František Procházka

Verallgemeinerung der stereographischen Projection der Flächen zweiten Grades

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 14 (1885), No. 1, 1--9

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122096

Zobecnění stereografického promítání ploch 2. stupně.

Napsal

Bedřich Procházka,

docent na české vysoké škole technické v Praze.

1. Každému bodu plochy 2. stupně náležejí určité dvě plošné přímky, realné neb imaginarné, jež každá rovinná křivka této plochy ve dvou realných neb imaginarných bodech proniká.

Je-li takový bod plochy středem centralného promítání, libovolná rovina pak rovinou průmětnou, promítají se obě zmíněné přímky ve dva body realné neb imaginarné, v nichž se průměty všech rovinných křivek plochy pronikají. Tvoří tedy takové průměty všech rovinných křivek plochy soustavu křivek 2. stupně, majících dva body společné.

Je-li rovina průmětná stejnosměrná s rovinou tečnou, sestrojenou ve středu promítání ku ploše 2. stupně, jíž zmíněné dvě přímky náležejí, jsou průměty těchto přímek body smíru (realnými neb imaginarnými), a proto průměty rovinných křivek plochy křivkami podobnými a podobně položenými. Tento druh centralného promítání, jenž se *stereografickým* zove, jest tedy jen zvláštním případem svrchu zmíněného promítání, jež z té příčiny *zobecněným promítáním stereografickým* nazývám.

Na základě této vlastnosti zobecněných průmětů stereografických rovinných křivek plochy 2. stupně a na základě toho, že dáme *obrazům útvarů rovinných* dle zásad *„Ikonognosie“* *) význam *obrazů útvarů prostorových*, možno řešiti mnohé úlohy, týkající se křivek 2. stupně, majících dva body společné, jakož i majících čtyři body společné, tvořících tedy svazek křivek 2. stupně.

Z různých úloh týkajících se takovýchto soustav a svazků křivek 2. stupně, provedeme některé, k jichž rozřešení dospě-

*) *„Grundlagen der Ikonognosie“* von Prof. Franz *Tilšer*. Prag 1878.

jeme dle zásad *deskriptivní geometrie týmiž* konstrukcemi jako při řešení *novější geometrii.*

Tak možno řešiti známou úlohu novější geometrie: *V rovině* R *nalézají se dvě křivky 2. stupně K a L, jichž dva body proniku ${}^1p$ a ${}^2p$* (realné neb imaginarné) *jsou dány. Mají se určiti ostatní dva body proniku, je-li křivka K úplně sestrojena a křivka L dalšími třemi body ${}^1l$, ${}^2l$ a ${}^3l$ určena.*

2. Především předpokládejme, že dané dva společné body ${}^1p$ a ${}^2p$ křivek K a L jsou *realné.* (Obr. 1.)

Považujme křivky K a L za centralné průměty dvou rovinných křivek A a B plochy hyperboloidu (po případě hyperbol. paraboloidu), z jistého bodu s této plochy do libovolné roviny M promítnutých. Společné body ${}^1p$, ${}^2p$ křivek K a L považujme pak za průměty přímek P a Q, různých soustav plochy, střed promítání s obsahujících, zároveň však také za centr. průměty bodů proniku těchto přímek s křivkami A a B.

Následkem toho jest křivka A úplně centralným obrazem vyjádřena, kdežto křivka B jen obrazy pěti svých bodů a sice obrazy ${}^1b_3 \equiv {}^1l_1$, ${}^2b_3 \equiv {}^2l_1$, ${}^3b_3 \equiv {}^3l_1$, ${}^4b_3 \equiv {}^1p_1$, ${}^5b_3 \equiv {}^2p_1$ jest určena.*) Druhé dva body proniku ${}^3p$ a ${}^4p$ křivek K a L jsou centr. průměty proniků ${}^6b$ a ${}^7b$ křivek A a B.

Abychom tyto body ${}^6b$ a ${}^7b$ určili, uvažme, že náležejí zároveň přímce proniku J rovin A a B, obsahujících křivky A a B, tak že je možno určiti jakožto body proniku této přímky J s křivkou A. Pronik J určíme na základě dvou *pomocných* rovin C a D, obsahujících dvé přímek plochy různých soustav, jež lze přesně stanoviti. Takovými přímkami různých soustav, jež jednu rovinu pomocnou C určují a zároveň křivku rovinnou 2. stupně plochy zastupují jsou: jedna ${}^1P$ první soustavy, obsahující bod ${}^1b$ křivky B a tedy pronikající přímku Q druhé soustavy, druhá R druhé soustavy, obsahující bod ${}^2b$ křivky B a pronikající přímku P první soustavy. Rovina tato C proniká roviny A a B ve dvou přímkách H a G, které se v jednom bodu c přímky J pronikají. Pronik H roviny A křivky A s ro-

*) Obrazy rovinných útvarů vyznačeny dle přednášek p. prof. *Fr. Tilšera „o organ. geometrii formy“,* ležatou *1*, obrazy centr. průmětů pak stojatou 3.

vinou C přímek ${}^1P$ a R určen jest proniky ${}^1a$ a ${}^2a$ přímek těchto s křivkou A, a pronik G roviny B křivky B s toutéž rovinou C určen body ${}^1b$ a ${}^2b$ oběma rovinám společnými.

Kdyby křivka A *nebyla úplně sestrojena*, jsouc vyjádřena pouze obrazy *pěti svých bodů*, určíme pronik přímky ${}^1P$ s touto křivkou A na *těchže zásadách zobecněného promítání stereografického* beze všeho užití vět novější geometrie.

Předpokládejme vedle bodů ${}^1a'$ a ${}^2a'$, jichž průměty jsou zároveň průměty přímek P a Q, ještě tři další body ${}^3a'$, ${}^4a'$, ${}^5a'$ křivky A (obr. 2.). Abychom pronik ${}^1a$ přímky ${}^1P$ s křivkou A určili, mysleme si přímku R' druhé soustavy, náležející bodu ${}^3a'$, kteráž přímku ${}^1P$ v určitém bodu proniká, určujíc s ní rovinu E. Dále si mysleme přímku ${}^4P'$ první soustavy, bod ${}^4a'$ obsahující, a bodem ${}^5a'$ pak přímku druhé soustavy S', přímku ${}^4P'$ pronikající a s ní určitou rovinu F určující. Roviny A, E a F pronikají se v určitém bodu t, jejž zároveň přímky proniku těchto tří rovin obsahují. Pronik H' rovin A a F určen body ${}^4a'$ a ${}^5a'$, pronik G' rovin E a F body ${}^4r'$ a ${}^1s'$. Bodem proniku t přímek H' a G' a bodem ${}^3a'$ určena přímka proniku J' rovin A a E, jež proniká přímku ${}^1P$, náležející rovině E, v bodu ${}^1a$, jenž musí býti jakožto bod plochy hyperboloidu na křivce A, a jest tudíž pronikem přímky ${}^1P$ s křivkou A.

Tato konstrukce souhlasí úplně s konstrukcí na základě věty *Pascalovy*. Průmět přímky G' jest tak zvanou *Pascalovou přímkou*, a přímky $\overline{{}^1a'{}^5a'}$, $\overline{{}^2a'{}^1a}$; $\overline{{}^5a'{}^4a'}$, $\overline{{}^1a{}^3a'}$; $\overline{{}^4a'{}^2a'}$, $\overline{{}^3a'{}^1a'}$ jsou páry v bodech přímky Pascalovy se pronikajících stran 6tiúhelníka ${}^1a'\,{}^5a'\,{}^4a'\,{}^2a'\,{}^1a\,{}^3a'$, křivce A vepsaného. Obdobně určíme pronik ${}^2a$ přímky R (obr. 1.) s touto křivkou.

Příležitostně uvedeme, kterak lze na těchže základech sestrojiti tečnou přímku ku křivce rovinné v jednom z pěti bodů ji určujících. Na př. v obr. 3. tečnou přímku T v bodě ${}^3a$ křivky A, pěti body ${}^1a$, ${}^2a$, ${}^3a$, ${}^4a$, ${}^5a$ určené, sestrojíme jakožto pronik tečné roviny T v bodu ${}^3a$, určené přímkami ${}^3P$ a R různých soustav, s rovinou A této křivky A.

K tomu cíli užijeme pomocné roviny F, určené ku př. přímkami ${}^4P$ a S různých soustav. Tato rovina proniká rovinu T a rovinu A v přímkách H a J, v bodu t se pronikajících.

Tímto bodem t a bodem ${}^3a$ určena jest tečna T. Patrno, že se tato konstrukce shoduje s konstrukcí novější geometrie, z Pascalova 6tiúhelníka plynoucí.

Vraťme se opět ke konstrukci přímky J, jejíž druhý bod nám zbývá stanoviti (obr. 1.). Druhou rovinou pomocnou budiž rovina D, určená přímkou ${}^1P$, dříve již sestrojenou, a přímkou druhé soustavy S, jež bod ${}^3b$ obsahuje a přímku ${}^1P$ proniká. Rovina D proniká roviny A a B v přímkách ${}^1H$ a ${}^1G$, jež se v druhém bodu d přímky J pronikají. Body c a d určena jest tedy přímka J a její *realné* neb *imaginarné* body proniku s křivkou A jsou body proniku ${}^6b$ a ${}^7b$ křivek A a B plochy hyperboloidu. Průměty těchto dvou bodů proniku jsou druhými dvěma hledanými proniky ${}^3p$ a ${}^4p$ křivek K a L. Konstrukce tato úplně souhlasí s konstrukcí geometrie novější, založenou na na větě, že svazek křivek 2. stupně určuje na libovolné křivce 2. stupně, jež jeho dva body základní obsahuje, řadu involuční bodovou.

Na základě těchže zásad pojímání útvarů rovinných jakožto zobecněných průmětů stereografických možno *přímo* určiti proniky přímky J s křivkou A (obr. 1.), určena-li tato pouze *pěti svými body.*

Předpokládejme opět vedle bodů ${}^1a$ a ${}^2a$, jichž průměty jsou zároveň průměty přímek P a Q, ještě tři body ${}^3a$, ${}^4a$, ${}^5a$ křivky A (obr. 4.). Centralný průmět přímky J považujeme zároveň za centralný průmět křivky C, jež náleží ploše hyperboloidu a jest přímkou J v hledaných bodech ${}^6b$ a ${}^7b$ proniknuta. Abychom tyto body stanovili, mysleme si útvary tyto orthogonalně promítnuty. Orthogonalný průmět středu centr. promítání budiž vyjádřen v obraze tečkou s_2.*) Orthogonalný průmět křivky C budiž křivkou kruhovou, vyjádřenou v obraze kružnicí C_2, tečku s_2 obsahující.

Odvodíme pouze orthog. průmět přímky J, jenž orthog. průmět křivky C proniká v orthog. průmětech proniků přímky J s křivkou A. K tomu cíli sestrojme body ${}^3a$ a ${}^4a$ přímky obou soustav ${}^3P$, R a ${}^4P$, S. Přímky ${}^3P$, S a ${}^4P$, R určují ro-

---

*) Obrazy průmětů orthog. označeny v souhlasu *s org. geometrií formy* stojatou 2.

viny G, H, pronikající se v přímce F, určené body ${}^3a$ a ${}^4a$. Rovina S, která jest centralně promítající rovinou křivky C, proniká tyto dvě roviny v přímkách: G (určené body ${}^4c$ a ${}^3c$) a H (určené body ${}^2c$ a ${}^1c$), jež se patrně v bodu e přímky F pronikají. Ježto bod e přímce F a zároveň rovině S náleží, jest jedním bodem přímky J. Abychom ještě druhý bod přímky této stanovili, určíme ještě bodem ${}^5a$ přímky obou soustav T a ${}^5P$. Rovina J, určená přímkami ${}^5P$ a R, a rovina I, určená přímkami ${}^3P$ a T, pronikají se v přímce F', určené body ${}^3a$ a ${}^5a$. Zároveň pronikají tyto roviny rovinu centr. promítající S v přímce G', určené body ${}^6c$ a ${}^1c$, a v přímce H', určené body ${}^4c$ a ${}^5c$, které se patrně v bodu f přímky F' pronikají. Bod f jest druhým bodem přímky J. Orthog. obrazy těchto dvou bodů e a f, určujících přímku J, sestrojíme pomocí orthog. obrazů přímek G, H a G', H'. Orthog. obraz přímky J obdržíme spojením orthog. obrazů bodů e a f. Přímka J proniká křivku C jakož i křivku A v hledaných bodech ${}^6b$ a ${}^7b$, z jejichžto obrazů orthog. odvodí se pak obrazy centralné pomocí orthog. obrazů promítajících přímek S_{6b} a S_{7b}. Konstrukce tato srovnává se úplně s konstrukcí novější geometrie, ano lze tuto konstrukci při této příležitosti zjednodušiti a sice tak, že není nutno stanoviti body e a f jakožto body proniku přímek G, H a G', H', alebrž jako proniky přímky G s přímkou F, a přímky G' s přímkou F', čímž se z pravidla body e a f přesněji stanoví.

Ustanovivše pronik J, můžeme na základě zásad zobec. promítání stereograf. celou křivku L sestrojiti, stanovíce další body její spůsobem následujícím: Libovolná přímka V druhé soustavy této plochy hyperboloidu určuje s přímkou ${}^1P$ rovinu K. Roviny A, B a K pronikají se ve třech přímkách, společný bod g obsahujících. Tento bod g (obr. 5.) určen jest dvěma z těchto přímek a to přímkami J a E, určené body ${}^1a$ a ${}^4a$. Bodem tímto a bodem ${}^1b$ určena jest třetí přímka proniku D rovin B a K, jež přímku V v bodu ${}^8b$ křivky B proniká. Takovýmto spůsobem možno další body křivky L, jakožto průmětu křivky B, stanoviti.

3. Přistupme ku případu druhému, kde dva body, oběma křivkám K a L společné, jsou *imaginarnými*, nalézajíce se na určité přímce P.

Považujme úplně sestrojenou křivku K (obr. 6) za stopu A plochy hyperboloidu v rovině průmětné M, křivku druhou L za centr. průmět křivky B téže plochy, promítnuté z určitého bodu jejího s do průmětny; přímku P, obsahující ony dva společné body imaginárné ${}^3p$ a ${}^4p$, za stopu M roviny B křivky B. Středu promítání s, jakožto bodu plochy náležejí dvě přímky P a Q, jichž centr. průměty se s druhými dvěma body proniku ${}^1p$ a ${}^2p$ křivek K a L stotožňují. Tyto přímky P a Q určují zároveň rovinu tečnou T plochy hyperboloidu, jejíž stopě M_T ony centr. průměty přímek P a Q náležejí, a tedy také jakožto proniky této stopy M_T s křivkou prvou A určeny jsou.

Tuto rovinu tečnou T stanovíme nejsnáze následovně: Přímky určené průměty bodů ${}^1b$, ${}^2b$ a ${}^1b$, ${}^3b$ křivky B, považujme za průměty dvou rovinných křivek C a D plochy, jež se v rovinách promítajících S_C a S_D nalézají a tedy střed promítání s obsahují.

Tečné přímky ${}^1T$ a ${}^2T$ ku křivkám C a D ve středu promítání určují rovinu tečnou T. Tyto tečné přímky ${}^1T$ a ${}^2T$ sestrojíme nejsnáze pomocí průmětů pravoty křivek C a D. Ježto křivka C vedle středu promítání s také body ${}^1b$, ${}^2b$ křivky B obsahuje, pronikajíc zároveň křivku A v bodech ${}^1a$, ${}^2a$, jest pěti body a tedy úplně určena (pag. 5.).

Budiž s_2 obrazem orthog. průmětu bodu s plochy, za střed promítání zvoleného, orthog. průmět bodu ${}^1b$ budiž pak vyjádřen v tečce ${}^1b_2$. Pronik F rovin B a S_C náleží rovině B a tudíž proniká přímku stopní M této roviny v určitém bodu m_F, jenž se stotožňuje se svým orthog. a centr. průmětem. Orthog. průmětem bodu m_F a orthog. průmětem bodu ${}^1b$ určen jest orthog. průmět přímky F, jenž orthog. průmět přímky centr. promítající S_{2b} v orthog. průmětu bodu ${}^2b$ proniká. A ježto se orthog. a centr. průměty bodů ${}^1a$ a ${}^2a$ stotožňují, máme v orthog. průmětu pět bodů, jimiž jest orthog. průmět křivky C určen.

Tečnou přímku ${}^1T$ v bodu s křivky C možno určiti dle Pascalovy věty, odvozené na základě zásad zobec. promítání stereografického (pag. 5.). Její stopa ${}^1m$ v průmětně M jest jedním bodem přímky stopní roviny tečné T, v bodu s plochy hyperboloidu stanovené. Obdobně sestrojíme tečnou přímku ${}^2T$ v bodě s křivky D, určené body ${}^1b$, ${}^3b$, ${}^1a'$, ${}^3a$, s na základě orthog. průmětu těchto bodů. Stopa ^2m této tečné přímky ^2T určuje se stopou ^1m stopní přímky M_T, kteráž křivku A ve dvou bodech proniká, jež jsou centr. průměty přímek P a Q, střed promítání obsahujících, a zároveň proniky hledanými ^1p a ^2p křivek K a L.

Sestrojivše body proniku ^1p a ^2p, můžeme opět spůsobem v 1. případu vyznačeným (pag. 7.), celou křivku L sestrojiti.

4. Každému bodu s *plochy kuželové* 2. stupně náležejí dvě soumezné přímky plošné P, P'. Z té příčiny pronikají se *zobecněné průměty stereografické* veškerých rovinných křivek plochy kuželové 2. stupně ve dvou *soumezných bodech* (v průmětech zmíněných dvou soumezných přímek plošných) t. j. *dotýkají se* vespolek.

Na tomto základě možno stanoviti druhé dva body proniku křivek K a L v rovině R se nalézajících, jsou-li jejich dané *dva společné body* ^1p *a* ^2p *soumeznými* (obr. 7.). Považujme obě dané křivky, z nichž K úplně sestrojena a L mimo soumezné body ^1p, ^2p třemi dalšími body ^1l, ^2l, ^3l určena jest, za centr. průměty křivek A a B plochy kuželové 2. stupně, promítnutých z bodu s této plochy. Dotýčný bod ^1p, ^2p obou křivek K a L pak považujeme za průměty centr. soumezných přímek P, P' této plochy, obsahujících střed promítání s.

Další dva body proniku ^3p, ^4p křivek K a L možno považovati za průměty bodů proniku ^6b a ^7b křivek A a B plochy kuželové. Tyto body jsou zároveň proniky přímky J, proniku to rovin A a B, s křivkou A. Přímku J určíme takto: Body ^1b, ^2b z oněch tří bodů křivky B mysleme si přímky ^1P a ^2P plochy kuželové. Rovina C, těmito přímkami určená, proniká roviny křivek A a B v přímkách, jež se v jednom bodu c přímky J pronikají. Obdobně určíme druhý bod d přímky J pomocí roviny D, určené přímkou ^1P a přímkou ^3P, jež obsahuje bod ^3b. Přímka J, body c a d takto určená, proniká křivku A v bodech ^6b a ^7b, realných neb imaginárných, jichž centr. průměty jsou body proniku ^3p a ^4p křivek K a L. Na základě sestrojené přímky J možno opět uvedeným spůsobem celou křivku L jakožto průmět křivky B sestrojiti.

5. Kdyby křivka L křivku K *oskulovala,* t. j. tři soumezné body ^1p, ^2p a ^3p s křivkou K společné měla, a ještě dalšími dvěma body ^1l a ^2l určena byla (obr. 8.), sestrojíme čtvrtý bod

oběma křivkám společný snadno, považujeme-li křivky K a L za *zobecněné průměty stereografické* křivek A a B plochy kuželové 2. stupně; první dva soumezné body ${}^1p$ a ${}^2p$ za průměty soumezných přímek P a P' plochy, střed promítání obsahujících, a třetí soumezný bod ${}^3p$ za průmět jednoho proniku ${}^3b$ křivek A a B. Zbývá nám tedy určiti ještě druhý pronik ${}^6b$ křivek A a B, jehož průmět stereografický jest čtvrtým bodem proniku ${}^4p$ křivek K a L, v rovině R se nalézajících.

Tento bod ${}^6b$ určuje s bodem ${}^3b$ přímku J proniku rovin A a B, kterou si následním spůsobem určíme: Přímka ${}^1P$, obsahující bod ${}^1b$, a přímka ${}^2P$, obsahující bod ${}^2b$, určují rovinu E, jež proniká roviny A a B v přímkách H (určené body ${}^1a$, ${}^2a$) a G (určené body ${}^1b$, ${}^2b$), jež se v bodu c přímky J pronikají. Bodem ${}^3b$ a bodem c jest tedy přímka J určena, která křivku A v bodu ${}^6b$ proniká, jehož průmět jest čtvrtým společným bodem ${}^4p$ křivek K a L.

6. Tohoto řešení možno užiti k tomu, aby se sestrojila *křivka kruhová křivosti* L v určitém bodu ${}^1p$ úplně sestrojené křivky K, jakožto křivka kruhová, určená třemi soumeznými body ${}^1p$, ${}^2p$ a ${}^3p$.

Považujme tuto kruhovou křivku křivosti za zobec. průmět stereograf. křivky kruhové B, jež náleží ploše kuželové 2. stupně, a jejíž rovina B jest stejnosměrná s průmětnou. Křivku úplně sestrojenou K pak pojímejme jako průmět křivky A téže plochy, nalézající se v rovině A nakloněné ku průmětně (obr. 9.).

První dva soumezné body ${}^1p$, ${}^2p$ považujme za průměty soumezných přímek P, P' plochy kuželové, obsahujících střed promítání, třetí bod soumezný za průmět jednoho bodu proniku ${}^3b$ křivky A s křivkou B. Nutno tedy určiti druhý bod proniku ${}^6b$ těchto křivek A, B. Jeho průmět bude pak čtvrtým bodem proniku křivky K (úplně sestrojené) s kruhovou křivkou oskulační L.

Tento druhý bod proniku ${}^6b$ určíme jako předešle pomocí libovolné roviny, pronikající plochu kuželovou v určité křivce. Pro zjednodušení mysleme si pomocnou rovinu C, stejnosměrnou s průmětnou M a pronikající tedy plochu kuželovou v určité křivce kruhové C. Stereografickým průmětem této křivky jest křivka kruhová, dotýkající se průmětu křivky A v průmětech přímek P a P'. Rovina C této křivky C proniká rovinu A křivky

A v přímce H, určené body ^1a a ^2a, a rovinu B křivky B v přímce smíru G_∞. Pronik d_∞ těchto přímek H a G_∞ jest jedním bodem přímky J, jenž s bodem ^3b tuto přímku určuje. Pronik přímky J s křivkou A jest druhým pronikem ^6b křivek A a B, jehož průmět centrálný jest čtvrtým společným bodem ^4p křivky K a kruhové křivky křivosti L. Na základě tohoto bodu ^4p možno nyní kruhovou křivku oskulační L snadno sestrojiti.

Kdyby byly sestrojeny osy křivky K, zvolíme takovou křivku C, jejíž průmět lze snadno sestrojiti. Zvolíme totiž za její průmět kruhovou křivku, jejíž střed se v proniku normály $N_{^1p}$ s jednou nebo druhou osou O, O' nalezá (obr. 10.). Tato křivka C proniká křivku A ve dvou soumezných bodech ^1a, ^2a, určujících tečnu ^1T křivky A, jakožto přímku H. Přímka tato určuje bod smíru d_∞, jenž s bodem ^3b určuje přímku J, pronikající křivku A v bodu ^6b. Pomocí tohoto bodu ^6b, jehož průmětem jest bod ^4p, možno oskulační křivku kruhovou sestrojiti.

Z této konstrukce zřejmo, že přímka J, stejnosměrná s ^1T, tvoří s osami křivky K tytéž odchýlky jaké tečná přímka $T_{^1p}$ v bodě ^1p křivky A s těmito osami stanoví, na čemž se sestrojení oskulační křivky kruhové pro určitý bod křivky 2. stupně v novější geometrii zakládá. —

Na základě *reciprokých* souvislostí útvarů, odpovídajících dle *zákona reciprocity* právě uvedeným útvarům základním a z těchto odvozeným, můžeme řešiti *úlohy reciproké.*

Uvedeným souvislostem plochy 2. stupně, středu promítání, náležejícího této ploše, a libovolné roviny průmětné, na jichž základě lze mnohé úlohy geometrie novější řešiti, odpovídají reciproké souvislosti *plochy 2. třídy, roviny průmětné*, této plochy se *dotýkající* (a tedy dvě její přímky obsahující) a *libovolného* středu promítání, na jichž základě můžeme opět řešiti úlohy geometrie rovinné, odpovídající oněm dle zákona reciprocity.

Tento způsob promítání nemá však více karaktér zobecněného promítání stereografického, pročež se o něm šířiti nebudeme, podotýkajíce pouze, že na základě jeho lze řešiti úlohu: *Mají se sestrojiti druhé dvě společné tečné přímky dvou křivek druhé třídy, v určité rovině se nalezajících, jichž dvě společné tečny známe, sestrojena-li úplně jedna křivka a určena-li druhá třemi dalšími tečnými přímkami.*