Přehled

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 63 (1934), No. 7, R117--R120,R121--R122

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122107

$$|\mathfrak{R}_a| = R_i;$$

za této podmínky platí

$$\text{pro } \varphi_a = 0^0 \quad \mathfrak{J}_a = \tfrac{1}{2}\mathfrak{J}_k, \quad \mathfrak{E}_a = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}_l;$$
$$\text{pro } \varphi_a = 90^0 \quad \mathfrak{J}_a = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\mathfrak{J}_k, \quad \mathfrak{E}_a = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\mathfrak{E}_l.$$

Platí tedy pro maximální výkon

$$\mathfrak{N}_{a\,\max} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}_a\mathfrak{J}_a = \tfrac{1}{8}\mathfrak{E}_l\mathfrak{J}_k = \tfrac{1}{8}\frac{\mathfrak{E}_g}{D}S\mathfrak{E}_g = \frac{S}{D}\frac{\mathfrak{E}_g{}^2{}_{\text{eff}}}{4} \quad \text{pro } \varphi_a = 0^0;$$

$$\mathfrak{N}_{a\,\max} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}_a\mathfrak{J}_a = \tfrac{1}{4}\mathfrak{E}_l\mathfrak{J}_k = \frac{S}{D}\frac{\mathfrak{E}_g{}^2{}_{\text{eff}}}{2} \quad \text{pro } \varphi_a = 90^0.$$

Vidíme tedy, že

$$G_r = \frac{S}{D} = \frac{4\mathfrak{N}_{a\,\max}}{\mathfrak{E}_g{}^2{}_{\text{eff}}} \quad \text{pro } \varphi_a = 0^0,$$

nebo

$$G_r = \frac{S}{D} = \frac{2\mathfrak{N}_{a\,\max}}{\mathfrak{E}_g{}^2{}_{\text{eff}}} \quad \text{pro } \varphi_a = 90^0.$$

Kvalita lampy G_r je rovna čtyřnásobku (pro $\varphi_a = 0^0$) střídavého výkonu $\mathfrak{N}_{a\,\max}$, jejž lze maximálně odbírati z lampy, přivádí-li se mřížce střídavé napětí $\mathfrak{E}_{g\,\text{eff}} = 1$ volt. Docíliti tedy velkého zesílení výkonu znamená zvětšiti strmost a zmenšiti průnik D. Strmost obyčejné triody nelze hnáti příliš vysoko; doporučuje se tedy vhodnou úpravou mřížky dosáhnouti malé hodnoty D. Kdyby však v limitě $D = 0$, pak při $E_g < 0$ by vůbec netekl anodový proud, který by byl řízen střídavým napětím na mřížce. Je patrno, že dosti velké anodové napětí musí svým působením pronikati do dosti velké míry záporně nabitou mřížkou, t. j. ekvivalentní napětí $E_{st} = E_g + DE_a$ musí býti kladné. Čím větší je E_{st}, tím lépe lze provésti řízení anodového proudu. Průnik D má tedy vyhovovati dvěma vzájemně si odporujícím požadavkům: jednak má býti velký, aby posouvací napětí DE_a bylo dosti velké a jednak má býti současně malý, aby kvalita lampy byla velká; je-li průnik malý, je zpětné působení anody na mřížku $D\mathfrak{E}_a$ také malé.

Druhá část (lampy vícemřížkové) vyjde v příštím čísle Rozhledů.

PŘEHLED.

Drobnosti. Některé hodnoty goniometrických funkcí lze srovnati v zajímavé řady. Tak na př. Jaeckels v Math. Unterrichtsbl. 1911 uvádí tyto hodnoty:

$$\sin 0^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{4}} \qquad \sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{1}}$$

$$\sin 15^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} \qquad \sin 67{,}5^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\sin 22{,}5^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad \sin 70^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\sin 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{1}} \qquad \sin 90^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{4}}$$

$$\sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2\mp\sqrt{0}}$$

* * *

Řadu 2. mocnin čísel přirozené řady lze srovnati do schema:

$$\begin{array}{lcl}
1 & & = 1^2 \\
1+3 & & = 2^2 \\
1+3+5 & & = 3^2 \\
1+3+5+7 & & = 4^2 \\
1+3+5+7+9 & & = 5^2 \\
1+3+5+7+9+11 & & = 6^2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \dots \\
1+3+5+\dots & +2n+1 & = (n+1)^2
\end{array}$$

Součet čísel v řádku je roven čtverci *středního* členu (který je ev. virtuální). Členy ve sloupcích (nad sebou) v levé polovině trojúhelníka, nebo v řadách rovnoběžných s pravou stranou trojúhelníka, tvoří řady lichých čísel, jaké jsou v řádcích.

* * *

A na konec jeden příklad z jisté „Enzyklopedie“:

„Dokažte, že přímka $x + \frac{1}{4}y = 1$ se dotýká elipsy $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1.$“

Řešení: Rovnice tečny má tvar:

$$xx_1 + \tfrac{1}{4}yy_1 - 1 = 0.$$

Přirovnáme-li ji k rovnici

$$x + \tfrac{1}{4}y - 1 = 0,$$

dostaneme

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 1.$$

Bod (1, 1) jest bodem dotyku. (Čím byla způsobena chyba?)

F. Balada.

Z historie neeuklidovské geometrie. Geometrie, jak ji poznáváte na střední škole, vznikla z praktických potřeb měření na zemi. Vzpomeňte na začátky její historie!

Zkušeností při měření a abstrakcí získána byla určitá pravidla, kterých člověk k usnadnění práce při takových měřeních užíval. Z nich dále teoretickými úvahami sestavil řadu předpisů a vět, které byly obecně platné; všechny spočívaly na požadavcích, jichž splnění bylo ale verifikováno jen praksí.

Prvý, kdo sestavil velmi důkladně řadu takových pouček teoretických, byl Euklid (330—275 př. Kr.). Spolu s jinými geometry, jako Hyposiklem a Eudoxem srovnal soustavně všechny předpoklady, na nichž je geometrie vybudována a uložil je v knihách zvaných Elementy.

Pět základních jeho předpokladů je:

1. *Dva body lze vždy spojiti přímkou.*
2. *Přímku lze neomezeně prodlužovati.*
3. *Lze vždy sestrojiti kružnici o libovolném středu a poloměru.*
4. *Všechny pravé úhly jsou mezi sebou shodné.*
5. *Rovnoběžky jsou přímky v rovině, které byvše prodlouženy neprotínají se na žádné z obou stran.*

Vedle těchto postulátů užil Euklid při tvoření geometrických pouček vzájemně si neodporujících, ještě jiných předpokladů, které z části uvedl anebo je mlčky jako samozřejmé předpokládal za vždy splněné.

Všimněme si blíže uvedených postulátů! Předně pozorujeme, že jsou to geometrické věty, které užívají základních pojmů bod, přímka, rovina, kružnice. Tyto pojmy Euklid nedefinoval. Ve svých Elementech uvedl jen představu o nich a to představu získanou zkušeností. (Tak na př. definuje bod jako „něco“ co nemá žádný díl a pod.) Jeho definice těchto pojmů jsou tedy přepsané zkušenosti do řeči teoretika.

Za druhé si uvědoměme, že všechny tyto předpoklady mají svůj původ v praksi a že tedy vyplynuly z vnější zkušenosti. Tato zkušenost, která byla vždy a vždy podepřena praktickým měřením, byla právě brzdou vývoje geometrie. Zeptáte se proč?

Geometři po Euklidovi nepřijímali slepě jeho poučky, ale vedeni skepsí pochybovali o oprávněnosti uvedených postulátů a snažili se je dokázati teoreticky nezávisle na zkušenosti. Když potom správné úvahy je vedly k novým výsledkům, které však odporovaly úplně zkušenostem získaným měřením, pokládali je za špatné — absurdní, odmítali je a tak vzrůst geometrie v tomto směru přímo zastavovali. A byl to hlavně 5. postulát (nebo častěji rovnocenný s ním postulát: k dané přímce lze vésti bodem mimo ni ležícím jen jedinou rovnoběžku), jehož oprávněnost a správnost dokazovali geometři různých národů po celou dobu dvou tisíc let. Byl proto významným, poněvadž v něm bez důkazu Euklid omezuje na jednu počet rovnoběžek, které lze daným bodem mimo přímku položeným k ní vésti. Euklid byl si vědom tohoto zvláštního postavení postulátu, neboť pokud možno neodvozoval z něho důsledků. O důkaz jeho ani se snad nepokusil; alespoň jeho důkaz se nedochoval.

Důkazy ze starší doby užívají předpokladů, o nichž později bylo dokázáno, že jsou s uvedeným postulátem rovnocenné. Předpokládali tedy při důkazu 5. postulátu již předem jeho správnost. Tak na př. Posidonius (1. stol. př. Kr.) dokázal 5. postulát na základě věty: Dvě přímky jsou rovnoběžné, mají-li body jedné od druhé stejné vzdálenosti. Ptolemaios předpokládal platnost věty o rovnosti dvou párů střídavých úhlů při příčce dvou rovnoběžek, atd.

A tak ještě v 6. století po Kr. trvala tato „záhada" již stará devět set let. Začátkem 7. stol. vzdává se svět o Euklidův rovnoběžkový postulát, vlastně vzdává se zájmu o geometrii vůbec — a staré empirické názory staly se opět běžnými. Avšak řecká kultura pronikala k Arabům a s ní i „záhada" 5. postulátu. Arab Nasr-Edin ve stol. 13. znovu pokouší se bezvýsledně o důkaz. Badání J. Wallise (1665) přineslo větší výsledek: poznal, že máme-li přejímati nezávislost tvaru na velikosti (existenci útvarů podobných), že je třeba předpokládati správnost Euklidova 5. postulátu. Výsledek tedy jistě zajímavý byť ne korunovaný úspěchem.

Důkazy pozdější jsou teoreticky správné — vedly však k výsledkům, které odporovaly dosavadním zkušenostem; proto byly buď zavrhnuty, anebo místo aby byly vzaty za nové objevy, sloužily jako „argument" proti správnosti uvedeného postulátu.

Tak na př. G. Saccheri (1667—1733) ve spisku „Eukleides ab omne novo vindicatus . . ." (1733) uveřejnil vlastně skutečný nárys neeuklidovské geometrie, přesto, že byl psán k obhájení 5. postulátu „jednou provždy". Ukázal totiž, že 5. postulát nepraví nic jiného, než že součet tří vnitřních úhlů trojúhelníku se rovná dvěma pravým. Aby ukázal nezávislost tohoto postulátu na ostatních zkoumal, jaké důsledky plynou z předpokladu, že zmíněný součet je menší nebo větší dvou úhlů pravých.

V druhém případě, kdy Saccheri předpokládal, že $\alpha + \beta + \gamma > 2R$, podařilo se mu dojíti ke sporu — a tedy dokázal nemožnost předpokladu (S. předpokládal totiž, že přímka je délky nekonečné). V případě $\alpha + \beta + \gamma < 2R$ nepodařilo se Saccherimu přes všechno úsilí dojíti ke sporu. Dospěl jen k řadě pouček, které si sice matematicky neodporovaly, ale které byly v rozporu s názorem na přímku. Spoléhaje na tento apriorní názor, domníval se Saccheri, že ze zdánlivé nemožnosti důsledků předpokládané věty dokázal její nemožnost a tím tedy tvrzení $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ a tedy také 5. postulát. Zdá se, že tento italský mnich neměl dosti odvahy k úplnému spolehnutí na vlastní logiku a tím k vyřknutí věty: postulát je nedokazatelný, ale je faktem, že rozvinul souvisle a logicky geometrii a že to co pokládal za souhrn pouček, které svou „absurdností“ dokazovaly 5. postulát, je základem nové geometrie, která je bezesporná.

Podobně Legendre (1752—1833) dokazoval 5. postulát za pomoci absurdnosti věty: Velikost úhlu závisí na velikosti ramene. Správnými matematickými dedukcemi dospěl k této větě, ale místo aby se přidržel těchto dedukcí, ustoupil před vžitou vírou v apriornost názoru a prohlásil větu za absurdní a tím „dokazoval“ 5. postulát. A podobně uvažoval Lambert a jiní.

Dílo Saccheriovo nezůstalo však bez vlivu na pozdější badání.

Již Gauss (1777—1855) odvážil se setrojiti geometrii (t. j. řadu neodporujících si pouček), ve které 5. postulát byl nahrazen jiným, který jej vylučoval. Své výsledky neuměl uvésti v soulad s apriorním geom. názorem a proto se obával své výsledky uveřejniti, ačkoliv byl přesvědčen o správnosti svých matematických dedukcí.

Výsledkem všech úvah byla tedy pochybnost o nutnosti euklidovské geometrie.

Pochybnost jistě odvážná, neboť uvažme, že po dvě tisíciletí byly E. postuláty považovány za absolutně správné — jejich existence měla značný vliv na filosofii, tehdy považovanou za královnu věd.

Tato pochybnost trvala a rostla až konečně počátkem 19. stol. dali světu Rus Lobačevskij (1793—1856) a několik let po něm Maďar J. Bolyai (1802—1860) úplně logickou a souvislou geometrii neeuklidovskou zamítající rozhodně postulát rovnoběžkový.

Nová geometrie obsahovala vlastně důsledky oné Saccheriovy alternativy, která předpokládala, že součet vnitřních úhlů trojúhelníka je menší než dva pravé t. j. vybudovanou na postulátu: bodem mimo přímku lze k ní vésti dvě rovnoběžky, který ovšem vylučoval 5. postulát Euklidův. Celý názor na geometrii nabyl tím jiné tvářnosti.

Riemann zkoušel, jaký vliv bude míti popření nekonečnosti přímky a rozvinutí druhé ze Saccheriových možností. Nedošel rovněž k žádným rozporům a vybudoval další geometrii. Bylo později ukázáno, že obě tyto geometrie jsou bezesporné v takové míře, v jaké je bezesporná geometrie euklidovská a tím vlastně potvrzeno, že 5. postulát je nedokazatelný a tedy, že je pro výstavbu geometrie pouhou konvencí, kterou lze nahraditi jinou.

Existovaly tedy v 60. letech minulého století vlastně vedle sebe 3 geometrie: Euklidova, Lobačevského a Riemannova. Poslední dvě nazýváme obvykle geometrie neeuklidovské. Každá z nich vedla k jinému názoru na prostor a dodejme předem: nepodařilo se rozhodnouti, která z nich je geometrií prostoru, který nás obklopuje. (Ta geometrie bude geometrií prostoru, která plyne z fysikálních zákonů tohoto prostoru.) Je to více méně vinou měnících se fysikálních názorů na svět.

Snažili jsme se stručně uvésti vývoj geometrie, jak se dál od doby staré skepsí o 5. postulátu Euklidově. (Stanovisko axiomatické.) Poznali jsme, že geometři nahradili 5. postulát jiným a dospěli tak ke geometriím, kterým říkáme *neeuklidovské*. Je myslitelný jiný postup — nezvoliti místo 5. postulátu žádný jiný. Skutečně řada matematiků obírala se takovými geometriemi; dostali geometrie, o nichž říkáme že *nejsou euklidovské*.

Historie důkazů 5. postulátu ukazuje, že přesné vybudování geometrie na axiomech je velmi obtížné. Je však možná ještě jiná cesta, která vedla geometry nové doby k studiu geometrie neeuklidovské — ukázal ji geniální matematik F. Klein. Přihlédneme k oběma těmto cestám v jednom z příštích čísel. Upozorňujeme zatím na českou učebnici neeuklidovské geometrie, která byla v podstatě našemu článku pramenem: V. Hlavatý: Úvod do neeuklidovské geometrie. Vydala JČMF r. 1926 ve sbírce Kruh.

F. V.

Mosaika.

Prof. Dr. *Vladimír Novák.*

Povrchové napětí. Snadno a lacino pobavíte se jednoduchými pokusy, které ukazují zajímavé rozdíly v povrchovém napětí čisté vody a vodního roztoku. Je to vděčné odvětví mechaniky a velmi poučné, v němž se dají sestaviti mnohé překvapující pokusy. Nalijte čisté vody (nejlépe přímo z vodovodu) do ploché misky (fotografické) a když se povrch uklidnil, posypte jej jemnou vrstvou prášku z barviva, které se ve vodě nerozpouští. Hodí se dobře světlý okr, nebo anglická zeleň a pod., kterých užívají malíři pokojů. Povrch vody se popráší při tomto uspořádání. Misku s vodou překlopíme lepenkovou krabicí, z níž lze sejmouti víko. Pigmentový prášek vloží se do širokohrdlé láhve, kterou převážeme plátnem, převrátíme a nárazy pěstí vytvoříme mráček prachu, kterým se naplní krabice. Pak se krabice víkem přikryje a prach se volně snese na vodní hladinu.

Různost povrchového napětí čisté vody a roztoku ukáže se pak tímto jednoduchým pokusem. Větší jehlu protáhneme prsty tak, aby zvláště na špičce utkvělo něco kožního výpotku a pak protkneme špičkou poprášený povrch vody. Okamžitě se kolem jehly utvoří prázdný kruh, který po vynoření jehly se pomalu svírá a po př. úplně zmizí. Utvoříme-li dva takové „kruhy“ rychle za sebou, v místech poněkud vzdálených, povstane zajímavý pronik