Toto tvrzení by se vyvrátilo ihned příkladem tímto:

Členové řady

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots$$

mohou státi se tak malými, jak jen libo; a předc odvozuje se pravda ze známé vlastnosti hyperboly rovnoramenné (avšak odvoditelná i z ryze arithmetických výzkumů), že hodnota řady této větší se může státi nežli každá veličina daná, jen když se dosti daleko prodlouží.[25])

§. 11.

Připomenutí. U vyšetřováních mathematiky upotřebené stává se často, že se vyskytne *proměnná veličina* x, jíž přísluší pro *všechny* hodnoty, menší jsoucí nežli u, jistá vlast-

---

[25]) V nauce o řadách konvergentních neboli sbíhavých se nyní vyjadřuje vlastnost tato poučkou, že u každé řady sbíhavé

$$u_1+u_2+u_3+\dots u_n+\dots$$

musí býti $\lim u_n = 0$, aniž by naopak řada, jejíž n-tý člen vyhovuje této podmínce, musila býti sbíhavou. Viz *Studnička* „Algebraické tvarosloví" pag. 105. *Std.*

nost *M*, aniž bychom zároveň se dověděli, že jí tato vlastnost nepřísluší pro hodnoty, jsoucí *větší* nežli u. V těchto případech může snad býti mnohé $u' > u$, o němž platí stejným způsobem jak o u, že všechny pod ním stojící hodnoty x mají vlastnost M, ba že snad *všem* x *bez výminky* tato vlastnost přísluší. Dozvíme-li se však *jen tolik*, že M *není všem* x *vůbec příslušné*, smíme spojením obou těchto udání zavírati, že jest jistá veličina U, kteráž jest největší z těch, o nichž může býti pravda, že všechny menší x se honosí vlastností M. Což dokazuje poučka tato.

§. 12.

Poučka. Nepřisluší-li nějaká vlastnost M *všem* hodnotám proměnné veličiny x, nýbrž jen *těm*, kteréž jsou *menší* nežli jakési u: existuje vždy veličina U, která jest největší z těch, o nichž možná tvrditi, že všechny menší x mají vlastnost M.[26])

Důkaz. 1. Poněvadž vlastnost M platí o všech x, kteréž jsou *menší* nežli u, avšak neplatí *o všech vůbec*, jest zajisté nějaká veličina $V = u + D$ (kdež značí D veličinu positivní), o níž možná tvrditi, že M nepřísluší všem $x < V = u + D$. Ptáme-li se tedy, přísluší-li M *všem* $x < u + \frac{D}{2^m}$, kdež značí m po sobě 0, 1, 2, 3 a t. d.: tedy *nutno první* z otázek těchto *záporně* vyříditi. Neb otázka, zdali M všem $x < u + \frac{D}{2^0}$ přísluší, jest totožná s otázkou, zdali M patří všem $x < u + D$, což dle předpokládání našeho nutno popříti. Jedná se tedy o to, zdali se i ostatní otázky, ku postupně vyšším hodnotám m se vztahující, mohou popříti. Kdyby to bylo možná, tedy jest jasno, že u *samo* jest největší hodnota, o níž platí tvrzení, že všechny x, *menší* jsoucí, mají vlastnost M. Nebo kdyby bylo x větší na př. $u + d$, t. j. kdyby platilo tvrzení, že též všechny $x < u + d$ mají vlastnost M: tedy jest patrno, že když m se zvolí dosti veliké, jednou bude

[26]) Tato veličina U podlé *Weierstrasse* sluje **svrchní hodnotou mezní** všech x, jimž přísluší vlastnost M. *Std.*

$$u + \frac{D}{2^m} = \text{nebo} < u + d;$$

a tedy by musilo M též příslušeti všem $x < u + \frac{D}{2^m}$, kdyby příslušelo všem $x < u + d$; a tedy by nutno bylo na mou otázku přisvědčivě, nikoli však záporně odpověděti. Jest tedy dokázáno, že v tomto případě (kde se všechny předcházející otázky poprou) jest jakási hodnota U (totiž u samo), kteráž jest největší mezi těmi, o nichž platí tvrzení, že všechny pod ní stojící x se honosí vlastností M.

2. *Přisvědčí-li se* mi však jednou k otázce předcházející a jestli m určitá hodnota mocnitele, pro kterouž se *poprvé* přisvědčí (m znamenati může též 1, nikoli však 0, jak bylo ukázáno), tedy vím, že vlastnost M přísluší všem $x < u + \frac{D}{2^m}$, nikoli však i všem $x < u + \frac{D}{2^{m-1}}$. Jest pak rozdíl mezi

$$u + \frac{D}{2^{m-1}} \text{ a } u + \frac{D}{2^m} \text{ patrně } \frac{D}{2^m}.$$

Naložíme-li pak s tímto rozdílem stejně jako s rozdílem D, t. j. ptáme-li se, přísluší-li M všem $x < u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}}$, kdež značí n po sobě 0, 1, 2 a t. d., tedy jest opětně patrno, že první otázku nutno popříti. Neb otázka, přísluší-li M všem $x < u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+0}}$ značí tože co otázka, přísluší-li M všem $x < u + \frac{D}{2^{m-1}}$, což dříve již bylo popřeno. A kdyby se podala i ke všem ostatním otázkám odpověď záporná, nechť se zvolí n postupně sebe větší, bylo by, jako před tím, patrno, že $u + \frac{D}{2^m}$ jest ona největší hodnota neb to U, o němž platí, že všechny pod ním stojící x se honosí vlastností M.

3. Přisvědčí-li se mi však k jedné z otázek předcházejících a stane-li se to při určité hodnotě n, tedy vím, že M přísluší všem

$$x < u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}}$$

nepřísluší však hodnotám

$$x < u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n-1}}.$$

Rozdíl mezi oběma veličinami těmito jest pak $\frac{D}{2^{m+n}}$; a s tímto rozdílem se dále nakládá podobně jako s rozdílem $\frac{D}{2^m}$. A t. d.

4. Postupuje-li se tímto spůsobem tak dlouho, jak libo, jde na jevo, že poslední výsledek, k němuž se konečně přijde, bude jeden z následujících dvou:

a) Buď se nalezne hodnota tvaru

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}},$$

kteráž se objeví býti největší, o níž platí tvrzení, že všechny pod ní stojící x se honosí vlastností M. Což stane se v tom případě, když se na otázku, zda-li přísluší M všem

$$x < u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r+s}},$$

pro každou hodnotu veličiny s odpoví záporně.

b) Anebo se nalezne, že M přísluší sice všem

$$x < u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}},$$

avšak nikoli všem, kteréž jsou

$$< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r-1}}.$$

Při tom jest mi pak dovoleno novými otázkami počet členů v těchto obou veličinách vždy větším učiniti.

5. Platí-li případ *první*, jest pravdivost poučky již dokázána. V případě *druhém* mějme na zřeteli, že veličina

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}}$$

představuje řadu, u níž možná počet členů libovolně rozmnožiti a jež patří do třídy řad v §. 5. vypsaných, jelikož podlé toho, značí-li m, n, ..., r vesměs 1 anebo částečně více, stejně nebo značněji jí ubývá nežli geometrické posloupnosti, jejíž exponent jest ryzí zlomek $^1/_2$. Z čehož vyplývá, že má vlastnost §. 9., t. j. že jest jistá *veličina stálá*, jíž se stává tak blízkou, jak se chce, jen když počet členů se dostatečně rozmnoží. Je-li tato veličina U, tedy tvrdím, že vlastnost M přísluší všem $x < U$. Nebo kdyby neplatila o nějakém $x < U$, na př. o $x = U - \delta$, musila by veličina

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}}$$

vždy podržeti od U vzdálenost δ, poněvadž pro všechny x, kteréž jsou menší nežli ona, má platiti vlastnost M. Neb každé

$$x = u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}} - \omega,$$

honosí se vlastností M, nechť se ω sebe více menší, ana však nemá příslušeti $x = U - \delta$, takže musí býti

$$U - \delta > u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}} - \omega$$

anebo

$$U - \left[u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}}\right] > \delta - \omega.$$

I nemohl by tedy rozdíl mezi U a řadou býti tak malým, jak libo, poněvadž nemůže $\delta - \omega$ státi se tak malým, jak se chce, jelikož se δ nemění, kdežto ω se státi může menším nežli každá veličina daná. — Taktéž nemůže M platiti o všech $x < U + \varepsilon$. Nebo poněvadž hodnota řady

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r-1}}$$

tak se přiblížiti může hodnotě řady

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}},$$

jak je právě libo, jelikož obou rozdíl činí jen $\frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}}$; poněvadž pak hodnota poslední řady přiblížiti se může k veličině U tak těsně, jak je právě libo: tedy může se hodnota první řady k hodnotě U tak blízko přivésti, jak se chce. Může tedy zcela jistě býti

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r-1}} < U + \varepsilon.$$

Avšak podlé předpokládání našeho neplatí M o všech

$$x < u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r-1}},$$

tím méně platí tedy o všech $x < U + \varepsilon$. Jest tedy U největší hodnota, o níž platí tvrzení, že všechny pod ní stojící hodnoty x se honosí vlastností M.[27])

§ 13.

Poznámka 1. Předcházející poučka jest nanejvýš důležitou a užívá se jí ve všech odvětvích mathematiky, jak v analysi, tak v upotřebení odborném, v geometrii, chronometrii a mechanice. Místo ní užívalo se dosud nezřídka nesprávné věty této: „*Neplatí-li vlastnost M o všech x vůbec, nýbrž jenom o všech, kteréž jsou menší nežli jistá veličina: jest vždy nějaké největší x, jemuž přísluší vlastnost M.*" A ta jest, pravím, podlé poučky právě dokázané nesprávnou. Neb existuje-li nějaká veličina U, kteráž jest největší mezi těmi, o nichž možná tvrditi, že všechny pod ní stojící mají vlastnost M: není právě proto určitě *největší* x, jemuž tato vlastnost přísluší, je-li jen *x volně nebo spojitě proměnnou veličinou.* Neníť, jak známo, pro veličinu volně nebo dle zákona spojitosti proměnnou nikdy hodnoty *největší*, kteráž jest menší nežli nějaká hodnota mezní U, jelikož se jí mohou vždy ještě blíže přivésti, nechť stojí sebe blíže této mezi. — Představme si, abychom věc příkladem objasnili, *pravoúhlou hyperbolu* a zvolme jednu asymptotu za osu úseček a v ní bod a, nikoli však střed c, za počáteční bod úseček, jenž má od c vzdálenost D. Prohlásíme-li pak směr úseček ac za *positivní* a směr pravoúhlé pořadnice bodu a, totiž ab taktéž za *positivní,* tedy bude o *každé* úsečce x, kteráž jest *menší* nežli jistá, na př. menší nežli $\frac{D}{2}$, platiti vlastnost, že jí *přísluší positivní pořadnice.* A předc nebude tato vlastnost

[27]) *H. A. Schwarz* vytknul prioritu Bolzanovou při vyšetření této veličiny U a ukázal, jak *Weierstrass* závěrky tyto zevšeobecnil. *Std.*

(M) platiti o *všech* positivních úsečkách, zejména neplatí o těch, jež větší jsou nežli D. Jest tu tedy největší úsečka, největší hodnota x, kteréž přísluší vlastnost M? Nikoli; však jest tu U, t. j. úsečka, kteráž jest největší mezi těmi, o nichž možná tvrditi, že všechny menší nežli ona mají positivní pořadnice, t. j. vlastnost M. Tato úsečka jest totiž $+D$.[28])

§. 14.

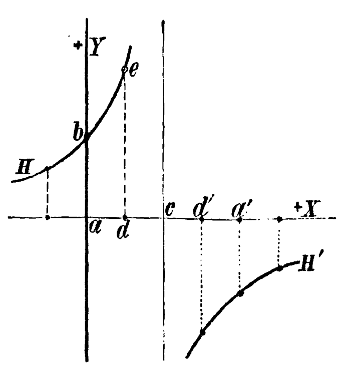
Poznámka 2. Někdo by mohl snad přijíti na myšlenku, že by důkaz poučky §. 12. mohl se zcela krátce podati takto: „Kdyby nebylo největšího U, o němž platí tvrzení, že všechny pod ním stojící x mají vlastnost M, mohlo by se zvoliti u vždy větší a větší a tedy tak velké, jak jen libo, a tedy by musilo M platiti *o všech x bez výminky.*“ — Avšak to byl by závěrek velmi pochybný, jelikož by se opíral o svrchní větu mlčky předpokládanou, *„že veličina, již možná vždy větší a větší učiniti nežli již byla učiněna, tak velkou státi se může, jak jen libo.“* — Jak nesprávný to úsudek, dokazuje na př. známá řada

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots,$$

jejíž hodnota se může státi vždy větší a větší, nežli právě již jest a kteráž předc vždy <1 zůstává! — Nebyli bychom se

---

[28]) Jest-li rovnice naší hyperboly, jejíž větve jsou H, H', $(x-D)y+1=0$ a značí-li na vedlejším obraze bod a počátek pravoúhlé soustavy souřadnicové, c střed hyperboly, takže $ac=D$, $ad=\frac{D}{2}$, ba jest pořadnicí bodu b, ed pak bodu e, poznáme ihned, že ku positivním úsečkám x, ležícím mezi hodnotami 0 a D, patří *positivní* pořadnice, kdežto pro úsečku $x>D$ stávají se pořadnice negativními. Přetržitost pro $x=D$ zde se jevící jest patrně příčinou tohoto zjevu. *Std.*



ani zmínili o bludu tak snadno pochopitelném, kdyby se ho čas od času mathematikové nedopouštěli, jakož teprva nedávno jeden učinil ve své „vollständige Theorie der Parallelen.“

§. 15.

Poučka. Mění-li se dvě funkce proměnné x, fx a φx buď pro *všechny* hodnoty veličiny x aneb aspoň pro všechny, jež leží mezi α a β, *podlé zákona spojitosti;* platí-li dále $f\alpha < \varphi\alpha$ a $f\beta > \varphi\beta$: jest vždy nějaká mezi α a β ležící hodnota x, pro niž platí $fx = \varphi x$.

Důkaz. Především nutno připomenouti, že se v této poučce mají porovnávati hodnoty funkcí fx a φx pouze dle jich *absolutní* velikosti, t. j. bez ohledu na jich označení anebo jakoby nebyly schopny protivy. Avšak rozhodné jest označení, jaké má α a β.

I. Dejme *napřed* tomu, že α i β jest *positivní* a že (což pak jest lhostejno) β jest *větší* a tedy $\beta = \alpha + i$, kdež i značí veličinu kladnou. Poněvadž $f\alpha < \varphi\alpha$, tedy bude, značí-li ω positivní veličinu, kteráž se státi může tak malou, jak jen libo, $f(\alpha + \omega) < \varphi(\alpha + \omega)$. Nebo jelikož fx a φx má se *spojitě* měniti pro všechny x, ležící mezi α a β, a $\alpha + \omega$ leží mezi α a β, jakmile jen se zvolí $\omega < i$: tedy musí býti $f(\alpha + \omega) - f\alpha$ a $\varphi(\alpha + \omega) - \varphi\alpha$ tak zmenšitelným, jak jen libo, vezme-li se ω dostatečně malé. Jest tedy, značí-li Ω a Ω' veličiny, jež možná libovolně malými učiniti,

$$f(\alpha + \omega) - f\alpha = \Omega, \quad \varphi(\alpha + \omega) - \varphi\alpha = \Omega'.$$

Z čehož plyne

$$\varphi(\alpha + \omega) - f(\alpha + \omega) = \varphi\alpha - f\alpha + \Omega' - \Omega.$$

Avšak $\varphi\alpha - f\alpha$ se dle podmínky rovná nějaké kladné veličině stálé A. I jest tedy

$$\varphi(\alpha + \omega) - f(\alpha + \omega) = A + \Omega' - \Omega,$$

což zůstane vždy *positivním*, jen když se Ω a Ω' nechá býti dosti malým, t. j. když se veličině ω udělí hodnota velmi malá, a tím spíše tedy pro všechny její hodnoty ještě menší. Možná tedy tvrditi o všech ω, které jsou *menší* nežli jistá veličina, že tyto dvě funkce $f(\alpha + \omega)$ a $\varphi(\alpha + \omega)$ se mají k sobě jako veličina menší ke větší. Označíme-li tuto vlastnost proměnné veličiny ω znakem M, tedy můžeme tvrditi, že všechny ω, jsoucí menší nežli jistá veličina, mají vlastnost M. Že však tato vlastnost nepřísluší *všem* hodnotám ω, zejména hodnotě $\omega = i$, jde z toho na jevo, že $f(\alpha + i) = f\beta$ podlé podmínky není $<$, nýbrž $> \varphi(\alpha + i) = \varphi\beta$. Podlé poučky §. 12. musí býti tedy nějaká veličina U, kteráž jest největší mezi těmi, o nichž možná tvrditi, že všechny $\omega < U$ honosí se vlastností M.

2. A toto U musí ležeti *mezi* 0 a i. Nebo nemůže *především* býti $= i$, jelikož by se tím pravilo, že každé $f(\alpha + \omega) < \varphi(\alpha + \omega)$, jakmile jen $\omega < i$, nechť se ostatně sebe více přiblíží hodnotě i. Avšak týmže spůsobem, jakým jsme právě dokázali, že s podmínkou $f\alpha < \varphi\alpha$ souvisí $f(\alpha + \omega) < \varphi(\alpha + \omega)$, jakmile se ω zvolí dosti malé, možná též dokázati, že z podmínky $f(\alpha + i) > \varphi(\alpha + i)$ plyne

$$f(\alpha + i - \omega) > \varphi(\alpha + i - \omega),$$

jakmile se jen zvolí dostatečně malé ω. Tedy není pravda, že dvě funkce fx a φx pro všechny hodnoty $x < \alpha + i$ mají se k sobě jako veličina menší ke větší. — Tím méně může *dále* býti $U > i$, jelikož by pak též i bylo jednou z hodnot $\omega < U$ a musilo tedy býti $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$, což přímo odporuje podmínce této poučky. I leží tedy U, jsouc *positivní*, jistě mezi 0 a i a tedy $\alpha + U$ mezi α a β.

3. Jedná se tedy o to, v jakém jsou k sobě poměru funkce fx a φx pro $x = \alpha + U$? *Především* nemůže býti $f(\alpha + U) < \varphi(\alpha + U)$; neb tím by dáno bylo též $f(\alpha + U + \omega) < \varphi(\alpha + U + \omega)$, když by se ω zvolilo dostatečně malé; a pak by nebylo $\alpha + U$ *největší* hodnotou, o němž tvrditi možná, že všechny pod ním stojící hodnoty x mají vlastnost M. — Taktéž nemůže *dále* býti $f(\alpha + U) > \varphi(\alpha + U)$, poněvadž by tím dáno bylo též $f(\alpha + U - \omega) > \varphi(\alpha + U - \omega)$, jakmile se zvolí ω dostatečně malé, a nebylo by tedy vyhověno podmínce, že všechny pod $\alpha + U$ stojící hodnoty se honosí vlastností M. I nezbývá tedy nežli aby bylo $f(\alpha + U) = \varphi(\alpha + U)$, takže jest doká-

záno, že leží mezi α a β hodnota x a sice $\alpha + U$, pro niž $fx = \varphi x$.

II. Téhož důkazu možná užiti, jestli α i β *negativní*, značí-li jen ω, i a U veličiny *negativní*, jelikož pak $\alpha + \omega$, $\alpha + i$, $\alpha + U$ a $\alpha + U - \omega$ značí taktéž hodnoty mezi α a β ležící.

III. Jestli $\alpha = 0$ a β *positivní*, zvolme jen též i ($= \beta$), ω a U positivní; a jestli β *negativní*, tytéž veličiny negativní: a důkaz I. se dá doslovně opakovati.

IV. Jestli konečně α a β *nestejného označení* a na př. (což jest lhostejno) α negativní, β positivní, pravíme, předpokládajíce poučku o nepřetržitosti funkcí fx a φx, že tato spojitost se vztahuje ke všem hodnotám x, kteréž $< \alpha$, jsou-li *negativní*, a kteréž $< \beta$, jsou-li *positivní*. Mezi těmito jest pak obsažena též hodnota $x = 0$. Nutno tedy vyšetřiti poměr, jaký jest pro $x = 0$ mezi fx a φx. Jestli $f(0) = \varphi(0)$, jest poučka již o sobě dokázanou. Jestli však $f(0) > \varphi(0)$, leží hodnota, pro niž $fx = \varphi x$, podlé III. mezi 0 a α, poněvadž má býti $f\alpha < \varphi\alpha$; a jestli $f(0) < \varphi(0)$, leží mezi 0 a β. Jest tedy na každý způsob mezi α a β hodnota x, pro niž platí $fx = \varphi x$.

§. 16.

Poznamenání. Netvrdí se tím však, že jest *jenom jediná hodnota* x, kterouž se stává $fx = \varphi x$. Jestli totiž $f\alpha < \varphi\alpha$ a $f(\alpha + U) = \varphi(\alpha + U)$, musí tedy sice $f(\alpha + U + \omega) > \varphi(\alpha + U + \omega)$, vezme-li se ω dosti malé, t. j. funkce $f(x)$, kteráž před tím byla *menší* nežli φx, musí brzy po tom, co se obě *rovnaly* sobě, státi se *větší* nežli φx. Ale při stále větším rozmnožování veličiny ω může se státi, že se přijde k hodnotám, které spůsobí *opětně* $fx < \varphi x$, nežli $\alpha + U + \omega = \beta$. V takovém případě musí, jakož plyne přímo z naší poučky, mimo U býti ještě dvojí, mezi α a β ležící hodnota x, jíž se stane $fx = \varphi x$. Neb jestli $f(\alpha + U + \varkappa) < \varphi(\alpha + U + \varkappa)$, musí, poněvadž již dříve bylo $f(\alpha + U + \omega) > \varphi(\alpha + U + \omega)$, býti mezi $\alpha + U + \omega$ a $\alpha + U + \varkappa$, t. j. mezi α a β hodnota x, jíž stává se $fx = \varphi x$; a poněvadž opět $f(\alpha + i)$ nebo $f\beta > \varphi\beta$, musí podobně též mezi $\alpha + U + \varkappa$ a β ještě jedna hodnota x býti, která spůsobuje $fx = \varphi x$. Tímto spůsobem jde na jevo, že hodnoty x, spůsobující $fx = \varphi x$, vyskytovati se vůbec musí vždy *v počtu lichém.* [29])

§. 17.

Poučka. Každá funkce tvaru

$$a + bx^m + cx^n + \ldots + px^r,$$

kdež $m, n, \ldots r$ značí celistvé positivní exponenty, jest pro všechny hodnoty proměnné x veličinou *dle zákona spojitosti* proměnnou.

Důkaz. Nebo proměníme-li x v $x + \omega$, tedy jest změna [30]) této funkce patrně

$$= b[(x+\omega)^m - x^m] + c[(x+\omega)^n - x^n] + \ldots + p[(x+\omega)^r - x^r],$$

veličina to, o níž možná snadno dokázati, že se může státi tak malou, jak jen libo, vezme-li se dostatečně malé ω. Nebo podlé *binomické poučky*, jejíž platnost pro *celistvé positivní mocnitele* jsme dokázali (§. 8. pojednání „Der binomische Lehrsatz") neodvisle od vyšetřování, s nimiž se zanáší toto pojednání, jest veličina tato:

$$= \omega \left\{ \begin{array}{l} mbx^{m-1} + m\dfrac{m-1}{2}bx^{m-2}\omega + \ldots + b\omega^{m-1} \\ + ncx^{n-1} + n\dfrac{n-1}{2}cx^{n-2}\omega + \ldots + c\omega^{n-1} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + rpx^{r-1} + r\dfrac{r-1}{2}px^{r-2}\omega + \ldots + p\omega^{r-1} \end{array} \right\}$$

Počet členů, z nichž se skládá činitel v závorkách obsažený, jest vždy, jak patrno, jen *konečný*, a na hodnotě x a ω *nezávislý*; a poněvadž se vesměs vyskytují s *mocnitelem positiv-*

[29]) Grafické znázornění této okolnosti slouží velmi dobře k objasnění řečeného. *Std.*

[30]) Totiž rozdíl $f(x + \omega) - fx$, jakož snadno se z dané funkce poznává. *Std.*

ním, jest hodnota každého jednotlivého členu, a tedy i celého výrazu pro každou hodnotu x a ω (též pro $x = 0$) vždy jen *konečná*. Zmenšuje-li se pak při stejném x veličina ω, zmenšují se členové, v nichž ω jest obsaženo, kdežto zůstávají ostatní nezměněnými. Značí-li tedy S veličinu, která vyjde, sečteme-li hodnoty, jichž se dostane jednotlivým členům výrazu pro určité ω, na př. ω', tak dohromady, jako kdyby měly *stejné* označení: není pravá hodnota, jíž tento výraz dosáhne pro tože ω', zajisté $> S$, hodnota pak, jíž se mu dostane pro každé menší ω, jest zajisté $< S$. Žádá-li se tedy, aby změna funkce $a + bx^m + cx^n + \ldots + px^r$ byla $< D$, tedy zvolme ω tak, aby současně bylo $< \omega'$ a též $< \frac{D}{S}$: načež bude $\omega . S$ a tím spíše součin z ω a veličiny $< S$ nutně $< D$.

§. 18.

Poučka. Má-li funkce tvaru

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px + q,$$

kdež značí n celistvé číslo positivní, pro $x = \alpha$ hodnotu *kladnou*, pro $x = \beta$ však hodnotu zápornou: má rovnice

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px + q = 0$$

nejméně jeden *realný kořen*, ležící mezi α a β.

Důkaz. 1. Má-li α a β *stejné* označení (jsou-li obě veličiny buď positivní nebo negativní), jest patrno, že členové funkce, kteří se stávají pro $x = \alpha$ kladnými nebo zápornými, tože označení podrží též pro $x = \beta$ a pro veškeré hodnoty x, ležící mezi α a β. Stane-li se tedy hodnota funkce pro $x = \alpha$ kladnou, pro $x = \beta$ však zápornou, může to vyplynouti jenom odtud, poněvadž součet kladných členů v ní jest pro $x = \alpha$ *větší*, pro $x = \beta$ však *menší* nežli součet členů záporných. Ale součet těchto i oněch jest tvaru

$$a + bx^m + cx^n + \ldots + px^r$$

§. 17. t. j. spojitá funkce. Označíme-li tedy jednu φx, druhou fx, musí podlé §. 15., poněvadž $f\alpha < \varphi\alpha$ a $f\beta > \varphi\beta$, býti nějaká mezi α a β ležící hodnota x, pro niž se stane $fx = \varphi x$.

Pro tuto hodnotu přejde však $fx - \varphi x$, t. j. daná funkce v *nullu*; i jest tedy tato hodnota kořenem rovnice

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px + q = 0.$$

2. Má-li však α a β *nestejné* označení, uvažme hodnotu dané funkce pro $x = 0$. Jest-li nullou, jest tím již dokázáno o sobě, že předložená rovnice má realný, mezi α a β ležící kořen, totiž $x = 0$. Jestli však tato hodnota (veličina q) *positivní*, tedy víme, že daná funkce jest pro $x = 0$ positivní, pro $x = \beta$ negativní; a poněvadž členové, kteří pro $x = \beta$ stanou se positivními nebo negativními, tože znamení podrží též pro všechny, mezi 0 a β ležící hodnoty x: možná týmiž závěrky, jako v č. 1., dokázati, že mezi 0 a β musí ležeti hodnota x, kterouž se stane funkce nullou. Jestli konečně q *negativní*, platí taktéž, co právě bylo řečeno, zamění-li se α za β. A poněvadž hodnota mezi 0 a β nebo mezi 0 a α ležící připadá též mezi α a β, jsou-li obě tyto hodnoty nestejného označení, jest pravdivost naší poučky dokázána pro každý případ. [31])

[31]) Ku konci budiž mi dovoleno poznamenati, že jsem se snažil podati všude, co možná, slovný překlad tohoto pojednání, aby se i tu poznala zvláštnost slohu Bolzanova a neuvedlo do něho, třeba nepozorovaně, něco formálně nebo věcně odchylného. Že by vedení celého důkazu nyní, zvláště při pokročilosti našich studií přípravných, zcela jinak vypadlo, není pochybnosti žádné, ač důkladnost Bolzanova právě v tomto pojednání velmi jasně vyniká a dokazuje, jak tehdáž již byly vytříbeny mathematické pojmy jeho. Co Cauchy provedl důkladnou svou analysí algebraickou, jíž se dostalo tak hojného rozšíření, s velké části bylo dříve Bolzanem vyloženo v různých pojednáních, jimž bohužel! nedostalo se náležitého rozšíření. Kéž by aspoň jubilejní slavnost tato přispěla k tomu, aby četné práce Bolzanovy, jež v oboru mathematiky provedl a částečně uveřejnil, dosáhly ocenění, jakéhož vším právem zasluhují a v nejnovější době od prof. *O. Stolze* v Innšpruku došly! *Std.*