Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Ladislav Klír

Konstrukce paraboly ze dvou bodů a osy

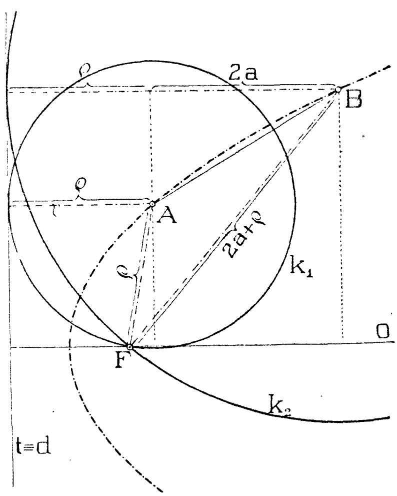
Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 63 (1934), No. 7, R103--R105

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122109

Konstrukce paraboly ze dvou bodů a osy.

Prof. *Ladislav Klír.*

Úloha sestrojiti parabolu ze dvou daných bodů a osy,*) máme-li užíti vztahů plynoucích *jen* z její definice — (jako geometrického místa bodů stejně vzdálených od pevného bodu a pevné přímky) — vyžaduje najíti takové dvě kružnice, mající v daných bodech svoje středy, jež by se proťaly zrovna na ose (v ohnisku paraboly F), a jejichž společná tečna by byla kolmá k dané ose (co přímka řídicí: viz obr. 1). Tedy jest vlastně vyhledati průsečík dané osy paraboly *s geometrickým místem průsečíků dvou kružnic o pevných středech, jichž společné tečny mají konstantní směr.*



Obr. 1.

Aby však společné tečny oněch kružnic byly navzájem rovnoběžné, jest třeba, aby rozdíl poloměrů příslušných kružnic byl stálý a rovnal se ortogonálnímu průmětu vzdálenosti bodů AB do osy paraboly ($2a$).

Proto možno též říci, že hledáme geometrické místo průsečíků dvou kružnic o pevných středech, jichž rozdíl poloměrů jest stálý.

Vrátíme-li se k původní úloze, máme nalézti *geometrické místo ohnisek všech parabol, jež procházejí dvěma danými body a jejichž osa má daný směr.*

Abychom analyticky odvodili, co jest geometrickým místem průsečíků dvou kružnic o pevných středech, jichž rozdíl poloměrů jest stálý, volme (viz obr. 2) na ose x souměrně podle počátku středy kružnic S_1 $(-m, 0)$, S_2 $(m, 0)$. Proměnný poloměr jedné kružnice označme ϱ, pak poloměr druhé jest $\varrho + 2a$, když stálý rozdíl poloměrů má hodnotu $2a$; jest tedy libovolná dvojice kružnic dána rovnicemi:

$$k_1 \equiv (x + m)^2 + y^2 = \varrho^2, \tag{1}$$
$$k_2 \equiv (x - m)^2 + y^2 = (\varrho + 2a)^2. \tag{2}$$

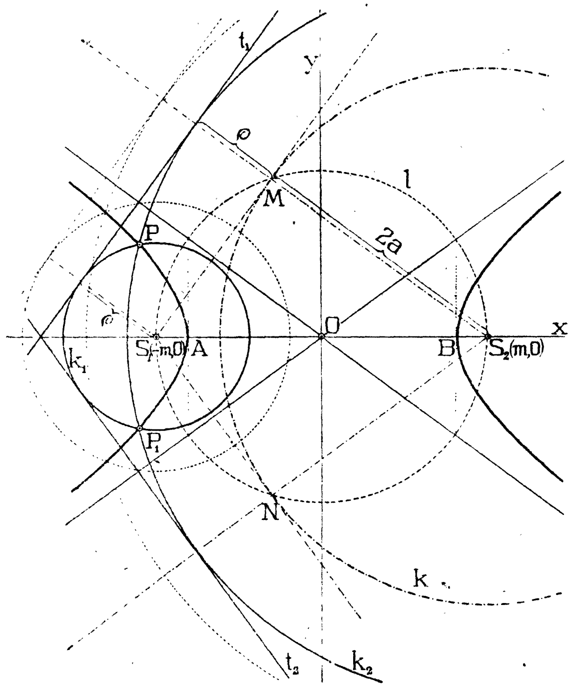
Vyloučením proměnného ϱ dospějeme k rovnici hledaného geometrického místa

*) Viz též čl. dr. A. Pleskota, Rozhledy roč. X, str. 10.

$$(m^2 - a^2)\, x^2 - a^2 y^2 = a^2\, (m^2 - a^2),$$

či jinak

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{m^2 - a^2} = 1. \tag{3}$$



Obr. 2.

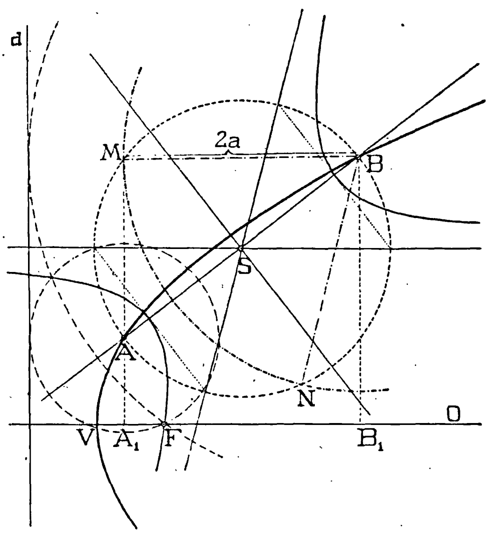
Jest to hyperbola o poloosách a, $\sqrt{m^2 - a^2}$ a výstřednosti délkové $e = m$, z čehož následuje, že ohniska hyperboly splývají se středy kružnic s_1, s_2, hlavní osa její rovná se stálému rozdílu poloměrů; asymptoty mají směrnice $k_{1,2} = \pm \dfrac{\sqrt{m^2 - a^2}}{a}$ a poněvadž společné tečny kružnic mají směrnice $k'_{1,2} = \mp\, a/\sqrt{m^2 - a^2}$, značí to, že asymptoty hyperboly jsou kolmé ke společným tečnám kružnic.

Asymptoty jsou též rovnoběžné se spojnicemi S_2M, S_2N, kde M, N jsou průsečíky kružnice l, opsané nad S_1S_2 jako nad průměrem, a kružnice k, opsané ze středu S_2 poloměrem $2a$. (Totéž platí ovšem i pro střed S_1.)

Dospíváme k výsledku:

Geometrickým místem průsečíků dvou kružnic o pevných středech, majících rozdíl poloměrů stálý, jest hyperbola, která má ohniska ve středech kružnic, hlavní její osa rovná se stálému rozdílu poloměrů kružnic a asymptoty jsou kolmé ke společným tečnám kružnic.

A pro naši původní úlohu vyplývá:



Obr. 3.

Geometrickým místem ohnisek všech parabol, jež procházejí dvěma danými body a mají stálý směr osy, jest hyperbola, která má ohniska v daných bodech, jejíž hlavní osa má délku rovnou ortogonálnímu průmětu vzdálenosti obou bodů do směru os parabol a jejíž jedna asymptota je rovnoběžná s daným směrem.

V obr. 3 jest provedena konstrukce paraboly ze dvou bodů A, B a osy o užitím vpředu vyvozené věty. Jest třeba jen sestrojiti hyperbolu a určiti její průsečík s osou paraboly (hledané ohnisko F); poněvadž jedna asymptota jest s osou paraboly rovnoběžná, jest úloha jednoznačná. Bližší patrno z obrazce.

Tato konstrukce jest ovšem složitější než ona, jež se zakládá na polárních vlastnostech křivky, kde užíváme jen pravítka a kružítka, ale tato vychází pouze z definice paraboly.