Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

Asymptotické čáry na přímém konoidu; příspěvky k vlastnostem čar šroubových

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 1, 1–13

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122118

Asymptotické čáry na přímém konoidu; příspěvky k vlastnostem čar šroubových.

Sdílí **M. Lerch** v Brně.

1. Rovnice konoidu, jehož řídící přímka jest Oz a řídící rovina Oxy, možno psáti

$$x = u\varphi(v), \quad y = u\psi(v), \quad z = cv, \tag{1}$$

kde konstantu c lze ostatně klásti $= 1$, při čemž φ a ψ jsou libovolné funkce parametru v.

Differenciální rovnice asymptotických čar při parametrickém vyjádření plochy zní

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \\ d^2x, & d^2y, & d^2z \end{vmatrix} = 0, \quad d^2x = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} dudv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv^2, \text{ atd.}$$

V našem případě

$$d^2z = 0, \quad d^2x = dv\,[2\varphi'(v)du + u\varphi''(v)dv],$$
$$d^2y = dv\,[2\psi'(v)du + u\psi''(v)dv],$$

takže pomineme-li nezajímavé řešení $dv = 0$, máme pro asymptotiky plochy (1) differenciální rovnici

$$\begin{vmatrix} u\varphi' & u\psi' & c \\ \varphi & \psi & 0 \\ 2\varphi' du + u\varphi'' dv, & 2\psi' du + u\psi'' dv, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

aneb

$$2\begin{vmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi' & \psi' \end{vmatrix} du + u \begin{vmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi'' & \psi'' \end{vmatrix} dv = 0.$$

Druhý determinant je derivace prvního a tedy lze nejen proměnné odděliti, nýbrž také bezprostředně integrovati; výsledek je

$$u^2 = \frac{C}{\varphi(v)\,\psi'(v) - \psi(v)\,\varphi'(v)} \tag{2}$$

při čemž C jest integrační stálá. Pro tyto hodnoty u podávají rovnice (1) souřadnice bodu na asymptotice.

2. Hledejme podmínku, aby asymptotické čáry plochy (1) byly $u = konst.$ Tu vlastnost mají všecky asymptotiky, je-li pro jednu z nich u stálé; neboť pak bude

$$\varphi(v)\,\psi'(v) - \psi(v)\,\varphi'(v) = k$$

veličina stálá; aby to nastalo, musí

$$\varphi(v)\,\psi''(v) - \psi(v)\,\varphi''(v) = 0,$$

t. j. bude

$$\frac{\varphi''(v)}{\varphi(v)} = \frac{\psi''(v)}{\psi(v)} = f(v),$$

takže obě funkce φ a ψ hoví rovnici differenciální

$$\frac{d^2\varphi}{dv^2} = f(v)\,\varphi. \tag{3}$$

Jsou-li obě funkce $\varphi(v)$ a $\psi(v)$ integrály lineární rovnice differenciální (3), budou asymptotické čáry konoidu (1) dány rovnicí $u = konst.$, takže jejich průměty do řídící roviny (xy) jsou čáry homothetické.

3. Řídící čára $u = 1$ konoidu (1) je šroubovou čarou svého promítajícího válce, platí-li

$$\varphi'(v)^2 + \psi'(v)^2 = 1,$$

takže pak bude v míti význam oblouku na průmětu řídící čáry L a konstanta c určuje spád šroubovice.

Znamenáme-li τ úhel, který tečna průmětu L řídící čáry svírá s osou Ox, máme

$$\varphi'(v) = \frac{dx}{dv} = \cos\tau, \qquad \psi'(v) = \frac{dy}{dv} = \sin\tau,$$

a jmenovatel zlomku (2)

$$\varphi(v)\,\psi'(v) - \psi(v)\,\varphi'(v) = x \sin \tau - y \cos \tau$$

je délka průmětu průvodiče OM do normály čáry L v jejím bodě M vedené. Pata K promítající kolmice opisuje tedy úpatnici evoluty čáry L pro pól O, délka normály od čáry L k úpatnici evoluty jest jmenovatel KM výrazu (2), takže pro asymptotiku platí

$$u = \sqrt{\frac{C}{KM}}.$$

Konstrukci lze provésti tak, že pro pevnou délku C strojíme úhel ω z podmínky

$$KM = C\, tg^2\, \omega,$$

načež

$$u = cotg\, \omega.$$

4. Jako příklad plochy uvažované ve čl. 2. uveďme konoid, jehož řídící čára má průmětem čárú 3. stupně

$$x_0 = av^2,\; y_0 = \frac{b}{v},\; (x'_0 y_0 - x_0 y'_0 = 3ab),$$

t. j.

$$x_0 y_0^2 = ab^2,$$

takže plocha je dána parametricky rovnicemi

$$x = auv^2, \quad y = \frac{bu}{v}, \quad z = v,$$

a její rovnice bude

$$ayz^3 = bx.$$

Asymptotické čáry její mají za průměty křivky

$$xy^2 = konst.$$

5. Jako příklad plochy s řídící čarou šroubovou uvažujme případ, kdy řídící čára má průmět vyjádřený v komplexním tvaru

$$x + iy = a\left(\frac{1}{m+1}\, e^{(m+1)i\psi} + \frac{1}{m-1}\, e^{(m-1)i\psi}\right)$$

Pro ni jest

$$d\,(x + iy) = ai\,(e^{(m+1)i\psi} + e^{(m-1)i\psi})\,d\psi$$
$$= 2aie^{mi\psi} \cos \psi \, d\psi,$$

tedy prvek oblouku

$$dv = 2a \cos \psi \, d\psi,$$

takže lze voliti

$$v = 2a \sin \psi,$$

a tedy pro třetí souřadnici

$$z = cv = 2ac \sin \psi. \tag{4^1}$$

Násobíme-li výraz (4) hodnotou sdruženou, obdržíme

$$x^2 + y^2 = a^2 \left[\frac{1}{(m-1)^2} + \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{2}{m^2-1} \cos 2\psi\right],$$

i můžeme konstantu c tak zvoliti, aby čára byla sférickou, neboť

$$\frac{2a^2}{m^2-1} \cos 2\varphi = \frac{2a^2}{m^2-1} - \frac{4a^2}{m^2-1} \sin^2 \psi,$$

a zvolíme-li c tak, aby

$$c^2 = \frac{1}{m^2-1}, \quad m = \frac{1}{c}\sqrt{1+c^2}, \tag{4^2}$$

bude

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

kde konstanta R^2 má hodnotu

$$R^2 = a^2 \left[\frac{1}{(m-1)^2} + \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{2}{m^2-1}\right] =$$
$$= \frac{4m^2a^2}{(m^2-1)^2},$$

$$R = \frac{2ma}{m^2-1} = 2ac\sqrt{1+c^2}. \tag{5}$$

Tu jest pak dále

$$\frac{d\,(x+iy)}{dv} = x' + iy' = ie^{mi\psi},$$

tedy

$$(x' + iy')\,(x - iy) = ia\left(\frac{1}{m+1}e^{-i\psi} + \frac{1}{m-1}e^{i\psi}\right)$$

a následovně bude po odečtení hodnoty sdružené

$$(x' + iy')(x - iy) - (x' - iy')(x + iy)$$
$$= \frac{4i\,am}{m^2 - 1} \cos\psi;$$

levá strana má hodnotu

$$2i\,(xy' - yx'),$$

a tedy

$$xy' - yx' = \frac{2am}{m^2 - 1} \cos\psi = R\cos\psi. \tag{6}$$

Souřadnice bodu na konoidu znějí

$$X = ux,\ Y = uy,\ Z = z = 2ac\sin\psi,$$

a čáry asymptotické na této ploše jsou dle (2) a (6) dány rovnicí

$$u^2 = \frac{C}{\cos\psi} = \frac{C_1}{\sqrt{4a^2 - v^2}}.$$

Sférická šroubovice definovaná rovnicemi (4)—(4^2) má za průmět epicykloidu

$$x + iy = e^{(m-1)i\psi}\left[\frac{a}{m-1} + \frac{a}{m+1} e^{2i\psi}\right],$$

která vznikne valením kruhu poloměru $\frac{a}{m+1}$ po pevném kruhu se středem O poloměru

$$\frac{2a}{m^2 - 1} = 2ac^2.$$

Znamenáme-li $\varkappa$ úhel tečny šroubové čáry s osou Oz, máme

$$c = \operatorname{cotg}\varkappa,\ m = \frac{1}{\cos\varkappa},\ R = 2a\cos\varkappa,$$

$$\text{poloměr kruhu pevného} = 2a\operatorname{cotg}^2\varkappa = R_0$$

$$\text{„ „ hybného} = \frac{a\cos\varkappa}{1 + \cos\varkappa} = r_0.$$

Epicykloida má vrchol v bodě

$$\psi = 0\ \left(x = \frac{2am}{m^2 - 1} = R_0 + 2r_0,\ y = 0\right),$$

takže ji opisuje bod na hybném kruhu diametrálně protilehlý onomu, jenž vyšel z původní polohy $\psi = 0$ a jenž měří odvalený úhel.

Při tom přísluší parametru ψ odvalený úhel na kruhu pevném

$$(m - 1)\,\psi = \frac{1 - \cos \varkappa}{\cos \varkappa}\,\psi,$$

a na kruhu hybném má odvalený úhel hodnotu 2ψ.

Rovnice roviny normální pro čáru (4)—(4²) zní

$$\begin{aligned}(X - iY)(x' + iy') + (X + iY)(x' - iy') + 2(Z - z)\,z' \\ = (x - iy)(x' + iy') + (x + iy)(x' - iy')\end{aligned}$$

čili po dosazení hodnot

$$x' + iy' = ie^{mi\psi}, \quad z' = c$$

$$(x - iy)(x' + iy') + (x + iy)(x' - iy') = -\frac{4a}{m^2 - 1}\sin\psi,$$

$$\begin{aligned}(X - iY)\,ie^{mi\psi} - (X + iY)\,ie^{-mi\psi} + 2c(Z - z) \\ = -4ac^2 \sin\psi \\ = -2c^2 v\end{aligned}$$

a po redukci konečně

$$-X \sin m\psi + Y \cos m\psi + cZ = 0. \qquad (\mathfrak{N})$$

Pro obalovou plochu roviny normální (plochu polární) máme odtud derivováním

$$X \cos m\psi + Y \sin m\psi = 0; \qquad (\mathfrak{N}')$$

rovnice $(\mathfrak{N})$, $(\mathfrak{N}')$ určují charakteristiku obalové plochy — v uvažovaném případě osu křivosti čáry naší. Z rovnic těch vychází

$$X = cZ \sin m\psi, \quad Y = -cZ \cos m\psi \qquad (\mathfrak{O})$$

jakožto parametrické vyjádření plochy polární, která patrně jest rotační kužel

$$X^2 + Y^2 = c^2 Z^2. \qquad (\mathfrak{P})$$

Tento kužel protněme koulí poloměru R, na níž leží naše sférická šroubovice; obdržíme dva kruhy, z nichž spodní má rovnice

$$Z = -R \sin\varkappa, \quad X^2 + Y^2 = R^2 \cos^2\varkappa.$$

Povrchové přímky našeho kužele svírají se základnou úhel $\varkappa$, jeho strany mají délku R, poloměr základny $R \cos \varkappa$ a výška jest $R \sin \varkappa$.

Stopa osy křivosti $\mathfrak{O}$ na základně kužele má souřadnice

$$X = -R \cos \varkappa \sin m\psi, \quad Y = R \cos \varkappa \cos m\psi.$$

Předpokládejme blánu dokonale ohebnou a neroztažitelnou, přiloženou jako náplasť na plášť našeho kužele ($\mathfrak{P}$), a sice navinutou ve směru ubývajícího ψ v libovolném počtu ovitů v oblasti mezi základnou a vrcholem.

Poslední strana kužele pokrytá náplastí nechť odpovídá hodnotě $\psi = 0$; napneme-li náplasť tak, aby ležela v tečné rovině kužele, bude obsahovati bod naší čáry ($\psi = 0$)

$$x = \frac{2ma}{m^2 - 1} = R, \quad y = 0, \quad z = 0$$

na konci poloměru koule (R) v ose Ox. Odvíjíme-li náplasť, bude se při tom tento bod pohybovati po naší sférické šroubovici (4) — (4^2).

Proces odvíjení lze nahraditi kotálením kruhu po základně, při čemž rovina hybného kruhu se stále dotýká kužele ($\mathfrak{P}$) a střed hybného kruhu leží ve vrcholu tohoto.

Jsou tedy — jak známo — sférické šroubovice zvláštním případem sférické epicykloidy*). Z předchozích úvah snadno se odvodí jednoduché konstrukce tečny, roviny oskulační a středu křivosti naší sférické šroubovice, a tím hlavní konstruktivní prvky uvažovaného konoidu.

Je-li m a tím též $\cos \varkappa$ číslo racionální, je řídící čára a tedy též konoid racionální;**) v ostatních případech jsou oba útvary transcendentní.

Tečna šroubové čáry sférické určí se podle rovnic

$$\frac{X + iY - (x + iy)}{x' + iy'} = \frac{Z - z}{c} = w,$$

---

*) Literaturu viz ve 2. dílu spisu F. Gomes Teixeira, Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches, Coimbra 1909.

**) Zvláštním případem $m = 2$ podrobně se obíral Ang. Buffone, Studio di un'ellica sferica ed algebrica (Giornale di Matematiche di Battaglini vol. XXXIV; 1896).

tedy

$$X + iY = x + iy + wie^{mi\psi}, \; Z = c\,(v + w),$$

kteréžto rovnice podávají zároveň parametrické vyjádření plochy tečen ve spojení s rovnicí pro v

$$v = 2a\, sin\, \psi.$$

Stopa tečny na rovině xy má parametr $w = -v$, tedy

$$X + iY = x + iy - 2ai\, sin\, \psi\, e^{mi\psi}$$

$$= a\left[\frac{1}{m+1}e^{(m+1)i\psi} + \frac{1}{m-1}e^{(m-1)i\psi} - e^{(m+1)i\psi} + \right.$$

$$\left. + e^{(m-1)i\psi}\right]$$

$$= a\left[\frac{m}{m-1}e^{(m-1)i\psi} - \frac{m}{m+1}e^{(m+1)i\psi}\right].$$

Bod tento opisuje epicykloidu, kterou opisuje bod hybného kruhu poloměru

$$\frac{ma}{m+1} = \frac{a}{1 + cos\, \varkappa}$$

při jeho kotálení po pevném kruhu se středem O, jehož poloměr jest

$$\frac{2m\, a}{m^2 - 1} = \frac{2a\, cos\, \varkappa}{sin^2\, \varkappa},$$

a sice má tato epicykloida úvrat v místě $\psi = 0$.

Odvalené úhly na kruhu hybném a pevném mají hodnoty 2ψ, resp. $(m - 1)\, \psi$.

Tato epicykloida je stopa rozvinutelné plochy tečen naší sférické šroubovice.

6. Uvažujme dále čáru šroubovou na válci, jehož základna jest hypocykloida

$$x + iy = r_1 e^{i\alpha} + re^{i(\alpha-\beta)}, \qquad (1)$$

$$r_1 = R - r, \quad R\alpha = r\beta,$$

kterou vytvoří bod kruhu poloměru r při jeho kotálení po kruhu poloměru R se středem O, při čemž kotálení děje se na vnitřní straně; odvalené úhly jsou α na kruhu pevném, β na kruhu hybném. Differencováním vychází

$$\frac{d\,(x+iy)}{d\alpha}=-2r_1\,e^{i\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}\sin\frac{\beta}{2}\,;$$

odtud máme pro prvek oblouku na základně

$$dv=-2r_1\sin\frac{\beta}{2}\,d\alpha=-\frac{2rr_1}{R}\sin\frac{\beta}{2}\,d\beta, \tag{2'}$$

při čemž kladný směr oblouku jest opačný směru rostoucích β, t. j. oblouku ubývá při kotálení, pokud $\sin\frac{\beta}{2}$ je kladný.

Pro oblouk sám vychází odtud

$$v=\frac{4rr_1}{R}\cos\frac{\beta}{2}. \tag{2}$$

Z (1) obdržíme

$$x^2+y^2=r^2+r_1^2+2rr_1\cos\beta, \tag{3}$$

takže definujeme-li šroubovou čáru na válci (1) doplňující rovnicí

$$z=cv=\frac{4crr_1}{R}\cos\frac{\beta}{2}, \tag{1''}$$

obdržíme z (3) vztah

$$x^2+y^2-\frac{z^2}{n^2}=(R-2r)^2=(r_1-r)^2, \tag{4}$$

$$n=\frac{2c\sqrt{rr_1}}{R}.$$

Tato šroubová čára leží tedy na rotačním hyperboloidu jednodílném (4) a jest to jediná algebraická plocha ji obsahující, pokud čára sama zůstává transcendentní, t. j. pokud poměr $R:r$ není racionální.

Pro tečnu čáry této zavedeme opět parametr w, abychom její rovnice psali přehledněji:

$$\frac{X+iY-(x+iy)}{x'+iy'}=\frac{Z-z}{c}=w,$$

kde

$$x'+iy'=\frac{d\,(x+iy)}{dv}=e^{i\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}.$$

Obdržíme tak rovnice tečny

$$X + iY = x + iy + we^{i\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)}, \quad Z = c\,(v + w). \qquad (5)$$

Stopa tečny na rovině xy se určí hodnotou parametru

$$w = -v = -\frac{4rr_1}{R}\cos\frac{\beta}{2}$$

a vyjde pro affix její výraz

$$X + iY = \frac{r_1 - r}{R}\,(r_1 - re^{-i\beta})\,e^{i\alpha}, \quad (R\alpha = r\beta);$$

místo bodu tohoto jest nutně evolutou základny a je v tomto případě opět hypocykloida, vytvořená bodem diametrálně protějším onomu, jehož pohyb určuje odvalený úhel. Pevný kruh má střed O a poloměr $r_1 - r = R - 2r$, kruh hybný pak má poloměr

$$\frac{R - 2r}{R}\,r.$$

Je-li pak $R < 2r$, tedy oba poloměry záporné, třeba otočiti obrazec o 180^0.

Pro normální rovinu čáry máme rovnici

$$(X + iY)(x' - iy') + (X - iY)(x' + iy') + 2c\,(Z - z)$$
$$= (x + iy)(x' + iy') + (x - iy)(x' - iy').$$

Tu jest

$$(x + iy)(x' - iy') = r_1\,e^{i\frac{\beta}{2}} + r\,e^{-i\frac{\beta}{2}},$$

a tedy pravá strana bude

$$(2r_1 + 2r)\cos\frac{\beta}{2} = 2R\cos\frac{\beta}{2},$$

takže rovnice normální roviny zní

$$X\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) + Y\sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) + c\,(Z - z) = R\cos\frac{\beta}{2},$$

$$z = \frac{4rr_1}{R}\cos\frac{\beta}{2}. \qquad (6)$$

Povrchová přímka obalové plochy (charakteristika) leží na rovině

$$-X\sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) + Y\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{R^2 + 4c^2rr_1}{R - 2r}\sin\frac{\beta}{2} \quad (7)$$

a bod úvratnice rozvinutelné plochy (polární) hoví ještě třetí rovnici

$$X \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) + Y \sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{R^2 + 4c^2 rr_1}{(R - 2r)^2} R \cos\frac{\beta}{2}. \quad (8)$$

Z posledních dvou rovnic vychází pro bod úvratnice

$$X_0 = \frac{R^2 + 4c^2 rr_1}{(r_1 - r)^2} \left[(r_1 + r) \cos\frac{\beta}{2} \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - (r_1 - r) \sin\frac{\beta}{2} \sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) \right]$$

$$Y_0 = \frac{R^2 + 4c^2 rr_1}{(r_1 - r)^2} \left[(r_1 + r) \cos\frac{\beta}{2} \sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) + (r_1 - r) \sin\frac{\beta}{2} \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) \right]$$

což po uspořádání závorek podává

$$X_0 = \frac{R^2 + 4c^2 rr_1}{(r_1 - r)^2} [r_1 \cos\alpha + r \cos(\alpha - \beta)]$$

$$Y_0 = \frac{R^2 + 4c^2 rr_1}{(r_1 - r)^2} [r_1 \sin\alpha + r \sin(\alpha - \beta)]$$

čili v srovnání s (1)

$$X_0 + iY_0 = \frac{R^2 + 4c^2 rr_1}{(r_1 - r)^2} (x + iy). \quad (9)$$

Klade-li se k vůli pohodlí na okamžik

$$A = \frac{R^2 + 4c^2 rr_1}{(r_1 - r)^2},$$

podává rovnice (6) po dosazení hodnot $X = X_0$, $Y = Y_0$

$$-cZ_0 = A [r_1 \cos\alpha + r \cos(\alpha - \beta)] \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) + A [r_1 \sin\alpha + r \sin(\alpha - \beta)] \sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \frac{R^2 + 4c^2 rr_1}{R} \cos\frac{\beta}{2},$$

což lze psáti

$$-cZ_0 = A (r_1 + r) \cos\frac{\beta}{2} - \frac{R^2 + 4c^2 rr_1}{R} \cos\frac{\beta}{2},$$

aneb konečně

$$cZ_0 = -A\frac{4rr_1}{R}\cos\frac{\beta}{2} = -Av. \qquad (9^1)$$

Oblouk na průmětu úvratnice (X_0, Y_0) jest dle (9) patrně $A v = \bar{v}$, a poslední rovnici lze psáti

$$Z_0 = -\frac{1}{c}\bar{v}; \quad d\bar{v}^2 = dX_0^2 + dY_0^2. \qquad (9^2)$$

Tento výsledek vyjadřuje zajímavou vlastnost naší čáry, že totiž

„úvratnice plochy polární příslušné k naší šroubovici na rotačním hyperboloidu jednoplochém jest opět čára šroubová, jejíž válec má za základnu hypocykloidu homothetickou s hypocykloidou původní (1), a jejíž spád jest opačná reciproká hodnota spádu dané šroubovice."

V případě $R = 3r$ je základní čára (1) Steinerova hypocykloida vepsaná kruhu (R), stopa plochy tečen je hypocykloida Steinerova vepsaná kruhu (r) [která přejde v homothetickou po otočení o 60^0], a průmět úvratnice plochy polární je St. hypocykloida vepsaná kruhu poloměru

$$(9 + 8c^2)\,R.$$

Pro stopu polární plochy na rovině Oxy třeba klásti v rovnici (6) $Z = 0$ a spojiti ji s rovnicí (7); vyjde

$$X = \frac{R^2 + 4c^2rr_1}{R(r_1 - r)}\left[(r_1 + r)\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{\beta}{2} - (r_1 + r)\sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2}\right]$$

$$Y = \frac{R^2 + 4c^2rr_1}{R(r_1 - r)}\left[(r_1 - r)\sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{\beta}{2} + (r_1 - r)\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2}\right]$$

čili

$$X = \frac{R^2 + 4c^2rr_1}{R(r_1 - r)}\left[r_1\cos\alpha - r\cos(\alpha - \beta)\right]$$

$$Y = \frac{R^2 + 4c^2rr_1}{R(r_1 - r)}\left[r_1\sin\alpha - r\sin(\alpha - \beta)\right],$$

t. j. stopa plochy polární jest hypocykloida homothetická se stopou plochy tečen základní čáry šroubové.

V případě $R = 3r$ je tato hypocykloida vepsána kruhu poloměru

$$\frac{9 + 8c^2}{3} R.$$

O sestrojování tečen jistých křivek rovinných.

Píše **V. Láska.**

Rovnice přímky v souřadnicích nomografických zní

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} = 1.$$

Prochází-li táž dvěma body $u_1 v_1$, $u_2 v_2$, pak platí vztah

$$\begin{vmatrix} u & v & uv \\ u_1 & v_1 & u_1 v_1 \\ u_2 & v_2 & u_2 v_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Úseky a, b na osách U a V jsou tudíž

$$a = u_1 u_2 \frac{v_2 - v_1}{u_1 v_2 - v_1 u_2}, \qquad b = v_1 v_2 \frac{u_2 - u_1}{v_1 u_2 - v_2 u_1}.$$

V limitě obdržíme dále pro úseky tangent

$$\left.\begin{aligned} t_a &= \frac{u^2 \dfrac{dv}{du}}{u \dfrac{dv}{du} - v} = \frac{dv}{d\left(\dfrac{v}{u}\right)} \\ t_b &= \frac{v^2 \dfrac{du}{dv}}{v \dfrac{du}{dv} - u} = \frac{du}{d\left(\dfrac{u}{v}\right)} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Pomocí těchto vzorců lze v některých případech snadno sestrojiti tečny křivek.

Prvým příkladem budiž *ellipsa*, jejíž rovnice jest

$$uv = c^2.$$