Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Jeřábek

O vyhledávání resolvent methodou neurčitých součinitelův

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 1, 65--97

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122122

O vyhledávání resolvent methodou neurčitých součinitelův.

Napsal **Antonín Jeřábek.**

Jest dána *obecná rovnice* n-tého *stupně*

$$x^n + R_{n-1} x^{n-1} + \ldots + R_1 x + R_0 = 0, \qquad (1)$$

jejíž *kořeny* (*na sobě vesměs nezávislé*) jsou $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Máme-li vyhledati *její* ***resolventu*** $(n-1)$ho *stupně*, zvolíme *jednotný*, *systematický* postup, jenž záležeti bude ve *dvou* výkonech a), b):

a) Sestavíme — užitím *neurčitého součinitele* α — *lineární racionální funkci*

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-2})$$

tak, aby měla toliko (n-1) *hodnot*, jež označíme $f_0, f_1, \ldots f^{n-2}$.

Přiberouce potom *poslední* kořen x_{n-1} a dalšího *neurčitého součinitele* β, položíme

$$y_0 = f_0 + \beta x_{n-1},$$
$$y_1 = f_1 + \beta x_{n-1},$$
$$\vdots$$
$$y_{n-2} = f_{n-2} + \beta x_{n-1},$$

čímž nabudeme ***pomocné funkce*** y obsahující všech n-kořenů.

Funkci y určíme *methodou neurčitých součinitelů*, aby aspoň *součin* (n-1) hodnot

$$y_0 \cdot y_1 \ldots y_{n-2}$$

byl *symmetrickou funkcí* ***všech*** *kořenů* $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Po té utvoříme ***pomocnou rovnici*** (n-1)ho stupně, jejímiž *kořeny* jsou *ony hodnoty funkce y*. — Patrně bude *prostý člen* v této *pomocné rovnici racionální funkcí součinitelů* R_{n-1}, R_{n-2}, . . . *Součinitele* ostatních členů *pomocné rovnice* budou *vedle daných* R_{n-1}, R_{n-2} . . . obsahovati *též* x_{n-1}.

b) *Pomocnou rovnici* proměníme ve *hledanou* ***resolventu*** tím, že *v ní* zavedeme *novou neznámou*, tak zvanou ***resolvující funkci***:

$$\eta = \varphi\,(y),$$

zvolíce *racionální funkci* φ takovou, aby *součinitele* v nové rovnici ***všecky*** staly se *racionálními funkcemi* výhradně *jen daných součinitelů* R_{n-1}, R_{n-2}, . . ., R_0, mezi nimiž *tedy* x_{n-1} již se *nevyskýtá*.

* * *

Na základě naznačeného postupu ukážeme, že ani *přípravný krok a*) *není možný*, jedná-li se o *resolventu obecné* rovnice *pátého* stupně.

I. Resolventy kubické rovnice.

1. Resolventa obecné kubické rovnice:

$$x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0. \tag{2}$$

Buďtež x_0, x_1, x_2 *kořeny* dané rovnice. Dělíme-li *mnohočlen* na *levé straně kořenovým činitelem* $(x-x_2)$, vychází

$$x_0 + x_1 = -A_2 - x_2, \tag{3}$$

$$x_0x_1 = A_1 + A_2x_2 + x_2^2. \tag{4}$$

Sestavíme-li rovnici *užitím kořenů*:

$$\left.\begin{aligned} f_0 &= ax_0 + x_1, \\ f_1 &= x_0 + ax_1, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

budou *součinitele* této rovnice *racionálními* funkcemi *symmetrických* funkcí

$$(x_0 + x_1),\ x_0x_1\,;$$

tudíž dle (3) a (4) *racionálními funkcemi veličin* A_2, A_1, x_2. *Závěr tento* platí též o *součinitelích vzniklé rovnice*, když zavedeme *novou neznámou*

$$y = f + \beta x_2,$$

takže

$$\left.\begin{aligned} y_0 - \beta x_2 &= \alpha x_0 + x_1 \\ y_1 - \beta x_2 &= x_0 + \alpha x_1 \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

a) Dle naznačeného postupu ustanovíme *pomocnou funkci* y tak, aby *součin* $y_0 y_1$ byl *symmetrickou* funkcí *kořenů* x_0, x_1, x_2.

Píšeme-li dle (3), (6)

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= l + p x_0, \\ y_1 &= l + p x_1, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

kdež

$$p = \alpha - 1,\ q = \beta - 1,\ l = q x_2 - A_2,$$

vyplyne

$$y_0 y_1 = l^2 + lp\,(x_0 + x_1) + p^2 x_0 x_1,$$

a dle (3), (4)

$$\begin{aligned} y_0 y_1 = (p^2 - pq + q^2)\, x_2^2 + (p^2 - pq + p - 2q)\, A_2 x_2 \\ + (p + 1)\, A_2^2 + p^2 A_1. \end{aligned} \tag{8}$$

Odtud *methodou neurčitých součinitelů*:

$$p^2 - pq + q^2 = 0, \tag{9}$$

$$p^2 - pq + p - 2q = 0. \tag{10}$$

Dělíme-li rovnici (9) na p^2 a srovnáme-li pak se známým vztahem

$$1 + \omega + \omega^2 = 0,$$

kdež ω primitivní $\sqrt[3]{+1}$ znamená, jest

$$\frac{q}{p} = -\omega$$

a dle (10)

$$p = \omega^2 - 1,\ q = \omega - 1,\ \alpha = \omega^2,\ \beta = \omega,$$

potom dle (6) i (7) *pomocná funkce*:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \omega^2 x_0 + x_1 + \omega x_2, \\ y_1 &= x_0 + \omega^2 x_1 + \omega x_2 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Konečně dle (8) *součin*:

$$y_0 y_1 = \omega^2 (A_2^2 - 3A_1) \qquad (12)$$

a *pomocná rovnice*:

$$y^2 - \omega (A_2 + 3x_2) y + \omega^2 (A_2^2 - 3A_1) = 0. \qquad (13)$$

b) Zavedeme-li *novou neznámou*: $\eta = y^3$, t. j.

$$\begin{aligned} \eta_0 &= (\omega^2 x_0 + x_1 + \omega x_2)^3, \\ \eta_1 &= (x_0 + \omega^2 x_1 + \omega x_2)^3, \end{aligned} \qquad (14)$$

která má *toliko dvě* hodnoty (16), stane se $(\eta_0 + \eta_1)$ *funkcí symmetrickou.*

Tak získáme ze (13) rovnici[1]):

$$\eta^2 + [2A_2^3 - 9A_2 A_1 - 27 (x_2^3 + A_2 x_2^2 + A_1 x_2)] \eta + (A_2^2 - 3A_1)^3 = 0,$$

z níž vzhledem ku (2) vychází *očekávaná resolventa*:

$$\eta^2 + [2A_2^3 - 9A_2 A_1 + 27A_0] \eta + (A_2^2 - 3A_1)^3 = 0. \qquad (15)$$

Příslušná *resolvující funkce* (14) jest ve *vhodnější* úpravě:

$$\left.\begin{aligned} \eta_0 &= (x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2)^3, \\ \eta_1 &= (x_0 + \omega^2 x_1 + \omega^4 x_2)^3, \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

známá to *cyclická funkce třetího řádu.* —

Protože *se* (16) *substitucí* $(\omega^r x_0, \omega^r x_1, \omega^r x_2)$*) *nemění*, jest (15) též *resolventou přidružených* rovnic

$$\left.\begin{aligned} x^3 + \omega^2 A_2 x^2 + \omega A_1 x + A_0 &= 0, \\ x^3 + \omega^4 A_2 x^2 + \omega^2 A_1 x + A_0 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

---

[1]) Je-li

$$y^2 + a_1 y + a_0 = 0 \text{ a } \eta = y^3, \text{ bude } y\,(y + a_1) = - a_0.$$

Potom

$$y^3 (y + a_1)^3 = - a_0^3, \text{ neboli } y^3 (y^3 - 3a_1 a_0 + a_1^3) = - a_0^3;$$

odkud vzor pro (15):

$$\eta^2 + (a_1^3 - 3a_1 a_0) \eta + a_0^3 = 0.$$

*) t. j. $\omega^r x_0$ za x_0,
$\omega^r x_1$ „ x_1,
$\omega^r x_2$ „ x_2.

tudíž i *zvodné rovnice*:

$$x^9 + (A_2^3 - 3A_2A_1 + 3A_0)\,x^6 + (-3A_2A_1A_0 + A_1^3 + 3A_0^2)\,x^3 + A_0^3 = 0, \quad (18)$$

jež poskytuje *třetí mocniny* kořenů dané kubické rovnice (2). Srovn. níže [3]).

* * *

Dodatek.

Zavedeme-li *novou neznámou*:

$$z_0 = \tfrac{1}{2}(x_0 - x_1 - x_2),$$
$$z_1 = \tfrac{1}{2}(x_1 - x_0 - x_2),$$
$$z_2 = \tfrac{1}{2}(x_2 - x_0 - x_1),$$

vyplyne z *dané kubické* rovnice (2):

$$z^3 - \frac{A_2}{2}z^2 + \left(-\frac{A_2^2}{4} + A_1\right)z + \frac{A_2^3}{8} - \frac{A_2A_1}{2} + A_0 = 0. \quad (19)$$

Ustanovíme-li této rovnice *resolventu* dle vzorce (15) a *resolvující funkci* dle (16), dospějeme *opět* ku (15) a (16).

— Podobně zavedením *nové neznámé*:

$$z_0 = -(x_1 + x_2),$$
$$z_1 = -(x_0 + x_2),$$
$$z_2 = -(x_0 + x_1),$$

vzejde z *dané kubické* (2):

$$z^3 - 2A_2z^2 + (A_2^2 + A_1)\,z - A_2A_1 + A_0 = 0, \quad (20)$$

kterážto rovnice opět s *danou* (2) má *společnou resolventu* (15) při *společné resolvující funkci* (16).

Na př. Daná rovnice

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0,$$

má s rovnicí

$$\left\{\begin{array}{l} z^3 + \frac{9}{2}z^2 + \frac{23}{4}z + \frac{15}{8} = 0, \\ z^3 + 18z^2 + 107z + 210 = 0, \end{array}\right\}$$

při *resolvující funkci*

$$(x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2)^3 = (z_0 + \omega z_1 + \omega^2 z_2)^3$$

společnou *resolventu*:

$$\eta^2 + 27 = 0.$$

* * *

Obdobou ku (16) můžeme *nyní určovati resolventy* též na základě *vyšších* homogenních **pomocných funkcí.**

---

2. ***Resolventy pro rovnici, jež poskytuje šesté mocniny kořenů dané kubické rovnice.***

1. Užitím *pomocné funkce*:

$$\begin{cases} y_0 = \alpha x_0^2 + x_1^2 + \beta x_2^2, \\ y_1 = x_0^2 + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2. \end{cases}$$

a) Dle (3) jest:

$$x_0^2 + x_1^2 = - x_2^2 + A_2^2 - 2A_1,$$

a dle (4)

$$x_0^2 x_1^2 = A_1 x_2^2 + (A_2 A_1 - A_0)\, x_2 - A_2 A_0 + A_1^2,$$

vzhledem k tomu, že

$$x_2^3 = - A_2 x_2^2 - A_1 x_2 - A_0,$$

a

$$x_2^4 = (A_2^2 - A_1)\, x_2^2 + (A_2 A_1 - A_0)\, x_2 + A_2 A_0.$$

Položme

$$p = \alpha - 1,\ q = \beta - 1,\ l = q x_2^2 + (A_2^2 - 2A_1);$$

i bude

$$y_0 = l + p x_0^2,$$
$$y_1 = l + p x_1^2.$$

Potom však

$$y_0 y_1 = l^2 + lp\,(x_0^2 + x_1^2) + p^2 x_0^2 x_1^2.$$

Vyloučíme-li x_2^4, jest $y_0 y_1 =$

$$\left\{\begin{array}{l|c|l} + q^2 A_2^2 & x_2^2 + p^2 & (A_2 A_1 - A_0)\, x_2 + (p+1)(A_2^2 - 2A_1)^2 + p^2 A_1^2 \\ - pA_2^2 & -pq & \quad - (p^2 + pq - q^2)\, A_2 A_0. \\ + 2qA_2^2 & + q^2 & \\ + p^2 A_1 & & \\ - pqA_1 & & \\ - q^2 A_1 & & \\ + 2pA_1 & & \\ - 4qA_1 & & \end{array}\right.$$

Odtud *methodou neurčitých součinitelů*:

$$p^2 - pq + q^2 = 0,$$
$$(q^2 - p + 2q) A_2^2 + (p^2 - pq - q^2 + 2p - 4q) A_1 = 0.$$

Vymýtíme-li z *poslední* rovnice p^2, obdržíme *podmínky*:

$$\left.\begin{aligned} p^2 - pq + q^2 &= 0, \\ q^2 - p + 2q &= 0, \end{aligned}\right\}$$

z nichž opět

$$\frac{q}{p} = -\omega,\ p = \omega^2 - 1,\ q = \omega - 1,$$
$$\alpha = \omega^2,\ \beta = \omega$$

vyplývá.

Z toho konečně

$$y_0 y_1 = \omega^2 [(A_2^2 - 2A_1)^2 - 3(A_1^2 - 2A_2 A_0)],$$

protože

$$p^2 = -3\omega^2,$$

a *pomocná rovnice*:

$$y^2 - \omega(-A_2^2 + 2A_1 + 3x_2^2) y + \omega^2 (A_2^4 - 4A_2^2 A_1 + 6A_2 A_0 + A_1^2) = 0.$$

b) Zavedeme-li *novou neznámou* $\eta = y^3$ jako předešle, bude dle vzoru[1]) *hledanou resolventou* kubické rovnice (2):

$$\eta^2 + [-2A_2^6 + 12A_2^4 A_1 - 18A_2^3 A_0 - 15A_2^2 A_1^2 + 36A_2 A_1 A_0 - 2A_1^3 - 27A_0^2]\,\eta + (A_2^4 - 4A_2^2 A_1 + 6A_2 A_0 + A_1^2)^3 = 0, \tag{21}$$

při *resolvující funkci*:

$$\left.\begin{aligned} \eta_0 &= (x_0^2 + \omega x_1^2 + \omega^2 x_2^2)^3, \\ \eta_1 &= (x_0^2 + \omega^2 x_1^2 + \omega x_2^2)^3. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Protože (22) *substitucí*

$$(\pm\, \omega^r x_0,\ \pm\, \omega^r x_1,\ \pm\, \omega^r x_2)$$

se nemění, jest rovnice (21) též *resolventou* rovnice:

$$x^{18} + [-(A_2^3 - 3A_2 A_1 + 3A_0)^2 + 2(-3A_2 A_1 A_0 + A_1^3 + 3A_0^2)]\, x^{12} + [-2(A_2^3 - 3A_2 A_1 + 3A_0) A_0^3 + (3A_2 A_1 A_0 - A_1^3 - 3A_0^2)^2]\, x^6 - A_0^6 = 0, \tag{23}$$

jež *poskytuje šesté mocniny kořenů* dané kubické rovnice (2), neboť jí ($\pm x$), ($\pm \omega x$), ($\pm \omega^2 x$) zadost činí.

* * *

2. Užitím *pomocné funkce*:

$$\begin{cases} y_0 = \alpha x_1 x_2 + x_0 x_2 + \beta x_0 x_1, \\ y_1 = x_1 x_2 + \alpha x_0 x_2 + \beta x_0 x_1. \end{cases}$$

a) Položíme-li

$$p = \alpha - 1, \; q = \beta - 1,$$

bude *součin* $y_0 y_1 =$

$$\begin{array}{r|l|l} q^2 & A_1 x_2^2 + q^2 A_2 A_1 & x_2 + (q+1)^2 A_1^2 + q(p-q) A_2 A_0, \\ -\, p & \quad\;\; - \, p A_2 A_1 & \\ +\, 2q & \quad\;\; + \, 2q A_2 A_1 & \\ & \quad \left\{ \begin{array}{l} -\, p^2 A_0 \\ +\, pq A_0 \\ -\, q^2 A_0 \end{array} \right. & \end{array}$$

protože

$$x_2^3 = -A_2 x_2^2 - A_1 x_2 - A_0,$$
$$x_2^4 = -A_2 x_2^3 - A_1 x_2^2 - A_0 x_2.$$

Aby součin $y_0 y_1$ byl funkcí *symmetrickou*, položme

$$\left. \begin{array}{r} q^2 - p + 2q = 0, \\ -p^2 + pq - q^2 = 0. \end{array} \right\}$$

Potom opět

$$\alpha = \omega^2, \; \beta = \omega,$$

a

$$y_0 y_1 = \omega^2 (-3 A_2 A_0 + A_1^2).$$

Konečně *pomocná rovnice*:

$$y^2 - \omega \; (2A_1 + 3A_2 x_2 + 3x_2^2) \; y + \omega^2 \; (-3A_2 A_0 + A_1^2) = 0.$$

b) Učiníme-li zase $\eta = y^3$, nabudeme dle [1]) *resolventy* kubické rovnice:

$$\eta^2 + (9A_2 A_1 A_0 - 2A_1^3 - 27A_0^2) \; \eta + (-3A_2 A_0 + A_1^2)^3 = 0 \tag{24}$$

při *resolvující funkci*:

$$\left.\begin{aligned}\eta_0 &= (x_1x_2 + \omega x_0x_2 + \omega^2x_0x_1)^3,\\ \eta_1 &= (x_1x_2 + \omega^2x_0x_2 + \omega x_0x_1)^3,\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

která *substitucí*

$$(\pm\,\omega^r x_0,\ \pm\,\omega^r x_1,\ \pm\,\omega^r x_2)$$

se nemění. Jest tedy (24) též *resolventou* rovnice (23), jež poskytuje *šesté mocniny kořenů* dané kubické rovnice (2).

* * *

Poznámka I. Obě *resolventy* (21) a (24) můžeme z (15) odvoditi též *prostředečně*; ba i navzájem *jednu z druhé*.

1. Vztahujme

$$\left.\begin{aligned}\eta_0 &= (x_0^2 + \omega x_1^2 + \omega^2x_2^2)^3,\\ \eta_1 &= (x_0^2 + \omega^2x_1^2 + \omega x_2^2)^3,\end{aligned}\right\}$$

k rovnici, jež poskytuje *čtverce* kořenů dané kubické. Důsledně pak dle[2]) položme do *resolventy* (15) —

$$\begin{aligned}&\text{za } A_2 \ldots (-A_2^2 + 2A_1),\\ &\text{„ } A_1 \ldots (-2A_2A_0 + A_1^2),\\ &\text{„ } A_0 \ldots (-A_0^2);\end{aligned}$$

i vyplyne rovnice:

$$\eta^2 + [2(-A_2^2 + 2A_1)^3 - 9(-A_2^2 + 2A_1)(-2A_2A_0 + A_1^2) - 27A_0^2]\,\eta + [(-A_2^2 + 2A_1)^2 + 6A_2A_0 - 3A_1^2]^3 = 0,$$

která je *totožna* s (21) a jest *resolventou* rovnice (2) i *rovnice*

$$x^6 + (-A_2^2 + 2A_1)\,x^4 + (-2A_2A_0 + A_1^2)\,x^2 - A_0^2 = 0$$

a dle (17) i obou rovnic k ní *přidružených*:

$$\left\{\begin{aligned}&x^6 + \omega(-A_2^2 + 2A_1)\,x^4 + \omega^2(-2A_2A_0 + A_1^2)\,x^2 - A_0^2 = 0,\\ &x^6 + \omega^2(-A_2^2 + 2A_1)\,x^4 + \omega(-2A_2A_0 + A_1^2)\,x^2 - A_0^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

Výsledek jest týž *jako* (23).

---

[2]) Je-li

$$x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0,$$

jest

$$(x^3 + A_1x)^2 = (A_2x^2 + A_0)^2;$$

a tedy:

$$x^6 + (-A_2^2 + 2A_1)\,x^4 + (-2A_2A_0 + A_1^2)\,x^2 - A_0^2 = 0,$$

2. Vykročme z rovnice:

$$\xi^3 + \frac{A_1}{A_0}\xi^2 + \frac{A_2}{A_0}\xi + \frac{1}{A_0} = 0,$$

kdež $\xi = \frac{1}{x}$, a užijme pak *resolventy* (15) na ni. I jest

$$\eta'_0 = (\xi_0 + \omega\xi_1 + \omega^2\xi_2)^3 = \left(\frac{1}{x_0} + \frac{\omega}{x_1} + \frac{\omega^2}{x_2}\right)^3$$

$$= \frac{(x_1x_2 + \omega x_0x_2 + \omega^2 x_0x_1)^3}{x_0^3x_1^3x_2^3} = -\frac{\eta_0}{A_0^3}.$$

Podobně $\eta_1' = -\frac{\eta_1}{A_0^3}$ a obecně $\eta' = -\frac{\eta}{A_0^3}$.

Potom dle (15) vzhledem k rovnici, z níž jsme vykročili:

$$\eta'^2 + \left(\frac{2A_1^3}{A_0^3} - \frac{9A_1A_2}{A_0^2} + \frac{27}{A_0}\right)\eta' + \left(\frac{A_1^2}{A_0^2} - \frac{3A_2}{A_0}\right)^3 = 0.$$

Dosadíme-li konečně $\eta' = -\frac{\eta}{A_0^3}$, dospějeme k *resolventě* (24).

3. Však i z (21) lze vyvoditi *resolventu* (24).

Zavedeme li *novou neznámou*:

$$z_0 = \tfrac{1}{2}(x_0 - x_1 - x_2),$$
$$z_1 = \tfrac{1}{2}(x_1 - x_0 - x_2),$$
$$z_2 = \tfrac{1}{2}(x_2 - x_0 - x_1),$$

jest *resolvující funkcí*:

$$\begin{aligned}(z_0^2 + \omega z_1^2 + \omega^2 z_2^2)^3 = [&\tfrac{1}{4}(1 + \omega + \omega^2)(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)\\ &+ \tfrac{1}{2}(1 - \omega - \omega^2)\,x_1x_2\\ &+ \tfrac{1}{2}(-1 + \omega - \omega^2)\,x_0x_2\\ &+ \tfrac{1}{2}(-1 - \omega + \omega^2)\,x_0x_1]^3\\ = (&x_1x_2 + \omega x_0x_2 + \omega^2 x_0x_1)^3,\end{aligned}$$

protože $1 + \omega + \omega^2 = 0$. (Srov. (25).)

Dosadíme-li dle (19) do (21)

za $A_2 \ldots -\frac{A_2}{2}$,

„ $A_1 \ldots \left(-\frac{A_2^2}{4} + A_1\right)$,

„ $A_0 \ldots \left(\frac{A_2^3}{8} - \frac{A_2A_1}{2} + A_0\right)$, obdržíme při *resolvující funkci* (25) hledanou *resolventu*, která po redukci se objeví *totožnou* s (24).

4. Obráceně dosaďme dle (20) do (24)

$$
\begin{aligned}
&\text{za } A_2 \ldots -2A_2,\\
&\;\;{}_{"}\;\; A_1 \ldots (A_2^2 + A_1),\\
&\;\;{}_{"}\;\; A_0 \ldots (-A_2A_1 + A_0),
\end{aligned}
$$

zvolíce *novou neznámou*:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= -(x_1 + x_2),\\
z_1 &= -(x_0 + x_2),\\
z_2 &= -(x_0 + x_1).
\end{aligned}
$$

Tím vyplyne *resolventa* (21) při *resolvující funkci* (22), neboť

$$
\begin{aligned}
(z_1z_2 + \omega z_0z_2 + \omega^2 z_0z_1)^3 &= [(x_0 + x_2)(x_0 + x_1)\\
&\quad + \omega(x_1 + x_2)(x_0 + x_1) + \omega^2(x_1 + x_2)(x_0 + x_2)]^3\\
&= [x_0^2 + \omega x_1^2 + \omega^2 x_2^2\\
&\quad + (1 + \omega + \omega^2)(x_1x_2 + x_0x_2 + x_0x_1)]^3\\
&= (x_0^2 + \omega x_1^2 + \omega^2 x_2^2)^3.
\end{aligned}
$$

---

3. Resolventy pro rovnici, jež poskytuje deváté mocniny kořenů dané kubické rovnice.

1. Užitím *pomocné funkce*:

$$
\begin{cases}
y_0 = \alpha x_0^3 + x_1^3 + \beta x_2^3,\\
y_1 = x_0^3 + \alpha x_1^3 + \beta x_2^3.
\end{cases}
$$

a) Zde opět vychází: $\alpha = \omega^2$, $\beta = \omega$, i jest *resolvující funkce*:

$$
\left.
\begin{aligned}
\eta_0 &= (x_0^3 + \omega x_1^3 + \omega^2 x_2^3)^3,\\
\eta_1 &= (x_0^3 + \omega^2 x_1^3 + \omega x_2^3)^3,
\end{aligned}
\right\} \qquad (26)
$$

kteráž *substitucí* $(\varrho^r x_0, \varrho^r x_1, \varrho^r x_2)$ *se nemění*, kdež ϱ *devátou primitivní odmocninu* 1 značí. Opomíjejíce *bezprostředný* postup vztahujme dle ***Pozn. I.*** *resolvující funkci hned k rovnici*, jež poskytuje *trojmoci kořenů*[3]) kubické rovnice dané (2).

Důsledně položme dle (15)

$$\begin{aligned} &\text{za } A_2 \ldots (A_2^3 - 3A_2A_1 + 3A_0) = A'_2, \\ &\;,, \;\; A_1 \ldots (-3A_2A_1A_0 + A_1^3 + 3A_0^2) = A'_1, \\ &\;,, \;\; A_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_0^3 = A'_0; \end{aligned}$$

i vyplyne *resolventa*:

$$\eta^2 + [2A'^3_2 - 9A'_2A'_1 + 27A'_0]\,\eta + (A'^2_2 - 3A'_1)^3 = 0 \quad (27)$$

nejen pro rovnici *danou* (2), ale i pro rovnici *poskytující devátě mocniny jejich kořenů*:

$$x^{27} + (A'^3_2 - 3A'_2A'_1 + 3A'_0)\,x^{18} + (-3A'_2A'_1A'_0 + A'^3_1 + 3A'^2_0)\,x^9 + A'^3_0 = 0, \quad (28)$$

kteréžto nejen x, ale též ϱx, $\varrho^2 x, \ldots, \varrho^8 x$ zadost činí.

* * *

2. **Užitím** *pomocné funkce*:

$$\begin{cases} y_0 = \alpha\,(x_1^2x_2 + x_1x_2^2) + (x_0^2x_2 + x_0x_2^2) + \beta\,(x_0^2x_1 + x_0x_1^2), \\ y_1 = (x_1^2x_2 + x_1x_2^2) + \alpha\,(x_0^2x_2 + x_0x_2^2) + \beta\,(x_0^2x_1 + x_0x_1^2). \end{cases}$$

a) Pišme zkrátka $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = \xi_0$, $x_0^2x_2 + x_0x_2^2 = \xi_1$, $x_0^2x_1 + x_0x_1^2 = \xi_2$;

i bude *resolvující funkce*:

$$\left.\begin{aligned} \eta_0 &= (\xi_0 + \omega\xi_1 + \omega^2\xi_2)^3, \\ \eta_1 &= (\xi_0 + \omega^2\xi_1 + \omega\xi_2)^3, \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

protože opět $\alpha = \omega^2$, $\beta = \omega$.

---

[3]) $[(x^3 + A_0) + A_1x]^3 = -A_2^3x^6$;

$$(x^3 + A_0)^3 + 3A_1x\,(x^3 + A_0)\,[(x^3 + A_0) + A_1x] + A_1^3x^3 = -A_2^3x^6;$$

$$(x^3 + A_0)^3 + 3A_1x\,(x^3 + A_0)\,(-A_2x^2) + A_1^3x^3 = -A_2^3\,x^6$$

Odkud konečně:

$$x^9 + (A_2^3 - 3A_2A_1 + 3A_0)\,x^6 + (-3A_2A_1A_0 + A_1^3 + 3A_0^2)\,x^3 + A_0^3 = 0$$

neboli zkrátka:

$$x^9 + A'_2x^6 + A'_1x^3 + A'_0 = 0.$$

Resolvující funkce zase *nedoznává změny substitucí* $(\varrho^r x_0, \varrho^r x_1, \varrho^r x_2)$, kdež $\varrho = \sqrt[9]{+1}$.

Snadno se přesvědčíme, že $\xi_0 = \frac{A_2 A_0}{x_0} + A_0$,

$$\xi_1 = \frac{A_2 A_0}{x_1} + A_0,$$

$$\xi_2 = \frac{A_2 A_0}{x_2} + A_0; \text{ tedy obecně:}$$

$$\xi = \frac{A_2 A_0}{x} + A_0.$$

Znásobíme-li danou kubickou rovnici (2) číslem $\frac{A_2^3 A_0^2}{x^3}$, obdržíme opačným sledem:

$$\frac{A_2^3 A_0^3}{x^3} + A_2 A_1 \frac{A_2^2 A_0^2}{x^2} + A_2^3 A_0 \frac{A_2 A_0}{x} + A_2^3 A_0^2 = 0$$

neboli

$$(\xi - A_0)^3 + A_2 A_1 (\xi - A_0)^2 + A_2^3 A_0 (\xi - A_0) + A_2^3 A_0^2 = 0,$$

a po *redukci*

$$\xi^3 + (A_2 A_1 - 3A_0)\,\xi^2 + (A_2^3 A_0 - 2A_2 A_1 A_0 + 3A_0^2)\,\xi + (A_2 A_1 A_0^2 - A_0^3) = 0. \qquad (30)$$

Dosadíme-li vzhledem k resolvující funkci (29) do (15)

za A_2 . . . $(A_2 A_1 - 3A_0)$,
„ A_1 . . . $(A_2^3 A_0 - 2A_2 A_1 A_0 + 3A_0^2)$,
„ A_0 . . . $(A_2 A_1 A_0^2 - A_0^3)$,

získáme *hledanou resolventu*:

$$\eta^2 + [-9A_2^4 A_1 A_0 + 2A_2^3 A_1^3 + 27A_2^3 A_0^2]\,\eta + (A_2^2 A_1^2 - 3A_2^3 A_0)^3 = 0 \qquad (31)$$

pro *rovnici* (30) a tedy i pro rovnici *kubickou danou* (2) i s *týmž vymezením* jako v případě předešlém pro *rovnici* (28).

II. Resolventy bikvadratické rovnice.

1. ***Resolventa obecné bikvadratické rovnice:***

$$x^4 + B_3 x^3 + B_2 x^2 + B_1 x + B_0 = 0. \tag{32}$$

Označme opět *kořeny dané rovnice* (32) x_0, x_1, x_2, x_3. Dělíme-li *Hornerovou methodou*, obdržíme:

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + x_2 &= -B_3 - x_3, \\ x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1 x_2 &= B_2 + B_3 x_3 + x_3^2, \\ x_0 x_1 x_2 &= -B_1 - B_2 x_3 - B_3 x_3^2 - x_3^3. \end{aligned} \tag{33}$$

Sestavíme-li *rovnici*, jejímž *kořenem* jest *racionální funkce o třech* hodnotách:

$$\left.\begin{aligned} f_0 &= \alpha x_0 + x_1 + x_2, \\ f_1 &= x_0 + \alpha x_1 + x_2, \\ f_2 &= x_0 + x_1 + \alpha x_2, \end{aligned}\right| \tag{34}$$

budou *součinitele* této rovnice též *racionálními funkcemi symmetrických funkcí*:

$$(x_0 + x_1 + x_2), \quad (x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1 x_2), \quad x_0 x_1 x_2,$$

a tedy dle (33) *racionálními* funkcemi *veličin*:

$$B_3, \quad B_2, \quad B_1, \; x_3.$$

Potom ovšem budou i *racionálními* funkcemi *těchto veličin* též *součinitele pomocné rovnice*, jež vznikne zavedením nové neznámé tím, že místo f položíme $y - \beta x_3$, takže

$$\begin{aligned} y_0 &= \beta x_3 + \alpha x_0 + x_1 + x_2, \\ y_1 &= \beta x_3 + x_0 + \alpha x_1 + x_2, \\ y_2 &= \beta x_3 + x_0 + x_1 + \alpha x_2. \end{aligned} \tag{35}$$

a) Ustanovme nyní opět α a β tak, aby *součin* $y_0 y_1 y_2$ byl *symmetrickou funkcí kořenů*

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3. \tag{36}$$

Označíme-li zase $p = \alpha - 1$, $q = \beta - 1$, $l = q x_3 - B_3$, bude dle (35):

$$\begin{aligned} y_0 &= l + p x_0, \\ y_1 &= l + p x_1, \\ y_2 &= l + p x_2. \end{aligned} \tag{37}$$

Utvořme *součin* na základě *variací v širším smyslu*:

$$y_0 y_1 y_2 = l^3 + l^2 p\,(x_0 + x_1 + x_2) + l p^2\,(x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1 x_2) + p^3 x_0 x_1 x_2. \tag{38}$$

Dosadíme-li (33) do (38), vychází:

$$\begin{array}{l|l|l|l} y_0 y_1 y_2 = -p^3 & x_3^3 - p^3 & B_3 x_3^2 - p^2 B_3^2 & x_3 - (p+1)\,B_3^3 \\ \quad + p^2 q & \quad + p^2 q & \quad + 2pqB_3^2 & \quad - p^2 B_3 B_2 \\ \quad - pq^2 & \quad - pq^2 & \quad - pB_3^2 & \quad - p^3 B_1 \\ \quad + q^3 & \quad - p^2 & \quad + 3qB_3^2 & \\ & \quad + 2pq & \quad - p^3 B_2 & \\ & \quad - 3q^2 & \quad + p^2 q B_2 & \end{array} \tag{39}$$

Přihlížejíce k *požadavku* (36) klademe *zatím podmínečně* nemajíce *dostatek*[4]) *neurčitých součinitelů* ku splnění *všech* podmínek zde se vyskytujících:

$$-p^3 + p^2 q - pq^2 + q^3 = 0, \tag{40}$$

$$-p^3 + p^2 q - pq^2 - p^2 + 2pq - 3q^2 = 0, \tag{41}$$

odkud *dvojí* ustanovení *neurčitých součinitelů* vyplývá:

$$A)\ \left.\begin{array}{l} p = -2, \\ q = -2. \end{array}\right\} \qquad B)\ \left.\begin{array}{l} p = -2 \pm 2i, \\ q = -2 \mp 2i. \end{array}\right\}$$

Toliko A) vede k určení *součinu* $y_0 y_1 y_2$ jakožto *symmetrické* funkce, protože rovnicemi:

$$\left.\begin{array}{r} (-p^2 + 2pq - p + 3q)\,B_3^2 = (-4 + 8 \\ + 2 - 6)\,B_3^2 = 0 \\ (-p^3 + p^2 q)\,B_2 = (+8 - 8)\,B_2 = 0 \end{array}\right\} \tag{42}$$

požadavek (36) je zde splněn. Potom totiž dle (39):

$$y_0 y_1 y_2 = B_3^3 - 4B_3 B_2 + 8B_1. \tag{43}$$

Protože pak $\alpha = \beta = -1$, vyplyne dle (35) *pomocná funkce*:

$$\begin{aligned} y_0 &= -x_0 + x_1 + x_2 - x_3, \\ y_1 &= +x_0 - x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 &= +x_0 + x_1 - x_2 - x_3, \end{aligned} \tag{44}$$

---

[4]) Zavedením $f_0 = \alpha x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon x_2$,
$f_1 = \varepsilon x_0 + \alpha x_1 + \varepsilon x_2$,
$f_2 = \varepsilon x_0 + \varepsilon x_1 + \alpha x_2$ nezískáme nového neurčitého součinitele, protože se v konečném výsledku ztratí.

a *pomocná rovnice*[5]):

$$y^3 + (B_3 + 4x_3)\, y^2 + (- B_3^2 + 4B_2 + 4B_3 x_3 + 8x_3^2)\, y$$
$$+ (- B_3^3 + 4B_3 B_2 - 8B_1) = 0. \qquad (45)$$

b) Zaveďme nyní v (45) *novou neznámou*:

$$\eta = y^2.$$

Pak totiž $(\eta_0 + \eta_1 + \eta_2)$ a $(\eta_0\eta_1 + \eta_0\eta_2 + \eta_1\eta_2)$ jsou *funkcemi kořenů* x_0, x_1, x_2, x_3 *symmetrickými*, protože η má *toliko tři* hodnoty. Tím způsobem promění se *pomocná rovnice* (45) dle vzoru [2]):

$$\eta^3 + (- 3B_3^2 + 8B_2)\, \eta^2 + [3B_3^4 - 16B_3^2 B_2 + 16B_3 B_1$$
$$+ 16B_2^2 + 64\, (x_3^4 + B_3 x_3^3 + B_2 x_3^2 + B_1 x_3)]\, \eta - (B_3^3 - 4B_3 B_2$$
$$+ 8B_1)^2 = 0.$$

Přihlédneme-li k *dané* rovnici (32), jest

$$x_3^4 + B_3 x_3^3 + B_2 x_3^2 + B_1 x_3 = - B_0,$$

a tedy *hledaná resolventa* dané *bikvadratické rovnice* (32):

$$\eta^3 + (- 3B_3^2 + 8B_2)\, \eta^2$$
$$+ [3B_3^4 - 16B_3^2 B_2 + 16B_3 B_1 + 16B_2^2 - 64B_0]\, \eta$$
$$- (B_3^3 - 4B_3 B_2 + 8B_1)^2 = 0 \qquad (46)$$

při *resolvující funkci*[6]):

$$\left.\begin{aligned} \eta_0 &= (- x_0 + x_1 + x_2 - x_3)^2, \\ \eta_1 &= (+ x_0 - x_1 + x_2 - x_3)^2, \\ \eta_2 &= (+ x_0 + x_1 - x_2 - x_3)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

---

[5]) Dle (44) jest $y_0 y_1 + y_0 y_2 + y_1 y_2$

$$\left.\begin{aligned} &= (x_2 - x_3)^2 - (x_0 - x_1)^2 \\ &+ (x_1 - x_3)^2 - (x_2 - x_0)^2 \\ &+ (x_0 - x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 \end{aligned}\right\} = 3x_3^2 - (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) - 2x_3\, (x_0 + x_1 + x_2) + 2\, (x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1 x_2),$$
$$= 3x_3^2 - (x_0 + x_1 + x_2)^2 - 2x_3\, (x_0 + x_1 + x_2) + 4\, (x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1 x_2),$$
$$y_0 y_1 + y_0 y_1 + y_1 y_2 = 8x_3^2 + 4B_3 x_3 + 4B_2 - B_3^2.$$

[6]) Mohli bychom též psáti: $\eta_0 = [(x_0 + x_3) - (x_1 + x_2)]^2$, $\eta_1 = [(x_1 + x_3) - (x_0 + x_2)]^2$, $\eta_2 = [(x_2 + x_3) - (x_0 + x_1)]^2$.

Protože (47) substitucí ($\pm x_0, \pm x_1, \pm x_2, \pm x_3$) se nemění, jest (46) též resolventou přidružené rovnice:

$$x^4 - B_3x^3 + B_2x^2 - B_1x + B_0 = 0; \tag{48}$$

tudíž i rovnice, jež poskytuje *čtverce kořenů* dané *bikvadratické rovnice*:

$$x^8 + (-B_3^2 + 2B_2)\,x^6 + (-2B_3B_1 + B_2^2 + 2B_0)\,x^4 + (2B_2B_0 - B_1^2)\,x^2 + B_0^2 = 0\ ^{7)}. \tag{49}$$

* * *

Obdobně ku (47) vyhledáme zase též *resolventy* na základě *vyšších homogenních pomocných funkcí.*

---

2. *Resolventy pro rovnici, jež poskytuje čtvrté mocniny kořenů bikvadratické rovnice dané.*

1. Užitím *pomocné funkce*:

$$\begin{cases} y_0 = \alpha x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \beta x_3^2, \\ y_1 = x_0^2 + \alpha x_1^2 + x_2^2 + \beta x_3^2, \\ y_2 = x_0^2 + x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2. \end{cases}$$

Zde jest opět $\alpha = \beta = -1$.

Resolventy nabudeme *nejsnáze* takto: Vztahujme resolvující funkci

$$\begin{cases} \eta_0 = [(x_0^2 + x_3^2) - (x_1^2 + x_2^2)]^2, \\ \eta_1 = [(x_1^2 + x_3^2) - (x_0^2 + x_2^2)]^2, \\ \eta_2 = [(x_2^2 + x_3^2) - (x_0^2 + x_1^2)]^2 \end{cases} \tag{50}$$

k rovnici (49) a položme do resolventy (46)

$$\begin{aligned} \text{za } B_3 &\ldots (-B_3^2 + 2B_2), \\ \text{,, } B_2 &\ldots (-2B_3B_1 + B_2^2 + 2B_0), \\ \text{,, } B_1 &\ldots (2B_2B_0 - B_1^2), \\ \text{,, } B_0 &\ldots B_0^2, \end{aligned} \tag{51}$$

---

[7]) $(x^4 + B_2x^2 + B_0)^2 - (B_3x^3 + B_1x)^2 = x^8 + (-B_3^2 + 2B_2)\,x^6 + (-2B_3B_1 + B_2^2 + 2B_0)\,x^4 + (2B_2B_0 - B_1^2)\,x^2 + B_0^2 = 0.$

i obdržíme *resolventu*:

$$\eta^3 + (-3B_3^4 + 12B_3^2B_2 - 16B_3B_1 - 4B_2^2 + 16B_0)\,\eta^2$$
$$+ (3B_3^8 - 24B_3^6B_2 + 32B_3^5B_1 + 56B_3^4B_2^2 - 32B_3^4B_0$$
$$- 128B_3^3B_2B_1 - 32B_3^2B_2^3 + 96B_3^2B_2B_0 + 80B_3^2B_1^2$$
$$+ 64B_3B_2^2B_1 - 128B_3B_1B_0 - 32B_2B_1^2)\,\eta - (-B_3^6$$
$$+ 6B_3^4B_2 - 8B_3^3B_1 - 8B_3^2B_2^2 + B_3^2B_0 + 16B_3B_2B_1$$
$$- 8B_1^2)^2 = 0 \tag{52}$$

nejen pro *danou* (32) *bikvadratickou* rovnici, ale i pro rovnici, jež poskytuje *4. mocniny jejích kořenů*:

$$x^{16} + [-(-B_3^2 + 2B_2)^2 + 2(-2B_3B_1 + B_2^2 + 2B_0)]\,x^{12}$$
$$+ [-2(-B_3^2 + 2B_2)(2B_2B_0 - B_1^2) + (-2B_3B_1 + B_2^2$$
$$+ 2B_0)^2 + 2B_0^2]\,x^8 + [2B_0^2(-2B_3B_1 + B_2^2 + 2B_0)$$
$$- (2B_2B_0 - B_1^2)^2]\,x^4 + B_0^4 = 0, \tag{53}$$

protože *se resolvující funkce* (50) *substitucí* ($i^r x_0$, $i^r x_1$, $i^r x_2$, $i^r x_3$) *nemění.*

* * *

2. Užitím *pomocné funkce*:

$$\begin{cases} t_0 = \alpha\beta x_0 x_3 + x_1 x_2, \\ t_1 = \alpha\beta x_1 x_3 + x_0 x_2, \\ t_2 = \alpha\beta x_2 x_3 + x_0 x_1. \end{cases}$$

Pomocnou funkci získáme obdobou ku (35), nahradíme-li *součet součinem. Snížíme-li* mocniny x_3^6, x_3^5, x_3^4 *na základě rovnice* (32)

$$x_3^4 = -B_3x_3^3 - B_2x_3^2 - B_1x_3 - B_0$$

a píšeme-li $\alpha\beta = \gamma$, obdržíme:

$$t_0t_1t_2 = (1-\gamma^2)\,B_1x_3^3 + (1-\gamma^2)\,[B_3B_1 - (1+\gamma)\,B_0]\,x_3^2$$
$$+ (1-\gamma^2)\,[-B_3B_0 + B_2B_1]\,x_3 + \gamma B_3^2B_0$$
$$- (1+\gamma)^2\,B_2B_0 + B_1^2. \tag{54}$$

Odtud vychází *methodou neurčitých součinitelův*:

$$1 - \gamma^2 = 0. \tag{55}$$

A) **Je-li** $\gamma_1 = +1$, **jest** $t_0t_1t_2 = B_3^2B_0 - 4B_2B_0 + B_1^2$ **dle (54).**

Zde vzniká ten zvláštní případ, že *pomocná funkce* sama stává se *funkcí resolvující*, jižto z té příčiny označíme písmenem u. Vede totiž

$$\begin{aligned} u_0 &= x_0x_3 + x_1x_2, \\ u_1 &= x_1x_3 + x_0x_2, \\ u_2 &= x_2x_3 + x_0x_1. \end{aligned} \tag{56}$$

bezprostředně k resolventě Lagrange'ově:

$$u^3 - B_2u^2 + (B_3B_1 - 4B_0)\,u - (B_3^2B_0 - 4B_2B_0 + B_1^2) = 0 \text{ [8]}, \tag{57}$$

jež jest zároveň *resolventou pro rovnici* (*49*), *protože* (*56*) *substitucí* ($\pm x_0$, $\pm x_1$, $\pm x_2$, $\pm x_3$) *se nemění.*

Aby případ *A*) podával *resolventu* pro rovnici, jež poskytuje *4. mocniny kořenů* dané *bikvadratické* rovnice (32), musili bychom učiniti *resolvující funkcí* u_0^2, u_1^2, u_2^2 *a resolventou* důsledně potom:

$$\begin{aligned}[u^3 - B_2u^2 + (B_3B_1 - 4B_0)\,u - (B_3^2B_0 - 4B_2B_0 \\ + B_1^2)]\,.\,[u^3 + B_2u^2 + (B_3B_1 - 4B_0)\,u + (B_3^2B_0 \\ - 4B_2B_0 + B_1^2)] = 0\end{aligned}$$

pro rovnici (53). — (Srov. níže (62).)

B) Je-li $\gamma_2 = -1$, jest *pomocná funkce*:

$$\left\{\begin{aligned} y_0 &= -x_0x_3 + x_1x_2, \\ y_1 &= -x_1x_3 + x_0x_2, \\ y_2 &= -x_2x_3 + x_0x_1, \end{aligned}\right. \tag{58}$$

a dle (54) *součin*: $y_0y_1y_2 = -B_3^2B_0 + B_1^2$.

a) Dle (58) a (33) vychází *pomocná rovnice*:

$$\begin{aligned} y^3 - (B_2 + 2B_3x_3 + 2x_3^2)\,y^2 + [B_3B_1 + 2\,(B_3B_2 - B_1)\,x_3 \\ + 2B_3^2x_3^2 + 2B_3x_3^3]\,y - (-B_3^2B_0 + B_1^2) = 0. \end{aligned}$$

---

[8]) Zajímavo jest, že i v *Lagrange'ově řešení* vystačíme *resolventou* (46). Protože $[(x_0 + x_3) - (x_1 + x_2)]^2 = (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4\,(x_0x_1 + x_0x_2 + x_0x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 4\,(x_0x_3 + x_1x_2)$, obdržíme *Lagrange'ovu resolventu,* když do (46) dosadíme $\eta = B_3^2 - 4B_2 + 4u$. Jinak též obráceně obdržíme z Lagrange'ovy resolventu (46), dosadíme-li do (57)

$$u = \tfrac{1}{4}\,(\eta - B_3^2 + 4B_2).$$

b) Abychom *z pomocné rovnice* získali příslušnou *resolventu*, zavedeme dle [2])

$$\eta' = y^2,$$

čímž vyplyne:

$$\eta'^3 + (2B_3B_1 - B_2^2 + 4B_0)\,\eta'^2 + (-2B_3^2B_2B_0 + B_3^2B_1^2 + 8B_3B_1B_0 - 2B_2B_1^2)\,\eta' - (B_3^2B_0 - B_1^2)^2 = 0 \qquad (59)$$

Resolventa (59) opírá se o *resolvující funkci*:

$$\begin{aligned} \eta'_0 &= (x_0x_3 - x_1x_2)^2, \\ \eta'_1 &= (x_1x_3 - x_0x_2)^2, \\ \eta'_2 &= (x_2x_3 - x_0x_1)^2, \end{aligned} \qquad (60)$$

kteráž *substitucí* (i^rx_0, i^rx_1, i^rx_2, i^rx_3) *se neměníc*, pomáhá též řešiti *zvodnou rovnici* (53).

* * *

Poznámka II. Též v případě *B*) lze dokázati, že
1. resolventa (59) ze (46),
a 2. naopak (46) z (59) může býti odvozena.

1. *Postup* jest tento: Z resolventy (46) vyvedeme dle [8]) *resolventu* (57); z té pak dle [2]) položíce $\varphi = u^2$ obdržíme:

$$\varphi^3 + (2B_3B_1 - B_2^2 - 8B_0)\,\varphi^2 + (-2B_3^2B_2B_0 + B_3^2B_1^2 - 8B_3B_1B_0 + 8B_2^2B_0 - 2B_2B_1^2 + 16B_0^2)\,\varphi - (B_3^2B_0 - 4B_2B_0 + B_1^2)^2 = 0. \qquad (61)$$

Když konečně do (61) $\varphi = \eta' + 4B_0$ dosadíme, objeví se *resolventa* (59). — Správnost postupu vysvítá z *resolvujících funkcí*, jak následují:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= [(x_0 + x_3) - (x_1 + x_2)]^2 && \text{při } (46), \\ u_0 &= (x_0x_3 + x_1x_2) && \text{„ } (57), \\ \varphi_0 &= (x_0^2x_3^2 + x_1^2x_2^2 + 2B_0) && \text{„ } (61), \\ \eta'_0 &= (x_0x_3 - x_1x_2)^2 && \text{„ } (59). \end{aligned}$$

Pro krátkost opomíjíme funkce: η_1, η_2; u_1, u_2; φ_1, φ_2; η'_1, η'_2.

2. Zde opět nastává *postup*:

$$\eta' = \varphi - 4B_0, \quad \varphi = u^2, \quad u = \tfrac{1}{4}(\eta - B_3^2 + 4B_2); \text{ tudíž}$$
$$\eta' = \tfrac{1}{16}[\eta^2 + (-2B_3^2 + 8B_2)\,\eta + B_3^4 - 8B_3^2B_2 + 16B_2^2 - 64B_0].$$

Dosadíme-li poslední výsledek do (59), nabudeme *rovnice 6. stupně*, která obsahuje *hledanou resolventu* (46) jakožto jednoho činitele; a toho vyhledati jest obtížno.

Prospěšněji dosadí se nejprve $\eta' = u^2 - 4B_0$, čímž vyplyne:

$$\begin{aligned} u^6 &+ (2B_3B_1 - B_2 - 8B_0)\,u^4 + (-2B_3^2B_2B_0 + B_3^2B_1^2 \\ &- 8B_3B_1B_0 + 8B_2^2B_0 - 2B_2B_1^2 + 16B_0^2)\,u^2 - B_3^4B_0^2 \\ &+ 8B_3^2B_2B_0^2 - 2B_3^2B_1^2B_0 - 16B_2^2B_0^2 + 8B_2B_1^2B_0 - B_1^4 = 0. \end{aligned} \tag{62}$$

neboli

$$\begin{aligned} [u^3 - B_2u^2 &+ (B_3B_1 - 4B_0)\,u - (B_3^2B_0 - 4B_2B_0 \\ &+ B_1^2)] \,.\, [u^3 + B_2u^2 + (B_3B_1 - 4B_0)\,u + (B_3^2B_0 \\ &- 4B_2B_0 + B_1^2)] = 0 \end{aligned}$$

a potom teprv dle [8]) se položí $u = \frac{1}{4}(\eta - B_3^2 + 4B_2)$. Tak se objeví *resolventa* (46) jakožto *činitel* posledního výsledku.

Rovnice (62), kteráž jest 6. stupně, jest vlastně resolventou pro danou bikvadratickou rovnici při úplné resolvující funkci $(x_0x_3 + x_1x_2)^2$.

---

3. Resolventy pro rovnici, jež poskytuje šesté mocniny kořenů bikvadratické rovnice (32).

1. Užitím *pomocné funkce*:

$$\left\{\begin{aligned} y_0 &= \alpha x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + \beta x_3^3, \\ y_1 &= x_0^3 + \alpha x_1^3 + x_2^3 + \beta x_3^3, \\ y_2 &= x_0^3 + x_1^3 + \alpha x_2^3 + \beta x_3^3. \end{aligned}\right.$$

Protože opět $\alpha = \beta = -1$, jest *resolvující funkce*:

$$\left.\begin{aligned} \eta_0 &= [(x_0^3 + x_3^3) - (x_1^3 + x_2^3)]^2, \\ \eta_1 &= [(x_1^3 + x_3^3) - (x_0^3 + x_2^3)]^2, \\ \eta_2 &= [(x_2^3 + x_3^3) - (x_0^3 + x_1^3)]^2, \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

která *substitucí*

$$(\pm\,\omega^r x_0,\ \pm\,\omega^r x_1,\ \pm\,\omega^r x_2,\ \pm\,\omega^r x_3) \tag{64}$$

se nemění.

Proto vzhledem ku (63) vztahujme hned *resolvující funkci* k rovnici, jež poskytuje *trojmoci kořenů* (32) a dosaďme do (46):

$$
\begin{aligned}
\text{za } B_3 \ldots & (B_3^3 - 3B_3B_2 + 3B_1) = B'_3, \\
\text{„ } B_2 \ldots & (3B_3^2B_0 - 3B_3B_2B_1 + B_2^3 \\
& - 3B_2B_0 + 3B_1^2) = B'_2, \\
\text{„ } B_1 \ldots & (3B_3B_0^2 - 3B_2B_1B_0 + B_1^3) = B'_1, \\
\text{„ } B_0 \ldots & B_0^3 = B'_0.
\end{aligned}
$$

dle *vzoru* [9]). Tím získáme *resolventu*:

$$
\eta^3 + (-3B'^2_3 + 8B'_2)\eta^2 + (3B'^4_3 - 16B'^2_3B'_2 + 16B'_3B'_1 + 16B'^2_2 - 64B'_0)\eta - (B'^3_3 - 4B'_3B'_2 + 8B'_1)^2 = 0, \tag{65}
$$

nejen pro *danou bikvadratickou*, ale vzhledem ku (64) i pro rovnici, jež poskytuje *šesté mocniny jejích kořenův*:

$$
x^{24} + (-B'^2_3 + 2B'_2)x^{18} + (-2B'_3B'_1 + B'^2_2 + 2B'_0)x^{12} + (2B'_2B'_0 - B'^2_1)x^6 + B'^2_0 = 0. \tag{66}
$$

* * *

2. Užitím *pomocné funkce*:

$$
\begin{cases}
y_0 = \alpha x_1x_2x_3 + x_0x_2x_3 + x_0x_1x_3 + \beta x_0x_1x_2, \\
y_1 = x_1x_2x_3 + \alpha x_0x_2x_3 + x_0x_1x_3 + \beta x_0x_1x_2, \\
y_2 = x_1x_2x_3 + x_0x_2x_3 + \alpha x_0x_1x_3 + \beta x_0x_1x_2.
\end{cases}
$$

---

[9]) Je-li $x^4 + B_3x^3 + B_2x^2 + B_1x + B_0 = 0$,

bude $$(x^3 + B_1)x + B_2x^2 = -(B_3x^3 + B_0) \tag{I.}$$

Potom

$$
\{(x^3 + B_1)^3x^3 + 3B_2x^3(x^3 + B_1)[(x^3 + B_1)x + B_2x^2] + B_2^3x^6\} + (B_3x^3 + B_0)^3 = 0.
$$

Dosadíme-li (I), bude potom:

$$
\{(x^3 + B_1)^3x^3 - 3B_2(x^6 + B_1x^3)(B_3x^3 + B_0) + B_2^3x^6\} + (B_3x^3 + B_0)^3 = 0.
$$

Provedeme li výkony:

$$
x^{12} + (B_3^3 - 3B_3B_2 + 3B_1)x^9 + (3B_3^2B_0 - 3B_3B_2B_1 + B_2^3 - 3B_2B_0 + 3B_1^2)x^6 + (3B_3B_0^2 - 3B_2B_1B_0 + B_1^3)x^3 + B_0^3 = 0
$$

neboli zkrátka:

$$
x^{12} + B'_3x^9 + B'_2x^6 + B'_1x^3 + B'_0 = 0.
$$

Ježto zase $\alpha = \beta = -1$, jest *resolvující funkcí*:

$$\begin{cases} \eta_0 = [-x_1x_2x_3 + x_0x_1x_3 + x_0x_1x_3 - x_0x_1x_2]^2, \\ \eta_1 = [x_1x_2x_3 - x_0x_2x_3 + x_0x_1x_3 - x_0x_1x_2]^2, \\ \eta_2 = [x_1x_2x_3 + x_0x_2x_5 - x_0x_1x_3 - x_0x_1x_2]^2, \end{cases} \tag{67}$$

která *týmiž substitucemi* jako (63) *se nemění*, a *resolventou*:

$$\eta^3 + (8B_2B_0 - 3B_1^2)\eta^2 + (16B_3B_1B_0^2 + 16B_2^2B_0 - 16B_2B_1^2B_0 + 3B_1^4 - 64B_0^3)\eta - (8B_3B_0^2 - 4B_2B_1B_0 + B_1^3)^2 = 0, \tag{68}$$

jež opět *kromě dané bikvadratické* pomáhá řešiti i *zvodnou rovnici* (66).

Resolventu (68) odvodíme nejsnáze *užitím rovnice s převratnými hodnotami* kořenů (32):

$$\xi^4 + \frac{B_1}{B_0}\xi^3 + \frac{B_2}{B_0}\xi^2 + \frac{B_3}{B_0}\xi + \frac{1}{B_0} = 0.$$

na vzor (46), jako jsme již učinili *obdobně v Pozn. I.*

Poněvadž $\xi = \frac{1}{x}$, jest $\eta'_0 = (-\xi_0 + \xi_1 + \xi_2 - \xi_3)^2$

$$= \frac{(-x_1x_2x_3 + x_0x_2x_3 + x_0x_1x_3 - x_0x_1x_2)^2}{B_0^2};$$

tedy $\eta'_0 = \frac{\eta_0}{B_0^2}$, $\eta'_1 = \frac{\eta_1}{B_0^2}$, $\eta'_2 = \frac{\eta_2}{B_0^2}$ a obecně $\eta' = \frac{\eta}{B_0^2}$.

Dosadíme-li *tuto* hodnotu do *rovnice dle* (46) *upravené*:

$$\eta'^3 + \left(-\frac{3B_1^2}{B_0^2} + \frac{8B_2}{B_0}\right)\eta'^2 + \left(\frac{3B_1^4}{B_0^4} - \frac{16B_1^2B_2}{B_0^3} + \frac{16B_1B_3}{B_0^2} + \frac{16B_2^2}{B_0^2} - \frac{64}{B_0}\right)\eta' - \left(\frac{B_1^3}{B_0^3} - \frac{4B_1B_2}{B_0^2} + \frac{8B_3}{B_0}\right)^2 = 0$$

obdržíme *resolventu* (68).

* * *

3. Užitím *pomocné funkce*:

$$\begin{cases} t_0 = \gamma(x_0^2x_3 + x_0x_3^2) + (x_1^2x_2 + x_1x_2^2), \\ t_1 = \gamma(x_1^2x_3 + x_1x_3^2) + (x_0^2x_2 + x_0x_2^2), \\ t_2 = \gamma(x_2^2x_3 + x_2x_3^2) + (x_0^2x_1 + x_0x_1^2). \end{cases}$$

Pomocná funkce poskytuje analogicky ku (56) a (60) případy *dva*:

$$A)\ \gamma_1 = +1,$$
$$B)\ \gamma_2 = -1.$$

A) Zde vede *pomocná funkce,* jižto označíme v, *bezprostředně k resolventě,* protože má *toliko 3 hodnoty.*

Jest tudíž $v_0 = (x_0^2 x_3 + x_0 x_3^2) + (x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2)$,

$$v_1 = (x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2) + (x_0^2 x_2 + x_0 x_2^2),$$
$$v_2 = (x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2) + (x_0^2 x_1 + x_0 x_1^2)$$

funkcí resolvující. Protože (69) *substitucí* ($\omega^r x_0$, $\omega^r x_1$, $\omega^r x_2$, $\omega^r x_3$) *se nemění,* přísluší *hledaná resolventa*:

$$v^3 + (B_3 B_2 - 3B_1)\, v^2 + (B_3^3 B_1 - 4B_3^2 B_0 - 2B_3 B_2 B_1 + 3B_1^2)\, v + (B_3^5 B_0 - 4B_3^3 B_2 B_0 + 4B_3^2 B_1 B_0 + B_3 B_2 B_1^2 - B_1^3) = 0. \tag{70}$$

též k *rovnici,* jež[9]) poskytuje *trojmoci* kořenů (32).

Nejsnáze ustanovíme (70), když do (46) za

$$\eta = \frac{1}{B_3}\,(B_3^3 - 4B_3 B_2 + 4B_1 - 4v) \text{ dosadíme.}$$

Jest totiž $(x_0 + x_1 + x_2 + x_3)\,(x_0 x_3 + x_1 x_2) = v_0 - B_1$, tedy dle [8])

$$-\frac{B_3}{4}\,(\eta_0 - B_3^2 + 4B_2) = v_0 - B_1,$$

a *obecně*
$$-\frac{B_3}{4}\,(\eta - B_3^2 + 4B_2) = v - B_1. \tag{71}$$

Resolventa (70) jest *obdobna Lagrange'ově*; jest však *mnohem složitější.*

Pišme ji ve *tvaru jednodušším*:

$$v^3 + B''_2 v^2 + B''_1 v + B''_0 = 0.$$

Aby případ *A*) obsahoval *resolventu* pro *rovnici,* která poskytuje *šesté mocniny kořenů* (32), bylo by potřebí učiniti *funkcí resolvující* v_0^2, v_1^2, v_2^2 a *důsledně* potom *resolventou*:

$$(v^3 + B''_2 v^2 + B''_1 v + B''_0)\,(v^3 - B''_2 v^2 + B''_1 v - B''_0)$$
$$\equiv v^6 + (-B''^2_2 + 2B''_1)\, v^4 + (-2B''_2 B''_0 + B''^2_1)\, v^2 - B''^2_0 = 0$$

pro rovnici (66).

B) Dle (71) jest $x_0x_3 + x_1x_2 = \frac{B_1 - v_0}{B_3}$ a proto

$$x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = B_2 - \frac{B_1 - v_0}{B_3}.$$

Odtud
$$\eta'_0 = [(x_0^2x_3 + x_0x_3^2) - (x_1^2x_2 + x_1x_2^2)]^2$$
$$= v_0^2 - 4B_0\left(B_2 - \frac{B_1 - v_0}{B_3}\right);$$

neboli obecně:
$$\eta' = v^2 - \frac{4B_0}{B_3}v - 4B_2B_0 + \frac{4B_1B_0}{B_3}$$
$$= w^2 - 4B_2B_0 + \frac{4B_3B_1B_0 - 4B_0^2}{B_3^2},$$

když
$$\pm w = v - \frac{2B_0}{B_3}.$$

Potom jest dle (71)
$$\eta = \frac{1}{B_3^2}(B_3^4 - 4B_3^2B_2 + 4B_3B_1 - 8B_0 - 4B_3w). \qquad (72)$$

Je-li tedy
$$\eta'_0 = [(x_0^2x_3 + x_0x_3^2) - (x_1^2x_2 + x_1x_2^2)]^2,$$
$$\eta'_1 = [(x_2^2x_3 + x_1x_3^2) - (x_0^2x_2 + x_0x_2^2)]^2,$$
$$\eta'_2 = [(x_2^2x_3 + x_2x_3^2) - (x_0^2x_1 + x_0x_1^2)]^2 \qquad (73)$$

funkcí resolvující, dosadíme do (46) dle (72) za η, *v nové rovnici* zavedeme $w^2 = \psi$, a ve *vzniklé* položíme za

$$\psi = \eta' + 4B_2B_0 - \frac{4B_3B_1B_0 - 4B_0^2}{B_3^2},$$

čímž obdržíme *resolventu*:

$$\begin{aligned}\eta'^3 &+ (2B_3^3B_1 - B_3^2B_2^2 - 8B_3^2B_0 + 2B_3B_2B_1 + 8B_2B_0\\
&- 3B_1^2)\,\eta'^2 + (-2B_3^6B_2B_0 + B_3^6B_1^2 - 2B_3^5B_1B_0\\
&+ 8B_3^4B_2^2B_0 - 4B_3^4B_2B_1^2 + 4B_3^4B_0^2 + 4B_3^3B_2B_1B_0 + 6B_3^3B_1^3\\
&- 8B_3^2B_2^3B_0 + 2B_3^2B_2^2B_1^2 - 32B_3^2B_2B_0^2 - 28B_3^2B_1^2B_0\\
&+ 16B_3B_2^2B_1B_0 - 4B_3B_2B_1^3 + 80B_3B_1B_0^2 + 16B_2^2B_0^2\\
&- 16B_2B_1^2B_0 + 3B_1^4 - 64B_0^3)\,\eta' - (B_3^5B_0 - 4B_3^3B_2B_0\\
&+ 6B_3^2B_1B_0 + 4B_3B_2^2B_0 - B_3B_2B_1^2 - 8B_3B_0^2 - 4B_2B_1B_0\\
&+ B_1^3)^2 = 0 \qquad (74)\end{aligned}$$

pro rovnici (66), protože *se* (73) *substitucí* ($\pm\,\omega^r x_0$, $\pm\,\omega^r x_1$, $\pm\,\omega^r x_2$, $\pm\,\omega^r x_3$) *nemění.*

Podobným způsobem, jenž připomíná *postup v* ***Pozn. II. 2.*** *naznačený*, mohli bychom též od (74) ku (46) *se vrátiti.*

* * *

Dodatek.

Resolventy (70) a (74) lze též odvoditi *bezprostředně.*

A) Označme zkrátka

$$v_0 + v_1 + v_2 = \Sigma v_0,$$
$$v_0 v_1 + v_0 v_2 + v_1 v_2 = \Sigma v_0 v_1.$$

Přihlédneme-li k [9]) a k [7]), určíme snadno:

$$\alpha)\quad \Sigma v_0 = \Sigma x_0^2 x_1 = -B_3 B_2 + 3B_1 = -B''_2.$$

$$\begin{aligned}
\beta)\quad \Sigma v_0 v_1 &= 3\Sigma x_0^2 x_1^2 x_2^2 + \Sigma x_0^3 x_1^2 x_2 + \Sigma x_0^4 x_1 x_2 \\
&= 3\Sigma x_0^2 x_1^2 x_2^2 \\
&\qquad + [\Sigma x_0^2 x_1 \Sigma x_0 x_1 x_2 - 2\Sigma x_0^2 x_1^2 x_2 x_3 - 3\Sigma x_0^3 x_1 x_2 x_3] \\
&\qquad + [\Sigma x_0^3 \Sigma x_0 x_1 x_2 - \Sigma x_0^3 x_1 x_2 x_3] \\
&= (-6B_2 B_0 + 3B_1^2) \\
&\quad + [(B_3 B_2 - 3B_1) B_1 - 2B_2 B_0 - 3(B_3^2 - 2B_2) B_0] \\
&\quad + [(B_3^3 - 3B_3 B_2 + 3B_1) B_1 - (B_3^2 - 2B_2) B_0].
\end{aligned}$$

$$\Sigma v_0 v_1 = B_3^3 B_1 - 4B_3^2 B_0 - 2B_3 B_2 B_1 + 3B_1^2 = B''_1.$$

γ) Součin $v_0 v_1 v_2$ obsahuje *skupiny*:

	$\Sigma x_0^3 x_1^3 x_2^3$,	$\Sigma x_0^3 x_1^2 x_2^2 x_3^2$,	$\Sigma x_0^4 x_1^3 x_2^2$,	$\Sigma x_0^4 x_1^2 x_2^2 x_3$,	$\Sigma x_0^5 x_1^2 x_2 x_3$,	$\Sigma x_0^6 x_1 x_2 x_3$
se	4,	4,	24,	12,	12,	4 variacemi.

Protože *součin* sám obsahuje 64 členy, z nichž 8 náleží skupině $\Sigma x_0^3 x_1^3 x_2^3$, a tedy na všecky ostatní skupiny 56 členů zbývá, není jinak možno, než že *každá* z ostatních skupin vyskytá se *toliko jednou s naznačeným* počtem *variací.* Můžeme tedy psáti:

$$v_0 v_1 v_2 = 2\Sigma x_0^3 x_1^3 x_2^3 + \Sigma x_0^3 x_1^2 x_2^2 x_3^2 + \Sigma x_0^4 x_1^3 x_2^2 + \Sigma x_0^4 x_1^2 x_2^2 x_3$$
$$+ \Sigma x_0^5 x_1^2 x_2 x_3 + \Sigma x_0^6 x_1 x_2 x_3.$$

Poněvadž

$$\Sigma x_0^2 x_1^2 x_2^2 \,.\, \Sigma x_0^2 x_1 = 3\Sigma x_0^3 x_1^2 x_2^2 x_3^2 + \Sigma x_0^4 x_1^3 x_2^2 + \Sigma x_0^4 x_1^2 x_2^2 x_3 \qquad (\dagger)$$

a $\quad \Sigma x_0^4 \,.\, \Sigma x_0 = \Sigma x_0^4 x_1 + \Sigma x_0^5$, kdež $(\Sigma x_0^2)^2 - 2\Sigma x_0^2 x_1^2 = \Sigma x_0^4$,

vyplyne $\quad v_0 v_1 v_2 = 2\Sigma x_0^3 x_1^3 x_2^3 + \{\Sigma x_0^2 x_1^2 x_2^2 \Sigma x_0^2 x_1 - 2\Sigma x_0^3 x_1^2 x_2^2 x_3^2\}$

$$+ B_0 \Sigma x_0^4 \,.\, \Sigma x_0;$$

$$\begin{aligned} v_0 v_1 v_2 = {} & (-6B_3 B_0^2 + 6B_2 B_1 B_0 - 2B_1^3) \\ & + \{-(2B_2 B_0 - B_1^2)(-B_3 B_2 + 3B_1) + 2B_3 B_0^2\} \\ & - B_3 B_0 \,[(B_3^2 - 2B_2)^2 + 4B_3 B_1 - 2B_2^2 - 4B_0], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_0 v_1 v_2 = {} & - B_3^5 B_0 + 4B_3^3 B_2 B_0 - 4B_3^2 B_1 B_0 \\ & - B_3 B_2 B_1^2 + B_1^3 = - B''_0. \end{aligned}$$

Tím získali jsme *resolventu* (70):

$$v^3 + B''_2 v^2 + B''_1 v + B''_0 = 0.$$

B) a) Označíme-li *pomocnou funkci* y, bude:

$$\begin{aligned} -y_0 &= (x_0^2 x_3 + x_0 x_3^2) - (x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2), \\ -y_1 &= (x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2) - (x_0^2 x_2 + x_0 x_2^2), \\ -y_2 &= (x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2) - (x_0^2 x_1 + x_0 x^2). \end{aligned}$$

Znaménkovým pravidlem se přesvědčíme, že $-y_0 y_1 y_2$ obsahuje jen *dvě záporné skupiny* a to:

$$\Sigma x_0^4 x_1^3 x_2^2 \text{ a } \Sigma x_2^3 x_1^3 x_2^3,$$

odkud vysvítá, že

$$-y_0 y_1 y_2 = v_0 v_1 v_2 - 2\Sigma x_0^4 x_1^3 x_2^2 - 4\Sigma x_0^3 x_1^3 x_2^3.$$

Avšak dle †)

$$\begin{aligned} \Sigma x_0^4 x_1^3 x_2^2 &= \Sigma x_0^2 x_1^2 x_2^2 \,.\, \Sigma v_0 - \Sigma x_0^4 x_1^2 x_2^2 x_3 - 3\Sigma x_0^3 x_1^2 x_2^2 x_3^2 \\ &= B_3^2 B_1 B_0 + 2B_3 B_2^2 B_0 - B_3 B_2 B_1^2 + 2B_3 B_0^2 \\ &\qquad - 8B_2 B_1 B_0 + 3B_1^2, \end{aligned}$$

protože

$$\Sigma x_0^4 x_1^2 x_2^2 x_3 = B_0 (\Sigma x_0^2 \Sigma x_0 x_1 x_2 + B_3 B_0).$$

Tedy

$$\begin{aligned} -y_0 y_1 y_2 = {} & - B_3^5 B_0 + 4B_3^3 B_2 B_0 - 6B_3^2 B_1 B_0 - 4B_3 B_2^2 B_0 \\ & + B_3 B_2 B_1^2 + 8B_3 B_0^2 + 4B_2 B_1 B_0 - B_1^3. \end{aligned}$$

Pišme zkrátka

$$-y_0 y_1 y_2 = R.$$

Než přikročíme k sestavení hledané *pomocné rovnice*, musíme si zjednati Σy_0, $\Sigma y_0 y_1$, jež jsou *racionálními funkcemi* nejen *daných součinitelův*, ale též *kořene* x_3.

Za tím účelem označme:

$$x_0^i + x_1^i + x_2^i = Sx_0^i,$$
$$x_0^i x_1^i + x_0^i x_2^i + x_1^i x_2^i = Sx_0^i x_1^i, \qquad (i > 0)$$
$$x_0^i x_1^j + x_0^i x_2^j + x_1^i x_2^j + x_0^j x_1^i + x_0^j x_2^i + x_1^j x_2^i = Sx_0^i x_1^j,$$
$$(i > j > 0).$$

α) Potom jest

$$-\Sigma y_0 = x_3 Sx_0^2 + x_3^2 Sx_0 - (Sx_0 x_1 \,.\, Sx_0 - 3x_0 x_1 x_2).$$

Dosadíme-li za $Sx_0^2 = (Sx_0)^2 - 2Sx_0 x_1$, obdržíme dle (33):

$$-\Sigma y_0 = (B_3 B_2 - 3B_1) + 2\,(B_3^2 - 2B_2)\,x_3 - 2B_3 x_3^2 - 4x_3^3$$

neboli zkrátka

$$-\Sigma y_0 = \quad L \quad + \quad Kx_3 \quad - 2B_3 x_3^2 - 4x_3^3$$

β) Podobně určíme

$$\Sigma y_0 y_1 = x_3^4 Sx_0 x_1 + x_3^3 Sx_0^2 x_1 - x_3^2 Sx_0^2 x_1^2 - x_3^2 Sx_0^3 x_1 - x_3 Sx_0^4 x_1$$
$$+ x_0 x_1 x_2\,(Sx_0^3 + Sx_0^2 x_1 + 3x_0 x_1 x_2).$$

Snížíme-li mocniny pod x_3^4, bude dle (33):

$$Sx_0^2 = -x_3^2 + B_3^2 - 2B_2,$$
$$Sx_0^2 x_1 = 2x_3^3 + B_3 x_3^2 + (-B_3^2 + 2B_2)\,x_3 + (-B_3 B_2 + 3B_1),$$
$$Sx_0^3 = -x_3^3 - B_3^3 + 3B_3 B_2 - 3B_1,$$
$$Sx_0^3 x_1 = -B_3 x_3^3 - 2B_2 x_3^2 + (B_3^3 - 3B_3 B_2 + B_1)\,x_3$$
$$+ (B_3^2 B_2 - B_3 B_1 - 2B_2^2 + 2B_0),$$
$$Sx_0^4 = B_3 x_3^3 + B_2 x_3^2 + B_1 x_3$$
$$+ (B_3^4 - 4B_3^2 B_2 + 4B_3 B_1 + 2B_2^2 - 3B_0),$$
$$Sx_0^2 x_1^2 = B_3^2 x_3^3 + (B_3^3 - B_3 B_2 + B_1)\,x_3^2 + (2B_3 B_1 - 2B_0)\,x_3$$
$$+ (2B_3^2 B_1 - B_3 B_2^2 - 3B_3 B_0 + B_2 B_1),$$
$$Sx_0^4 x_1 = (B_3^2 - 2B_2)\,x_3^3 + (B_3 B_2 - 2B_1)\,x_3^2$$
$$+ (-B_3^4 + 4B_3^2 B_2 - 3B_3 B_1 - 2B_2^2 + 2B_0)\,x_3$$
$$+ (-B_3^3 B_2 + B_3^2 B_1 + 3B_3 B_2^2 - 5B_2 B_1).$$

a potom:

$$\Sigma y_0 y_1 = (B_3^3 B_1 + 2B_3^2 B_0 - 2B_3 B_2 B_1 - 4B_2 B_0 + 3B_1^2)$$
$$+ (2B_3^3 B_2 - 4B_3 B_2^2 + 4B_2 B_1)\, x_3$$
$$+ (2B_3^4 - 4B_3^2 B_2 + 6B_3 B_1 - 8B_0)\, x_3^2$$
$$+ (2B_3^3 - 4B_3 B_2 + 4B_1)\, x_3^3,$$

neboli zkrátka:

$$\Sigma y_0 y_1 = Q + Px_3 + Nx_3^2 + Mx_3^3.$$

Odtud vyplývá *pomocná rovnice*:

$$y^3 + (L + Kx_3 - 2B_3 x_3 - 4x_3^2)\, y^2$$
$$+ (Q + Px_3 + Nx_3^2 + Mx_3^3)\, y + R = 0.$$

b) *Resolventu* získáme *z pomocné rovnice zavedením resolvující funkce* $\eta' = y^2$.

Řiďme se opět vzorem [2]), i najdeme *resolventu* nikoli bez složitých početních redukcí. Tyto se nám zjednoduší, pomníme-li, že (*substitucí* $\eta' = y^2$) v součinitelích *resolventy* x_3 naprosto zmizí; t. j. snížíme-li mocniny pod x_3^5, musí v nich

$$x_3^4,\quad B_3 x_3^3,\quad B_2 x_3^2,\quad B_1 x_3$$

míti *společného činitele*; neboť jen tak, když položíme

$$x_3^4 + B_3 x_3^3 + B_2 x_3^2 + B_1 x_3 = -B_0,$$

rázem x_3 zmizí.

Dle [2]) obdržíme *rovnici*, jež po *redukci* stane se *hledanou resolventou*:

$$\eta'^3 + [-(L + Kx_3 - 2B_3 x_3^2 - 4x_3^3)^2$$
$$+ 2\,(Q + Px_3 + Nx_3^2 + Mx_3^3)]\, \eta'^2$$
$$+ [-2LR - 2KRx_3 + 4B_3 Rx_3^2 + 8Rx_3^2$$
$$+ (Q + Px_3 + Nx_3^2 + Mx_3^3)^2]\, \eta' - R^2 = 0. \qquad (\dagger\dagger)$$

Pišme zkrátka:

$$\eta'^3 + D_2 \eta'^2 + D_1 \eta' - R^2 = 0$$

α) *Zredukujme nejprve* D_2.

Aniž provedeme dopodrobna *všecky* naznačené výkony, shledáme, že v mnohočlenu D_2 *nejvyšší mocnina* x_3^4 (po eliminaci x_3^5. x_3^6) má *součinitele*: $(-4B_3^2 + 8K + 16B_2)$.

Potom ovšem *všecky* členy, jež obsahují x_3, nutně *zahrnuty jsou ve výrazu*:

$$(-4B_3^2 + 8K + 16B_2)(x_3^4 + B_3x_3^3 + B_2x_3^2 + B_1x_3),$$

za který položíme

$$(4B_3^2 - 8K - 16B_2)\,B_0\,.$$

Tak vyplyne

$$D_2 = [(4B_3^2 - 8K - 16B_2)\,B_0 - L^2 + 2Q].$$

β) *Podobně určeme* D_1.

Snížíme-li opět v D_1 mocniny pod x_3^5, objeví se při x_3^4 *součinitel*:

$$(N^2 + 2MP - M^2B_2 - 2MNB_3 + M^2B_3^2).$$

Proto dle (††) ku *dvojčlenu* ($Q^2 - 2LR$) přičteme:

$$-(N^2 + 2MP - M^2B_2 - 2MNB_3 + M^2B_3^2)\,B_0;$$

i bude

$$D_1 = [-N^2B_0 - 2MPB_0 + M^2B_2B_0 + 2MNB_3B_0 - M^2B_3^2B_0 + Q^2 - 2LR].$$

Dosadíme-li za L, M, N, P, Q, R příslušné hodnoty, objeví se nám

$$\eta'^3 + D_2\eta'^2 + D_1\eta' - R^2 = 0$$

s resolventou (74) *totožnou*.

* * *

Poznámka III. Vyskytnuvší se *resolventa 6tého stupně* (62) nutí k poznámce, že z *obecného hlediska řešení bikvadratické* rovnice vyžaduje *resolventy stupně šestého*, která však *na kubickou* převésti se dá.

Máme-li totiž řešiti *methodou Tschirnhausenovou*[10]), musíme *danou bikvadratickou* rovnici pomocí *nové neznámé*

$$z = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

proměniti *v jinou*:

$$z^4 + b_3z^3 + b_2z^2 + b_1z + b_0 = 0,$$

---

[10]) *List ku Leibnitzovi* v *Act. erud. Lip.* z r. 1683. — *Grunert's Archiv* XLI. str. 105.

a tu pak *methodou neurčitých součinitelů* a_2, a_1, a_0 převésti na *binomickou*: $z^4 + c_0 = 0$, která již je *řešitelna*.

Však *eliminace mocnin* z^3, z^2, z vyžaduje *řešení rovnice 6.* ($=$ 1. 2. 3.) *stupně.*

Lagrange ji redukoval na *kubickou* i doufal, že *podobným* způsobem bude moci býti zredukována na *nižší stupeň* též *Tschirnhausenova resolventa obecné rovnice pátého stupně*, která dosahuje *stupně 24.* ($=$ *1. 2. 3. 4*)*ho.* —

Logický kořen té okolnosti, „že se *resolventa bikvadratické rovnice* se 6ho *stupně* na *stupeň třetí snížiti dá*", sluší hledati v tom, že lze *bikvadratickou rovnici* též na *trinomickou*

$$z^4 + d_2 z^2 + d_0 = 0$$

za účelem řešení *převésti*, při čemž *Tschirnhausenova eliminace* vyžaduje *toliko* řešení rovnice (*1* . *3*)*ho stupně.*

III. Závěrek.

Buďtež x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 kořeny *obecné* rovnice *pátého stupně*:

$$x^5 + C_4 x^4 + C_3 x^3 + C_2 x^2 + C_1 x + C_0 = 0. \tag{75}$$

Jest dokázati, že u *vyhledávání její resolventy* již sám *přípravný výkon a*) jest *nemožný*. — Dělíme-li totiž danou rovnici *kořenovým činitelem* ($x - x_4$), užijíce *methody Hornerovy, nabudeme* výsledků:

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 &= -C_4 - x_4, \\ x_0x_1 + x_0x_2 + x_0x_3 + x_1x_2 & \\ + x_1x_3 + x_2x_3 &= C_3 + C_4x_4 + x_4^2, \\ x_0x_1x_2 + x_0x_1x_3 + x_0x_2x_3 & \\ + x_1x_2x_3 &= -C_2 - C_3x_4 - C_4x_4^2 - x_4^3, \\ x_0x_1x_2x_3 &= C_1 + C_2x_4 + C_3x_4^2 \\ &\quad + C_4x_4^3 + x_4^4. \end{aligned} \tag{76}$$

Zavedeme-li opět *pomocnou funkci* y, bude:

$$\begin{aligned} y_0 - \beta x_4 &= \alpha x_0 + x_1 + x_2 + x_3, \\ y_1 - \beta x_4 &= x_0 + \alpha x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 - \beta x_4 &= x_0 + x_1 + \alpha x_2 + x_3, \\ y_3 - \beta x_4 &= x_0 + x_1 + x_2 + \alpha x_3, \end{aligned}$$

kdež *pravá strana je funkcí o 4 hodnotách.*[11])

Píšeme-li zase $y_0 = l + px_0$, $y_1 = l + px_1$,

$$y_2 = l + px_2, \quad y_3 = l + px_3,$$

$$p = \alpha - 1, \quad q = \beta - 1, \quad \text{a} \quad l = qx_4 - C_4,$$

obdržíme na základě *variací v širším smyslu*:

$$y_0y_1y_2y_3 = l^4 + l^3p\,(x_0 + x_1 + x_2 + x_3) + l^2p^2\,(x_0x_1 + x_0x_2 + x_0x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + lp^3\,(x_0x_1x_2 + x_0x_1x_3 + x_0x_2x_3 + x_1x_2x_3) + p^4x_0x_1x_2x_3.$$

Dosadíme-li za *symmetrické výrazy* výsledky (76), bude:

$y_0y_1y_2y_3 =$

p^4	$x_4^4 + p^4$	$C_4x_4^3 + p^3C_4^2$	$x_4^2 + p^2C_4^3$	$x_4 + (p+1)\,C_4^4$
$-p^3q$	$-p^3q$	$-2p^2qC_4^2$	$-3pqC_4^3$	$+p^2C_4^2C_3$
$+p^2q^2$	$+p^2q^2$	$+3pq^2C_4^2$	$+pC_4^3$	$+p^3C_4C_2$
$-pq^3$	$-pq^3$	$+p^2C_4^2$	$-4qC_4^3$	$+p^4C_1.$
$+q^4$	$+p^3$	$-3pqC_4^2$	$+p^3C_4C_3$	
	$-2p^2q$	$+6q^2C_4^2$	$-2p^2qC_4C_3$	(77)
	$+3pq^2$	$+p^4C_3$	$+p^4C_2$	
	$-4q^3$	$-p^3qC_3$	$-p^3qC_2$	
		$+p^2q^2C_3$		

Aby *součin* $y_0y_1y_2y_3$ byl *funkcí symmetrickou*, bylo by potřebí, by *součinitele mocnin* x_4^4, x_4^3, x_4^2, x_4 v (77) a *uvnitř* těch *součinitelů* opět i *součinitele veličin* $\underbrace{C_4^2,\ C_3}$, $\underbrace{C_4^3,\ C_4C_3,\ C_2}$ (*v obecné* rovnici na sobě *nezávislých*) *rovnaly se nulle*, — což však *býti nemůže*.

Stačí totiž *poukázati* jen ku *dvěma* takovým *podmínečným* rovnicím na př.:

$$p^4 - p^3q + p^2q^2 - pq^3 + q^4 = 0, \qquad (78)$$

$$p^4 - p^3q + p^2q^2 = 0, \qquad (79)$$

---

[11]) Kdybychom zavedli:

$$y_0 - \beta x_4 = \alpha x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon x_3,$$
$$y_1 - \beta x_4 = \varepsilon x_0 + \alpha x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon x_3,$$
$$y_2 - \beta x_4 = \varepsilon x_0 + \varepsilon x_1 + \alpha x_2 + \varepsilon x_3,$$
$$y_3 - \beta x_4 = \varepsilon x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon x_2 + \alpha x_3,$$

nezískáme nového neurčitého součinitele. (Srov. [4]).)

které si *odporují*, protože dle (78) $\frac{q}{p} = -\omega_5$

a dle (79) $\frac{q}{p} = -\omega_3$,

kdež $\left\{\begin{matrix}\omega_5 \\ \omega_3\end{matrix}\right\}$ *primitivní* $\left\{\begin{matrix}\sqrt[5]{+1} \\ \sqrt[3]{+1}\end{matrix}\right\}$ znamená.

Methodický příspěvek k rovnoběžnému promítání kružnice.

Podává dr. **Jos. Kounovský**.

Při prvních výkladech o kružnici v geometrii deskriptivní jde o to ukázati krátce, že *rovnoběžným průmětem kružnice jest ellipsa, táž křivka, která definována jest jako geometrické místo bodu majícího od dvou pevných bodů stálý součet vzdáleností.* Podávám v následujícím jeden takový stručný způsob.

Libovolná rovina **R** budiž určena stopou $\mathbf{R}^p$ na průmětně (nákresně) a odchylkou ϱ od průmětny (obr. 1.). V rovině **R** zvolme střed S libovolné kružnice k pravoúhlým průmětem S_1. Vzdálenost $S_1\,(S)$ středu S od průmětny určena pravoúhlým trojúhelníkem $VS_1\,(S)$, v němž odchylka ϱ se vyskytuje. Kružnici k promítněme do průmětny do křivky k' v libovolném směru, určeném průmětem S' středu S. Průmětem jest křivka středová, mající dvojiny sdružených průměrů (každý půlí tětivy rovnoběžné s průměrem sdruženým, vlastnost to kolmých průměrů kružnice, která se při rovnoběžném promítání zachová).

Jde tedy o důkaz, že k' (obecný šikmý průmět kružnice) jest ellipsa. Za tím účelem promítněme kružnici k rovnoběžně do naší průmětny tak, aby průmětem byla kružnice k_0 s k shodná. Patrně jest směr promítacích paprsků SS_0 kolmý na rovinu, která půlí odchylku roviny **R** od průmětny. Promítnutí středu provedeno ve sklopení kolmicí $(S)\,S_0$ na osu $\sphericalangle S_1V(S) = \varrho$. Ježto kružnice k jest ve dvou směrech (SS', SS_0) šikmo promítnuta, jsou křivky k' a k_0 affinní (osa $\mathbf{R}^p$, dvojina sdružených