Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 5, 656--720

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122087

14. Zobrazte průměty a osvětlení střechy tvaru trojbokého hranolu, ze které vyniká věž, skládající se ze šestibokého hranolu a šestibokého jehlanu. [Střecha: základna rozměrů 7·5, 6·4 v π, delší rozměr svírá s osou x úhel 120°, $v = 6·5$; hranol: S (0, 6·8, 9·5), $r = 1·5$, dvě jeho protější hrany protínají hřeben střechy; jehlan: střed podstavy S, $r = 1·8$, $v' = 5$; směr světla obvyklý.]

Úlohy.

Řešení úloh.

a) Z mathematiky.

1.

Ustanoviti hodnotu výrazu

$$\sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + \ldots}}}}$$

Dr. *J. Tomáš.*

Řešení. Zaslal p *Jan Sitko*, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži.

Označme

$$\sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + \ldots}}}} = x$$

a dále

$$\sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \ldots}}}} = y.$$

Pak musí býti

$$x = \sqrt{a - y}, \quad y = \sqrt{a + x}$$

a tedy

$$x^2 = x - y \qquad (1)$$

$$y^2 = a + x. \qquad (2)$$

Odečtením těchto rovnic obdržíme

$$x^2 - y^2 + y + x = 0,$$

neboli

$$(x + y)(x - y + 1) = 0.$$

Musí tedy x a y vyhovovati jedné z rovnic

$$x + y = 0 \qquad (3)$$

$$x - y + 1 = 0 \qquad (3')$$

Užijeme-li rovnice (3) a dosadíme do některé z rovnic (1) a (2) $y = -x$, shledáme, že x musí vyhovovati kvadratické rovnici

$$x^2 - x - a = 0 \tag{4}$$

a tedy

$$x = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + a} = \frac{1 \pm \sqrt{4a + 1}}{2}.$$

Podobně, dosadíme-li z rovnice (3′) do některé z rovnic (1) a (2) $y = x + 1$, obdržíme kvadratickou rovnici pro x

$$x^2 = x - (a - 1) = 0 \tag{4′}$$

a odtud

$$x = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{a - \tfrac{3}{4}} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a - 3}}{2}.$$

Předpokládáme-li, že jest a číslo kladné a že odmocniny béřeme arithmeticky, tu jsou x a y čísla kladná. Z toho plyne, že rovnice (3) a tedy (4) nemůže býti splněna. Rovnice (4′) z rovnice (3′), (1) neb (2) plynoucí poskytne $x > 0$, bude-li $a > 1$. Z obou kořenů rovnice (4′) může poskytovati hledanou limitu kořen kladný

$$x = \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}.$$

Řešení 2. Zaslal p. *Viktor Pírko*, stud. VII. tř. g. v Č. Budějovicích.

Označme x hledanou hodnotu.

Pak bude

$$x = \sqrt{a - \sqrt{a + x}}$$

a odstraníme-li odmocniny, shledáme, že x musí vyhovovati rovnici čtvrtého stupně

$$f(x, a) = x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0.$$

Polynom čtvrtého stupně v x, $f(x, a)$, možno rozložiti v součin dvou činitelů stupně druhého v x,

$$f(x, a) = (x^2 - x - a)(x^2 - x - a + 1).$$

(Rozklad ten obdržíme, uvažujeme-li $f(x, a)$ jako polynom druhého stupně v a.

Stanovme kořeny rovnice druhého stupně pro a, $f(x, a) = 0$. Ty jsou

$$\tfrac{1}{2}[2x^2 + 1 \pm (2x + 1)],$$

t. j.

$$x^2 + x + 1 \quad \text{a} \quad x^2 - x.$$

Musí tedy býti

$$f(x, a) = [a - (x^2 + x + 1)]\,[a - (x^2 - x)],$$

odkudž plyne okamžitě rozklad svrchu napsaný.)

Rozpadá se tedy rovnice čtvrtého stupně v x, $f(x, a) = 0$ na dvě rovnice kvadratické

$$x^2 - x - a = 0 \quad \text{a} \quad x^2 - x - a - 1 = 0.$$

Řešením jich obdržíme

$$x_1, x_2 = \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4a + 1})$$
$$x_3, x_4 = \tfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{4a - 3}).$$

Snadno shledáme, že jest

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots}}} = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{4a + 1})$$

$$-\sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \ldots}}} = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{4a + 1})$$

$$\sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + \ldots}}}} = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{4a - 3})$$

$$-\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a - \ldots}}}} = \tfrac{1}{2}(-1 - \sqrt{4a - 3})$$

2.

Nalézti podmínku, kdy rovnice algebraická stupně třetího, čtvrtého a pátého má dva kořeny stejné absolutní hodnoty, ale protivného znamení. Prof. *Rud. Hruša.*

Řešení 1. Zaslal p. *Václav Jíra*, stud. VIII. tř. g. v Praze v Žitné ul.

Aby rovnice n-tého stupně

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

měla dva kořeny stejné absolutní hodnoty, ale protivného znamení, musí míti společný kořen s rovnicí, která vznikne z původní, klademe-li v ní $-x$ místo x, t. j. s rovnicí

$$a_0x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1}x + (-1)^n a_n = 0. \tag{2}$$

Musí tedy míti také společný kořen rovnice vzniklé sečtením a odečtením rovnic (1) a (2), t. j. rovnice

$$a_0x^n + a_2x^{n-2} + a_4x^{n-4} + \ldots = 0, \tag{3}$$

$$a_1x^{n-1} + a_3x^{n-3} + a_5x^{n-5} + \ldots = 0. \tag{4}$$

Je-li n liché, lze psáti

$$a_0x^n + a_2x^{n-2} + a_4x^{n-4} + \ldots + a_{n-1}x$$
$$= x\,(a_0x^{n-1} + a_2x^{n-3} + \ldots + a_{n-1})$$

a podobně, je-li n sudé

$$a_1x^{n-1} + a_3x^{n-3} + a_5x^{n-5} + \ldots + a_{n-1}x$$
$$= x\,(a_1x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \ldots + a_n).$$

Nemá-li tedy předložená rovnice kořen $x = 0$, musí míti v případě n lichého rovnice (4) společný kořen s rovnicí

$$a_0x^{n-1} + a_2x^{n-3} + \ldots + a_{n-1} = 0, \tag{5}$$

a v případě n sudého rovnice (3) společný kořen s rovnicí

$$a_1x^{n-2} + a_3x^{n-4} + \ldots + a_n = 0. \tag{6}$$

Obdržíme tedy hledanou podmínku při n lichém, eliminujeme-li x^2 z rovnic (4), (5) $\left(\text{obě jsou stupně } \frac{n-1}{2}\right)$ a při n sudém, eliminujeme-li x^2 z rovnic (3), (6) $\left(\text{jedna z nich jest stupně } \frac{n}{2}, \text{ druhá } \frac{n-2}{2}\right)$.

Vidíme tedy, že, aby měla rovnice stupně třetího

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

dva kořeny stejné absolutní hodnoty, ale protivného znamení, musí míti rovnice

$$a_1x^2 + a_3 = 0, \quad a_0x^2 + a_2 = 0$$

společný kořen. Eliminací x^2 obdržíme hledanou podmínku

$$a_0a_3 - a_1a_2 = 0.$$

Podobně při rovnici stupně čtvrtého

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x + a_3x + a_4 = 0$$

musí míti rovnice

$$a_0x^4 + a_2x^2 + a_4 = 0,$$
$$a_1x^2 + a_3 = 0$$

společný kořen. Eliminací x^2 obdržíme

$$a_0a_3^2 - a_1a_2a_3 + a_1^2a_4 = 0.$$

Konečně při rovnici stupně pátého

$$a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$$

musí míti rovnice

$$a_1x^4 + a_3x^2 + a_5 = 0,$$
$$a_0x^4 + a_2x^2 + a_4 = 0$$

společný kořen, což vede, eliminujeme-li x^2, na podmínku

$$(a_0a_5 - a_1a_4)^2 = (a_0a_3 - a_1a_2)(a_2a_5 - a_3a_4).$$

Řešení 2. Zaslal p. *Jaroslav Mayer*, stud VI. tř. gymn. v Praze v Žitné ul.

Má-li algebraická rovnice stupně třetího

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

dva kořeny stejné absolutní hodnoty, ale protivného znamení α a $-\alpha$ a označíme-li třetí kořen její β, musí býti identicky

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = (x^2 - \alpha^2)(x - \beta).$$

Provedeme-li násobení a srovnáme koefficienty, obdržíme vztahy

$$a_1 = -\beta, \quad a_2 = -\alpha^2, \quad a_3 = \alpha^2\beta$$

a odtud vyloučením α a β nalezneme, že koefficienty dané rovnice musí hověti relaci

$$a_3 = a_1a_2.$$

Podobně při rovnici stupně čtvrtého

$$x^4 + a_2x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0,$$

jež má dva kořeny stejné absolutní hodnoty, ale protivného znamení α a $-\alpha$, musí býti možno uvésti levou stranu na tvar

$$(x^2 - \alpha^2)(x^2 + b_1x + b_2).$$

Porovnáním koefficientů u obou polynomů obdržíme rovnice
$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2 - \alpha^2, \quad a_3 = -\alpha^2 b_1, \quad a_4 = -\alpha^2 b_2.$$

Vyloučíme-li z těchto rovnic b_1, b_2, α^2, dostaneme vztah
$$a_3^2 + a_1^2 a_4 = a_1 a_2 a_3,$$
který musí splňovati koefficienty rovnice aby vytčené podmínce bylo vyhověno.

Analogicky bychom mohli postupovati při rovnici stupně pátého.

3.

Řešiti rovnice
$$a)\ tg\, x + tg\, 2x + tg\, 3x + tg\, 4x = 0,$$
$$b)\ tg\, x - tg\, 2x - tg\, 3x + tg\, 4x = 0.$$

Prof. *Rud. Hruša.*

Řešení: Zaslal p. *Vilém Lamparter*, stud. VIII. tř. gymn. v Třebíči.

Dle vzorce $tg\, \alpha + tg\, \beta = \dfrac{sin\, (\alpha + \beta)}{cos\, \alpha\, cos\, \beta}$

jest
$$\alpha) \qquad tg\, x + tg\, 4x = \frac{sin\, 5x}{cos\, x\, cos\, 4x},$$
$$\beta) \qquad tg\, 2x + tg\, 3x = \frac{sin\, 5x}{cos\, 2x\, cos\, 3x}.$$

Dosadíme-li hodnoty tyto do rovnice α), obdržíme
$$\frac{sin\, 5x}{cos\, x\, cos\, 4x} + \frac{sin\, 5x}{cos\, 2x\, cos\, 3x} = 0.$$

Předpokládejme, že $cos\, x$, $cos\, 2x$, $cos\, 3x$, $cos\, 4x \neq 0$

I můžeme poslední rovnici uvésti na tvar
$$sin\, 5x\, (cos\, 2x\, cos\, 3x + cos\, x\, cos\, 4x) = 0.$$

Rovnice tato se rozpadá na dvě:
$$1) \quad sin\, 5x = 0,$$
kterážto rovnice poskytuje
$$5x = k\pi$$
$$x = \frac{k\pi}{5},$$
kdež k značí libovolné číslo celé
$$2) \quad cos\, 2x\, cos\, 3x + cos\, x\, cos\, 4x = 0.$$

Zaveďme funkce úhlů jednoduchých dle vzorců

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\cos 3x = \cos x\,(\cos^2 x - 3\sin^2 x)$$
$$\cos 4x = \cos^4 x - 6\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x.$$

Dělíme-li pak $\cos^5 x$, což jest dle předpokladu hodnota různá od nully, obdržíme po snadné úpravě rovnici

$$2\,tg^4 x - 5\,tg^2 x + 1 = 0$$

a odtud

$$tg\,x = \pm\frac{\sqrt{5 \pm \sqrt{17}}}{2}$$

Označíme-li φ_1, resp. φ_2 ostrý úhel určený ze vztahu

$$tg\,x = \frac{\sqrt{5 \pm \sqrt{17}}}{2},$$

obdržíme tak další řešení

$$x = \pm\varphi_1 + k\pi$$
$$x = \pm\varphi_2 + k\pi.$$

Zbývá zkoumati, zda dané rovnici vyhovují hodnoty, které jsme svrchu vyloučili, totiž kořeny některé z rovnic $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\cos 4x = 0$. Snadnou úvahou (dosazením) se přesvědčíme, že nikoliv.

b) Dosazením hodnot (α) a (β) do rovnice (*b*) obdržíme

$$\frac{\sin 5x}{\cos x\cos 4x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x\cos 3x} = 0.$$

Předpokládejme nejprvé, že

$$\cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x,\ \cos 4x \neq 0.$$

Pak lze dáti poslední rovnici tvar

$$\sin 5x\,(\cos 2x\cos 3x - \cos x\cos 4x) = 0.$$

Rovnice ta rozpadá se na dvě:

$$1)\quad \sin 5x = 0.$$

Tato rovnice poskytuje

$$5x = \pi k$$
$$x = \frac{\pi k}{5}$$

$$2)\quad \cos 2x\cos 3x - \cos x\cos 4x = 0.$$

Násobme tuto rovnici 2 a užijme vzorce

$$2 \cos x \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta).$$

Tak obdržíme

$$\cos 5x + \cos x - \cos 5x - \cos 3x = 0,$$

neboli

$$\cos 3x = \cos x$$

a odtud

$$3x = \pm x + 2k\pi.$$

Z této rovnice určíme

$$x = \frac{k\pi}{2}.$$

Při k lichém bude však $\cos x$ i $\cos 3x = 0$, což jest proti svrchu učiněnému předpokladu.

Vyhovuje tedy pouze

$$x = k\pi.$$

Hodnoty svrchu vyloučené, totiž kořeny rovnic $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\cos 4x = 0$ rovnici předložené nevyhovují.

4.

Řešiti rovnici

$$tg\, 7x : tg\, 3x = tg\, 3x : tg\, x.$$

Dr. *Marian Haas.*

Řešení. Zaslal p. *Josef Šimečka,* stud. VI. tř. reálné v Příboře.

Nahraďme v dané rovnici *tg* podílem *sin* a *cos.*

I obdržíme

$$\sin x \sin 7x \cos^2 x = \cos x \cos 7x \sin^2 3x,$$

neboli

$$\sin x \sin 7x (1 + \cos 6x) = \cos x \cos 7x (1 - \cos 6x)$$

a z toho

$$(\cos 7x \cos x - \sin 7x \sin x) - \cos 6x (\cos 7x \cos x + \sin 7x \sin x) = 0.$$

Výraz v prvé závorce jest $\cos 8x$, ve druhé $\cos 6x$.

Tak dostáváme

$$\cos 8x = \cos^2 6x,$$

neboli

$$2\cos 8x = 1 + \cos 12x.$$

Klaďme $4x = y$ a v rovnici tak vzniklé

$$\cos 3y - 2 \cos 2y + 1 = 0$$

zaveďme *cos* jednoduchých úhlů dle vzorců

$$\cos 3y = 4 \cos^3 y - 3 \cos y$$
$$\cos 2y = 2 \cos^2 y - 1.$$

I obdržíme postupně

$$4 \cos^3 y - 4 \cos^2 y - 3 \cos y + 3 = 0$$
$$4 \cos^2 y (\cos y - 1) - 3 (\cos y - 1) = 0$$
$$(\cos y - 1)(4 \cos^2 y - 3) = 0.$$

Rovnici této možno vyhověti, položíme-li buď

$$\cos y - 1 = 0,$$

t. j.

$$\cos y = 1$$
$$y = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

a tedy

$$x = \frac{k\pi}{4}$$

aneb

$$4 \cos^2 y - 3 = 0$$
$$\cos y = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$y = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$$

a odtud

$$x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{24}, \dfrac{7\pi}{24}, \dfrac{13\pi}{24}, \dfrac{19\pi}{24} + k\pi \\ \dfrac{5\pi}{24}, \dfrac{11\pi}{24}, \dfrac{17\pi}{24}, \dfrac{23\pi}{24} + k\pi. \end{cases}$$

5.

Řešiti jest rovnici

$$x + y = a^{\frac{x}{y}}$$

čísly celými, jestliže a jest celé číslo kladné větší než 1.

Vladimír Živanský.

Řešení. Zaslal p. *Jaroslav Janko*, stud. VIII. tř. gymn. v Třebíči.

Předpokládejme, že jest a k-tou mocninou čísla α, $a = \alpha^k$. Buďtež nejprvé x, y čísla racionálná. Nechť jest

$$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}, \text{ kdež } \frac{x'}{y'}$$

značí zlomek redukovaný, a nechť

$$x = dx', \quad y = dy',$$

x' a y' jsou pak čísla nesoudělná.

Pak má býti

$$d\,(x' + y') = \alpha^{\frac{kx'}{y'}}.$$

Aby $\alpha^{\frac{kx'}{y'}}$ bylo číslo racionálné, musí býti kx' dělitelno y', t. j. poněvadž x' a y' jsou čísla nesoudělná, musí býti y' dělitelem k. Zvolme tedy za y' libovolného dělitele čísla k.

Racionálná řešení dané rovnice obdržíme, volíme-li za x' libovolné číslo nesoudělné s y'.

Pak $$d = \frac{\alpha^{\frac{kx'}{y'}}}{x' + y'}$$

$$x = dx', \quad y = dy'.$$

Celá řešení obdržíme na př., volíme-li

$$x' + y' = \alpha^l,$$

kdež l jest dostatečně velké celé číslo kladné.

Je-li α prvočíslo, jsou to jediná možná řešení dané rovnice.

6.

Řešiti jest rovnici

$$xy = a^{\frac{x}{y}}$$

celými čísly, značí-li a celé číslo kladné.

Vladimír Živanský.

Pan autor poznamenává, že dané úloze se vyhoví, klademe-li

$$x = \pm\, a^{\frac{1}{2}(a^l + l)}$$
$$y = \pm\, a^{\frac{1}{2}(a^l - l)}$$

kdež l jest celé číslo stejné parity s a.

7.

Dokázati jest vztah

$$\frac{1}{m+n+1}-\frac{\binom{n}{1}}{m+n}+\frac{\binom{n}{2}}{m+n-1}-\ldots$$

$$+(-1)^n\frac{\binom{n}{n}}{m+1}=(-1)^n\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}.$$

Vladimír Živanský.

Řešení. Zaslal p. *S. Pudil,* stud. VII. tř. r. v Litovli.

Označme:

$$S_n=\frac{1}{m+n+1}-\frac{\binom{n}{2}}{m+n}+\frac{\binom{n}{2}}{m+n-1}-\ldots$$

$$+-(1)^n\frac{\binom{n}{n}}{m+1}. \qquad (1)$$

Pak

$$S_n=\frac{1}{m+n+1}\left[1-\binom{n}{1}\left(1+\frac{1}{m+n}\right)\right.$$

$$\left.+\binom{n}{2}\left(1+\frac{2}{m+n-1}\right)-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}\left(1+\frac{n}{m+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{m+n+1}\left[1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots\right.$$

$$+(-1)^n\binom{n}{n}-\frac{n}{m+n}+\binom{n-1}{1}\frac{n}{m+n-1}$$

$$\left.-\binom{n-1}{2}\frac{n}{m+n-2}+\ldots+(-1)^n\binom{n-1}{n-1}\frac{n}{m+1}\right]\,.\,.\,(2)$$

Poněvadž

$$1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=(1-1)^n=0,$$

můžeme rovnici (2) psáti:

$$S_n = -\frac{n}{m+n+1}\left[\frac{1}{m+n} - \frac{\binom{n-1}{1}}{m+n-1} + \frac{\binom{n-1}{2}}{m+n-2} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{\binom{n-1}{n-1}}{m+1}\right]. \tag{3}$$

Porovnáme-li rovnici (3) s rovnicí (1), shledáme, že výraz v rovnici (3) v závorce jest S_{n-1} a tedy

$$S_n = -\frac{n}{m+n+1} \cdot S_{n-1}.$$

Znásobením rekurrentních rovnic:

$$S_n = -\frac{n}{m+n+1} \cdot S_{n-1}$$

$$S_{n-1} = -\frac{n-1}{m+n} S_{n-2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$S_3 = -\frac{3}{m+4} S_2$$

$$S_2 = -\frac{2}{m+3} S_1$$

$$S_1 = -\frac{1}{m+2} \cdot \frac{1}{m+1}$$

obdržíme

$$S_n = (-1)^n \frac{m!\, n!}{(m+n+1)!},$$

což bylo dokázati.

Pan *Mojmír Horák*, stud. VIII. tř. g., poznamenává, že přímý, jednoduchý důkaz vytčení relace plyne z počtu integrálního.

$$\int_0^1 x^m (x-1)^n \, dx$$

lze totiž vypočísti buď pomocí částečné integrace neb tak, že výraz se znamením integrační rozvedeme dle binomické věty.

8.

Dokázati jest vztah

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin 3k\,x}{\sin k\,x} = n - 1 + \frac{\sin (2n + 1)\,x}{\sin x}.$$

Vladimír Živanský.

Řešení: Zaslal p. *V. Lamparter*, stud. VIII. tř. gymn. v Třebíči.

Jest patrno, že

$$\frac{\sin 3kx}{\sin kx} = \frac{\sin 3kx - \sin kx}{\sin kx} + 1$$
$$= 2 \cos 2kx + 1$$
$$= \frac{\sin (2k + 1)\,x - \sin (2k - 1)\,x}{\sin x} + 1$$

t. j.

$$\frac{\sin 3kx}{\sin kx} = \frac{\sin (2k + 1)\,x}{\sin x} - \frac{\sin (2k - 1)\,x}{\sin x} + 1$$

Užijeme-li této relace pro $k = 2, 3, \ldots n$, budeme míti

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{\sin 3x}{\sin 3x}$$

$$\frac{\sin 6x}{\sin 2x} = \frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\sin 3x}{\sin x} + 1$$

$$\frac{\sin 9x}{\sin 3x} = \frac{\sin 7x}{\sin x} - \frac{\sin 5x}{\sin x} + 1$$

. . . .

$$\frac{\sin 3nx}{\sin nx} = \frac{\sin (2n + 1)\,x}{\sin x} - \frac{\sin (2n - 1)\,x}{\sin x} + 1.$$

Sečtením těchto rovnic obdržíme

$$\sum_{k-1}^{n} \frac{\sin kx}{\sin x} = n - 1 + \frac{\sin (2n + 1)\,x}{\sin x},$$

což bylo dokázati.

9.

Kolika způsoby možno rozměniti v rakouských mincích jednu korunu? Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení: Dle p. autora.

Je-li počet haléřů a, dvouhaléřů b, desetihaléřů c, dvacetihaléřů d, jedná se o řešení rovnice

$$a + 2b + 10c + 20d = 100 \tag{1}$$

čísly celými kladnými, nullu v to počítaje.

Z rovnice té plyne okamžitě, že a jest číslo sudé a $a + 2b$ číslo dělitelné deseti.

Kladme

$$\frac{a}{2} + b = 5p \tag{2}$$

$$c + 2d = q \tag{3}$$

Dosazením do (1) obdržíme

$$p + q = 10 \tag{4}$$

Vyskytující se zde rovnice jsou tvaru

$$\alpha) \qquad x + y = n$$

$$\beta) \qquad x + 2y = 2n + 1.$$

Ty mají $n + 1$ celých kladných řešení, nullu v to počítaje.

Rovnice (4) má 11 takových řešení

$$p = 0, 1, 2, \ldots 10$$
$$q = 10, 9, 8, \ldots 0.$$

Nechť má pro určitou soustavu hodnot p, q rovnice (2) e, rovnice (3) f celých kladných řešení, nullu v to počítaje. Poněvadž můžeme kombinovati každé řešení rovnice (2) s každým řešením rovnice (3), poskytne nám ona soustava ef řešení rovnice (1).

Rovnice (2) jest tvaru α), tedy jest

$$e = 5p + 1.$$

Rovnici (3) při q sudém lze psáti $\frac{c}{2} + d = \frac{q}{2}$, což jest tvar α), i má $\frac{q}{2} + 1$ řešení a při q lichém má tvar β), tak že má $2\,\frac{q-1}{2} + 1 = \frac{q+1}{2}$ řešení.

Jest tedy

$$f = \frac{q}{2} \quad \text{při } q \text{ sudém}$$

$$f = \frac{q+1}{2} \quad \text{při } q \text{ lichém.}$$

Sestavme si tabulku

p	q	e	f	ef
0	10	1	6	6
1	9	6	5	30
2	8	11	5	55
3	7	16	4	64
4	6	21	4	84
5	5	26	3	78
6	4	31	3	93
7	3	36	2	72
8	2	41	2	82
9	1	46	1	46
10	0	51	1	51
				661

Sečtením čísel v posledním sloupci shledáme, že rovnice (1) má 661 řešení čísly celými kladnými, nullu v to počítaje. Možno tedy korunu rozměniti 661 způsoby.

10.

V rovině jsou dány body A, B a přímka p, která úsečky AB neprotíná. Na přímce p ustanoviti bod, z něhož jest viděti úsečku AB pod největším úhlem. Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení. Zaslal p. *Jar. Mayer,* stud. VI. tř. gymn. v Praze v Žitné ul.

Sestrojme kružnice k_1, k_2 procházející body A, B a dotýkající se přímky p v bodech T_1, T_2. Pak jest viděti z bodů T_1, T_2 úsečku AB v maximálním úhlu.

Důkaz.

Přímka AB nechť protíná přímku p v bodě P_0. Budiž P libovolný bod přímky p ležící na téže straně od P_0 jako T_1. Pak lze snadno dokázati, že úhel APB jest menší než úhel AT_1B. Označme K průsečík přímky AP s kružnicí k_1. Pak jest

$$\sphericalangle AT_1B = \sphericalangle AKB$$

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle AKB - \sphericalangle KBP$$

t. j. $$\sphericalangle APB < \sphericalangle ABK$$

a též $$\sphericalangle APB < \sphericalangle AT_1B.$$

Kdyby se bod P blížil bodu T_1 pohybuje se po části přímky p vně úsečky T_1, T_2, vzrůstal by úhel APB od libovolně malé hodnoty, v bodě T_1 by nabyl hodnoty maximální, na úsečce T_1 P_0 by hodnoty úhlu APB ubývalo, až v poloze P_0 by $\sphericalangle APB = 0$; při dalším pohybu ve stejném smyslu by hodnoty úhlu APB opět přibývalo, až by nabyl pro bod T_2 opět hodnoty maximální, a pak by hodnoty jeho opět ubývalo až k hodnotě libovolně malé.

11.

Do trojúhelníku ABC vepsati jiný DEF, o daném vrcholu D ležícím na straně BC, tak aby strana EF byla rovnoběžna s BC, při čemž úhel EDF jest dán. Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení. Zaslal p. *Emanuel Fr. Částka*, stud. VII. tř. r. v Čes. Budějovicích.

Nad $\overline{BC}$ co tětivou sestrojme kruhový oblouk, aby měl daný obvodový $\sphericalangle EDF = \varphi$, a sice položme oblouk mimo $\triangle ABC$. Spojnice AD protne tento oblouk v bodě G. Pak rovnoběžky bodem D se spojnicemi GB, GC vytknou hledanou stranu EF, která jest rovnoběžna s BC, poněvadž $\triangle DEF \sim BGC$ a zároveň podobně položen dle středu podobnosti A.

Má-li EF býti mimo daný trojúhelník pak rýsujeme kruhový oblouk na opačnou stranu od BC. Hledaná strana EF padne do nekonečna, je-li $\varphi = \alpha$, jest na pravo od $\triangle$, pokud $\varphi > \alpha$, na levo od vrcholu A, když $\varphi < \alpha$.

12.

Jest dána rovina ϱ a body P, Q, R; najíti v rovině ϱ takové body, jejichž spojnice s P, Q, R mají od ϱ stejné odchylky. Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení. Zaslal pan *K. Moravec,* stud. VII. tř. v Praze-I.

Promítněme body PQR orthogonálně do ϱ v body $P_1 Q_1 R_1$. Je-li hledaný bod S, pak, aby odchylky PS, QS, RS byly stejné, musí býti $\triangle PXP_1 \sim \triangle QXQ_1 \sim \triangle RXR_1$ a tedy $\overline{QQ_1} : \overline{Q_1S} = \overline{RR_1} : \overline{R_1S} = \overline{PP_1} : \overline{P_1S}$. Jedná se tedy o to, najíti bod, jenž má dán poměr vzdáleností od tří daných bodů. Úlohu řešíme Appoloniovými kružnicemi, jež se buď α) neprotnou (řešení nemožné), β) dotýkají (řešení jednoznačné), γ) protínají ve dvou bodech (řešení dvojznačné).

13.

Sestrojiti kuželosečku, je-li dána řídící přímka a tři body. Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení. Zaslal p. *Miloslav Dias,* stud. VII. tř. r. v Kroměříži.

Řídící přímka budiž d a dané body P, Q, R. Hledejme nejdřív ohnisko F, a to na základě definice kuželosečky jako geom. m. bodů, jichž vzdálenosti od daného bodu a dané přímky jsou ve stálém poměru. Dle toho jest $\frac{PF}{PP_1} = \frac{QF}{QQ_1} = \varepsilon$, jsou-li P_1, Q_1 paty kolmic s P, Q na d. Avšak $\frac{PF}{QF} = \frac{PP_1}{QQ_1} = \frac{PS}{QS}$, je-li S průsečík přímky PQ s d. Tedy ohnisko F jest na kružnici, jejíž střed jest na PQ a která jde bodem S jakož i bodem k němu harmonicky přidruženým dle PQ (Apolloniův kruh). Pro body P, R dostaneme analogicky kružnici jako geometrické místo bodu F. Průsečíky obou kružnic dávají dvě řešení úlohy. Známe-li ohnisko F, jest omezení os snadné.

14.

Sestrojiti kružnici, která prochází body A, B a seče kružnici danou v poměru $m : n$. Prof. *A. Budík.*

Řešení. Zaslal pan *Jos. Šimečka*, stud. VI. tř. r. v Příboře.

Body M a N buďtež body, v nichž hledaná kružnice (K) protíná kružnici danou (L), a děltež kružnici onu v poměru $m : n$. Všechny tětivy rovné tětivě $\overline{MN}$ dělí kružnici L v poměru $m : n$ a obalují kružnici L'. Body A, B veďme libovolnou kružnici, která protíná kružnici L v bodech C a D. Protože chordály tří kružnic se protínají v jednom bodě, musí přímka $\overline{MN}$ procházeti průsečíkem přímek $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$. Nyní můžeme již body M, N snadno sestrojiti. Obdržíme je jako průsečíky kružnice dané L s tečnou vedenou z průsečíku přímek $\overline{AB}$ a CD na kružnici L'. Poněvadž takové tečny jsou dvě, jest úloha dvojznačná.

15.

Které jsou ostré úhly trojúhelníku pravoúhlého, je-li jeho výška rovna polovině rozdílu úseků, na které dělí přeponu.

Prof. *Jaroslav Doležal.*

Řešení. Zaslal p. *Štěpán Látal*, stud. VII. tř. r. v Olomouci.

Budiž D pata výšky spuštěné v pravoúhlém trojúhelníku ABC na přeponu AB.

Jsou-li úseky přepony

$$\overline{AD} = m, \ \overline{BD} = n,$$

jest

$$m = v \cdot cotg\, \alpha, \quad n = v \cdot tg\, \alpha.$$

Ježto dle podmínky

$$v = \frac{m - n}{2}, \ 2v = m - n,$$

vychází pro úhel α rovnice

$$cotg\, \alpha - tg\, \alpha = 2,$$

jíž lze dáti podobu

$$\frac{1}{tg\, \alpha} - tg\, \alpha = 2, \quad \frac{1 - tg^2\, \alpha}{tg\, \alpha} = 2,$$

odkud dále

$$\frac{2\, tg\, \alpha}{1 - tg^2\, \alpha} = 1,$$

tedy posléze

$$tg\, 2\alpha = 1, \quad 2\alpha = 45^0,$$
$$\alpha = 22^1/_2{}^0, \; \beta = 67^1/_2{}^0.$$

16.

Jsou-li α, β, γ odchylky dvou stran a úhlopříčky, jež vycházejí z jednoho vrcholu obdélníku, od průmětny, pak, je-li průmětem jeho kosočtverec, platí vztah

$$2\; tg^2 \gamma = (tg\, \alpha + tg\, \beta)\; tg\, (\alpha + \beta).$$

Prof. *Rud. Hruša.*

Řešení. Zaslal pan *K. Moravec,* stud. VII. tř. r. v Praze-I.

Jsou-li m, n strany, p úhlopříčka obdélníka, bude $m^2 + n^2 = p^2$. Vyjádřeme tento vztah pomocí strany kosočtverce a a daných úhlů:

$$\frac{a^2}{cos^2\, \alpha} + \frac{a^2}{cos^2\, \beta} = \frac{u^2}{cos^2\, \gamma} \tag{1}$$

u jest úhlopříčkou kosočtverce, půlící úhel ω, jenž je průmětem úhlu 90^0 v obdélníku. Je tedy dle vzorce pro průmět úhlu $cos\, \omega = -\, tg\, \alpha\; tg\, \beta$.

Úhlopříčka

$$u = 2a\, cos\, \frac{\omega}{2} = 2a \sqrt{\frac{1 - tg\, \alpha\; tg\, \beta}{2}}.$$

Dosadíme-li do (1), budeme míti vztah

$$1 + tg^2\, \alpha + 1 + tg^2\, \beta = 2\; (1 - tg\, \alpha\; tg\, \beta)\; (1 + tg^2\, \gamma),$$

a po krátké úpravě

$$2\; tg^2\, \gamma = (tg\, \alpha + tg\, \beta)\; tg\, (\alpha + \beta).$$

17.

Do čtverce o straně a vepsány čtyři parabolické oblouky tak, že každý prochází dvěma protilehlými vrcholy čtverce a dotýká se zároveň jeho stran. Oblouky ty omezují čtyři křivočaré trojúhelníky a jeden čtyřúhelník. Vypočísti plochu a úhly těch obrazců. Prof. *Rud. Hruša.*

Řešení. Zaslal p. *Emanuel Fr. Částka*, stud. VII. tř. r. v Čes. Budějovicích.

Dvě na sobě kolmé tečny paraboly protínají se na přímce řídící a spojnice bodů dotyčných prochází ohniskem. Jsou-li úseky obou tečen od bodu průsečného k bodům dotyčným sobě rovny, jest nutně průsečný bod obou tečen průsečíkem osy a přímky řídící.

Z této okolnosti plyne ihned, že střed F čtverce $ABCD$ jest společným ohniskem všech čtyř parabol. Vždy dvě paraboly mají za osy jednu z úhlopříček čtverce, průsečný bod paraboly a úhlopříčky jest vrcholem paraboly a půlí příslušnou úsečku, spojující střed s vrcholem čtverce.

Vrcholy P, Q, R, S onoho křivočarého čtyřúhelníku leží patrně na osách souměrnosti stran AB (CD) a BC (DA) a tvoří čtverec.

Plocha křivočarého čtyřúhelníku skládá se z plochy onoho čtverce a čtyř parabolických úsečí. Jich tětiva budiž t, jich výšku označme v.

Z té okolnosti, že vrchol paraboly půlí úsečku spojující střed s vrcholem čtverce plyne

$$\frac{a}{4}\sqrt{2} - v = \frac{t}{2} \tag{1}$$

Uvažujme libovolný vrchol křivočarého čtyřúhelníku. Vyjádříme-li, že vzdálenost jeho od přímky řídící (a ta jde vrcholem čtverce kolmo k úhlopříčce) rovná se vzdálenosti od ohniska (a tím jest střed čtverce), obdržíme rovnici

$$\frac{a}{4}\sqrt{2} + v = \frac{t}{2}\sqrt{2} \tag{2}$$

Z rovnic (1) a (2) vypočteme

$$t = a\,(2 - \sqrt{2})$$
$$v = a\,(\tfrac{3}{4}\sqrt{2} - 1)$$

Bude tedy plocha křivočarého čtyřúhelníka

$$t^2 + 4\,.\,\tfrac{2}{3}\,tv$$

a po snadné úpravě shledáme, že jest

$$\frac{2a^2}{3}\,(4\sqrt{2} - 5).$$

Abychom vypočetli plochu oněch čtyř křivočarých trojúhelníků, které jsou spolu shodny, uvažujme plochu omezenou dvěma parabolickými oblouky, procházejícími protějšími vrcholy čtverce.

Tu plochu možno snadno vypočísti, uvážíme-li, že rovná se dvojnásobnému oblouku parabolickému o tětivě rovné úhlopříčce a výšce rovné čtvrtině úhlopříčky. Rovná se tedy

$$2 \cdot \frac{2}{3} a \sqrt{2} \cdot \frac{a}{4} \sqrt{2} = \frac{2a^2}{3}.$$

Plochu tu možno rozložiti na dva křivočaré trojúhelníky shodné a tedy rovnoploché a křivočarý čtyřúhelník.

I najdeme po snadném výpočtu, že plocha každého ze čtyř trojúhelníků křivočarých jest

$$\frac{2a^2}{3} (3 - 2\sqrt{2}).$$

Úhly křivočarého obrazu jsou dány úhly, které svírají tečny obou oblouků ve vrcholu se sbíhajících. Označme si α úhel, který svírá na př. tečna ve vrcholu P k oblouku PQ s tětivou PQ. Pak budou úhly křivočarého čtyřúhelníku vesměs rovny $\frac{\pi}{2} + 2\alpha$, úhly křivočarého trojúhelníku $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - 2\alpha, \frac{\pi}{2} + 2\alpha$. Uvážíme-li, že v parabole vrchol půlí subtangentu (jsou-li osami souřadnými osa paraboly a tečna ve vrcholu), nalezneme snadno

$$tg\, \alpha = \frac{2v}{\frac{t}{2}} = \frac{4v}{t} = \sqrt{2} - 1,$$

a odtud

$$tg\, 2\alpha = 1,$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^0,$$

$$\alpha = \frac{\pi}{8} = 22\tfrac{1}{2}^0.$$

Jsou tedy úhly křivočarého čtyřúhelníku $\frac{3\pi}{4} = 135^0$ a úhly křivočarých trojúhelníků $\frac{\pi}{2} = 90^0, \frac{\pi}{4} = 45^0, \frac{\pi}{4} = 45^0$.

18.

Jest sestrojiti čtyřúhelník z tětiv, dána-li podstava, dva úhly k ní přilehlé a úhel úhlopříček. Která podmínka platí mezi těmito úhly, je-li čtyřúhelník obojstředný? (Čtyřúhelník nazývá se obojstředný, lze-li mu opsati i vepsati kružnici.)

Prof. *Jan Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *Stanislav Pudil*, stud. VII. tř. reálné v Litovli.

Budiž $ABCD$ čtyřúhelník z tětiv.

Poněvadž úhly DAC a DBC leží nad společnou tětivou DC, jsou si rovny. Označme tedy $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC = \varepsilon$. Označíme-li dále S průsečík úhlopříček a ω úhel, který spolu svírají, plyne z trojúhelníku ABS okamžitě

$$\alpha + \beta + \omega - 2\varepsilon = 180^0. \tag{1}$$

I dostáváme tuto konstrukci:

Sestrojme stranu $AB = a$ a úhly k ní přilehlé α, β. Tím dány strany AD a BC co do polohy. Sestrojme nyní kružnici, v níž nad tětivou AB leží obvodový úhel ω (a sice oblouk této kružnice obsahující úhel ω a ležící na téže straně AB jako úhly α a β). Nechť protne rameno AD úhlu α tuto kružnici v bodě F. Pak jest osou souměrnosti úhlu FBC dána úhlopříčka BD co do směru. Průsek této přímky s AD dá vrchol D. Doplnění a odůvodnění konstrukce jest samozřejmé.

Poněvadž $ABCD$ jest čtyřúhelník z tětiv, jest v trojúhelníku ABC úhel $CAB = \alpha - \varepsilon$, úhel $ACB = \omega - \varepsilon$ a tedy

$$b = a \frac{\sin(\alpha - \varepsilon)}{\sin(\omega - \varepsilon)} \tag{2}$$

podobně z trojúhelníku ADB

$$d = a \frac{\sin(\beta - \varepsilon)}{\sin(\omega - \varepsilon)} \tag{3}$$

Z podobnosti trojúhelníků ABS a DCS plyne

$$c = a \frac{\sin\varepsilon}{\sin(\omega - \varepsilon)}. \tag{4}$$

Ve čtyřúhelníku, jemuž možno vepsati kružnici, jest

$$a + c = b + d.$$

Dosadíme-li sem hodnoty pro b, c, d z rovnic (2), (3), (4), obdržíme

$$\sin(\omega - \varepsilon) + \sin\varepsilon = \sin(\alpha - \varepsilon) + \sin(\beta - \varepsilon)$$

neboli

$$\sin\frac{\omega}{2}\,\sin\frac{\omega - 2\varepsilon}{2} = \sin\frac{\alpha + \beta - 2\varepsilon}{2}\,\cos\frac{\alpha - \beta}{2},$$

a užijeme-li rovnice (1), dostaneme tuto podmínku, aby čtyřúhelník byl oboustředný.

$$tx\,\frac{\omega}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos\frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

19.

Čtyřúhelník určený středy kruhů opsaných trojúhelníkům, v něž se daný čtyřúhelník dělí úhlopříčkami, jest rovnoběžník. Ustanovte jeho plochu v případě, že daný čtyřúhelník jest z tětiv. Prof. *Jan Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *K. Moravec,* stud. VII. tř. r. v Praze-I.

Čtyřúhelník daný $ABCD$, průsečík úhlopříček O, jich úhel ω, vzniklý obrazec $A'B'C'D'$.

Dle známé konstrukce středu kružnice trojúhelníku opsané musíme v polovici úseků OA, OB, OC, OD vztyčiti kolmice, jež se budou protínati v bodech $A'B'C'D'$. Poněvadž však $OA \equiv OC$ a $OB \equiv OD$, budou dvě a dvě kolmice rovnoběžny a vznikne proto rovnoběžník.

Kolmice, jež dle hořejšího rozpolují úseky mezi vrcholy a průsečíkem O, svírají úhel buď ω nebo $180 - \omega$. Bude tedy obsah onoho rovnoběžníka

$$\frac{m}{2}\cdot\frac{n}{2\sin\omega} = \frac{mn}{4\sin\omega}.$$

Pro čtyřúhelník z tětiv bude obsah

$$\frac{ac + bd}{4 \sin \omega}.$$

Poněvadž

$$\frac{a}{2 \sin \omega} = r_1,$$

t. j. poloměr kružnice opsané AOB a

$$\frac{b}{2 \sin \omega} = r_2,$$

t. j. poloměr kružnice opsané BOC, můžeme psáti obsah

$$\tfrac{1}{2}(cr_1 + dr_2) = \tfrac{1}{2}(ar_3 + br_4).$$

20.

Do kružnice k vepsán jest čtyřúhelník ABCD. Které jest geometrické místo průseků úhlopříček, je-li strana AB pevná a pohybují-li se vrcholy C, D po kružnici k tak, že strana CD má stálou délku? Prof. *Jan Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *S. Pudil,* stud. VII. tř. r. v Litovli.

Budiž ve čtyřúhelníku z tětiv $ABCD$ průsečík úhlopříček E,

$$\sphericalangle AEB = \omega, \quad \sphericalangle ADB = \lambda, \quad \sphericalangle CAD = \mu.$$

Úhel λ je stálý, pohybuje-li se vrchol D po kružnici opsané čtyřúhelníku $ABCD$, neboť je to obvodový úhel příslušný pevné tětivě $\overline{AB}$, úhel μ je rovněž stálý, neboť je to obvodový úhel příslušný tětivě $\overline{CD}$, jež má dle předpokladu stálou délku.

Proto také $\sphericalangle \omega = \lambda + \mu$ jest stálý; jest tudíž geometrickým místem průsečíku E obou úhlopříček kružnice nad tětivou $\overline{AB}$ sestrojená tak, aby obvodový úhel k ní příslušný byl $\lambda + \mu$.

21.

Trojúhelník má pevnou podstavu a protější vrchol se pohybuje po kružnici opsané. Které jest geometrické místo středu kruhu Feuerbachova? Prof. *Jan Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *Emanuel Fr. Částka*, stud. VII. tř. r. v Čes. Budějovicích.

Kruh Feuerbachův prochází půlícími body stran trojúhelníku. Spojením jich obdržíme trojúhelník, který jest podobný trojúhelníku původnímu a rozměry jeho jsou poloviční. V daném případě mají všechny kruhy Feuerbachovy stejný poloměr, poněvadž půlící body stran určují trojúhelníky o stejné základně a stejném úhlu při vrcholu; takové trojúhelníky lze vepsati všechny do téže kružnice. Půlící bod podstavy polohu svou nemění a proto hledaným geometrickým místem jest kružnice o středu v půlícím bodě dané pevné podstavy a poloměru rovném polovičnímu poloměru dané kružnice.

22.

Ke kruhu vedeny jedním jeho pevným bodem kruhy orthogonální. Jest určiti geometrické místo průseku vnějších tečen.
Prof. *Jan Schuster*.

Řešení. Zaslal p. *Miloslav Dias*, stud. VII. tř. reálné v Kroměříži.

Průsekem vnějších společných tečen dvou kružnic jest vnější střed podobnosti. Ten můžeme obdržeti jako průsečík centrály se spojnicí koncových bodů rovnoběžných poloměrů stejného smyslu. Všechny kruhy protínající daný kruh k pravoúhle a procházející pevným bodem M na něm, mají střed na tečně v bodě M ke kruhu k vedené. Proto bude vnější střed podobnosti ležeti stále na jedné z přímek, spojujících bod M s koncovými body průměru kruhu k vedeného rovnoběžně s tečnou na kruh k v bodě M a přímky ty jsou hledaným geometrickým místem.

23.

Budiž AB tětiva jdoucí ohniskem paraboly, AM přímka rovnoběžná a BM přímka kolmá k ose. Je-li N průsečík normály s osou paraboly, jest přímka MN rovnoběžná s tečnou v bodě B. *R.*

Řešení. Zaslal p. *K. Moravec*, stud. VII. tř. r. v Praze-I.

Označme ohnisko F, průsek osy s přímkou řídicí D, průsek přímky BM s osou P, patu kolmice spuštěné z bodu A na přímku řídicí Q.

Poněvadž subtangenta PN jest rovna parametru, t. j. $PN = DF$, jsou trojúhelníky QDF a MPN spolu shodny. Z toho plyne, že přímky MN a QF jsou spolu rovnoběžny. Úsečka QF jest základnou rovnoramenného trojúhelníku QAF, v němž tečna v bodě A jest osou úhlu při vrcholu QAF. Z toho plyne, že tečna v bodě A stojí kolmo na přímce QF. Poněvadž tětiva AB prochází ohniskem, svírají spolu tečny v bodech A a B pravý úhel. Z toho plyne, že tečna v bodě B jest rovnoběžná s přímkou QF, tedy i s přímkou MN, což bylo dokázati.

24.

Dotýkají-li se dva kruhy jdoucí ohniskem paraboly v koncových bodech tětivy jdoucí ohniskem, protínají se pravoúhle; geometrickým místem jejich druhých průsečíků jest kružnice. *R.*

Řešení. Zaslal p. *S. Pudil*, stud. VII. tř. r. v Litovli.

Koncové body tětivy jdoucí ohniskem $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ paraboly

$$y^2 = 2px \tag{1}$$

buďtež $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Souřadnice těchto bodů splňují podmínky:

$$y_1^2 = 2px_1 \tag{2}$$

$$y_2^2 = 2px_2 \tag{3}$$

$$y_1 y_2 = -p^2. \tag{4}$$

Střed S_1 kruhu dotýkajícího se paraboly v bodě A a procházejícího ohniskem jest průsekem normály v bodě A

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1) \tag{5}$$

a osy úsečky $\overline{FA}$

$$(2x_1 - p)\, x + 2yy_1 - x_1^2 + y_1^2 - \frac{p^2}{4}, \tag{6}$$

a tedy

$$S_1\left(\frac{3y_1^2 + p^2}{4p}, \frac{y_1(3p^2 - y_1^2)}{4p^2}\right).$$

Podobně vypočteme souřadnice středu S_2 kruhu dotýkajícího se paraboly v bodě B a procházejícího ohniskem; obdržíme tak přihlížejíce zároveň ke vztahu (4)

$$S_2\left(\frac{p\,(3p^2+y_1^2)}{4y_1^2},\ -\frac{p^2}{4y_1^3}(3y_1^2-p^2)\right).$$

Směrnice přímky $\overline{FS_1}$ jest $\dfrac{y_1\,(3p^2-y_1^2)}{p\,(3y_1^2-p^2)}$, přímky $\overline{FS_2}$ pak $-\dfrac{p\,(3y_1^2-p^2)}{y_1\,(3p^2-y_1^2)}$. Jest tedy $\overline{FS_2}\perp\overline{S_1F}$, t. j. obě kružnice se protínají orthogonálně. Druhý průsečík těchto dvou kružnic $P\,(x,\,y)$ jest souměrný s ohniskem F dle centrály

$$\overline{S_1S_2}\equiv 4\,(4y_1^2-4x_1^2-p^2)\,x-12y_1\,(2x_1-p)\,y-10\,py_1^2 + 4px_1^2+p^3=0 \qquad (7)$$

musí tedy souřadnice jeho vyhovovati podmínce

$$(4y_1^2-4x_1^2-p^2)\,x-3y_1\,(2x+p)\,y-3py_1^2-0; \qquad (8)$$

dále musí bod P nalézati se na kolmici z bodu F na střednou S_1S_2 spuštěné

$$3y_1\,(2x_1-p)\,x+(4y_1^2-4x_1^2-p^2)\,y=3py_1\,(2x_1-p). \qquad (9)$$

Podmínkám (8), (9) lze dáti tvar:

$$x\left(\frac{2x_1-p}{y_1}\right)^2+3y\,\frac{2x_1-p}{y_1}+3p-2x=0 \qquad (10)$$

$$y\left(\frac{2x_1-p}{y_1}\right)^2+3\,(p-x)\frac{2x_1-p}{y_1}-2y=0. \qquad (11)$$

Elliminací $\dfrac{2x_1-p}{y_1}$ z rovnic (10), (11) obdržíme

$$(2x^2+2y^2-3px)\,[(x-p)^2+y^2]=0. \qquad (12)$$

Činitel $(x-p)^2+y^2$ nemůže se pro žádné reálné x a y rovnati nulle, tedy zbývá

$$2x^2+2y^2-3px=0$$

jako rovnice geometrického místa bodu P. Jest to kružnice o poloměru $\frac{3}{4}p$, jejíž střed jest na ose paraboly a jež prochází vrcholem.

25.

Vedeme-li z libovolného bodu hyperboly

$$x^2 - y^2 = a^2 + b^2$$

tečny na hyperbolu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, *leží čtyři body, v nichž protínají osy, na téže kružnici.* R.

Řešení. Zaslal p. *Viktor Pírko*, stud. VII. tř. g. v Č. Budějovicích.

Lze snadno dokázati, že podmínka, aby body, v nichž přímky $y = A_1 x + k_1$, $y = A_2 x + k_2$ protínají osy souřadnic, ležely na kružnici, jest $A_1 A_2 = 1$. Uvážíme-li, že, má-li přímka $y = Ax + k$ dotýkati se hyperboly $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, musí býti splněna podmínka $k^2 + b^2 = A^2 a^2$ a aby přímka procházela bodem M (ξ, η), musí býti $\eta = A\xi + b$, shledáme, že směrnice tečen vedených z bodu M na hyperbolu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ jsou kořeny rovnice

$$A^2 (\xi^2 - a^2) - 2A\xi\eta + \eta^2 + b^2 = 0.$$

Protínají-li tečny ty osy v bodech ležících na téže kružnici, platí dle svrchu řečeného pro kořeny této rovnice vztah

$$A_1 A_2 = 1,$$

t. j.

$$\frac{\eta^2 + b^2}{\xi^2 - a^2} = 1,$$

t. j.

$$\xi^2 - \eta^2 = a^2 + b^2,$$

z čehož plyne okamžitě, což bylo dokázati.

26.

Řešiti rovnici

$$\frac{x^4}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{a^4}{x-a} - \frac{b^4}{x-b}\right). \quad R.$$

Řešení. Zaslal p. *Antonín Charvát*, stud. VII. tř. r. v Kladně.

Rovnici předloženou možno uvésti na tvar

$$\frac{x^4(a-b)-x(a^4-b^4)+ab(a^3-b^3)}{(a-b)(x-a)(x-b)}=0.$$

Čitatel jest patrně dělitelný $a-b$. Proveďme tedy dělení $a-b$. Obdržíme tak rovnici

$$\frac{x^4-x(a^3+a^2b+ab^2+b^3)+ab(a^2+ab+b^2)}{(x-a)(x-b)}=0.$$

Čitatele možno však uvésti na tvar

$$x(x^3-a^3)-b(x-a)(a^2+ab+b^2).$$

I vidíme, že jest dělitelný $x-a$. Vzhledem k tomu, že jest to výraz symmetrický vzhledem k a a b, bude dělitelný také $x-b$.

Provedeme-li dělení $x-a$ a $x-b$, obdržíme rovnici kvadratickou

$$x^2+(a+b)x+a^2+ab+b^2=0,$$

jejíž kořeny jsou

$$\frac{-(a+b)\pm\sqrt{-(2a^2+2ab+3b^2)}}{2}.$$

27.

Dokažte správnost relace

$$\sin x+\binom{n}{1}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\binom{n}{2}\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)+\ldots$$
$$+\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(x+n\frac{\pi}{4}\right).$$

R.

Řešení. 1. Zaslal p. *Jaroslav Mayer*, stud. VI. tř. g. v Praze v Žitné ulici.

Relace napsaná platí pro $n=0$, 1 a rovněž snadno lze dokázati, že platí pro $n=2$. Že platí obecně, dokážeme úplnou indukcí.

Předpokládejme, že relace ta platí pro n.

Pak můžeme dokázati platnost její pro $n+1$.

Užijeme-li vztahu pro binomické koefficienty

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$$

shledáme, že platí rovnice

$$\sin x \qquad = \sin x$$

$$\binom{n+1}{1} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \binom{n}{1} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\binom{n+1}{2} \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \binom{n}{2} \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ \binom{n}{1} \sin\left[\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\binom{n+1}{3} \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) = \binom{n}{3} \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ \binom{n}{2} \sin\left[\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\frac{\pi}{2}\right]$$

. . . .

$$\binom{n+1}{n} \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \binom{n}{n} \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ \binom{n}{n-1} \sin\left[\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \qquad \sin\left[\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + n\frac{\pi}{2}\right]$$

Sečtěme tyto rovnice. Tu dostaneme, užijeme-li dané relace a relace z ní plynoucí, dosadíme-li $x + \frac{\pi}{2}$ místo x,

$$\sin x + \binom{n+1}{1} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \binom{n+1}{2} \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) + \ldots$$

$$+ \sin\left(x + (n+1)\frac{x}{2}\right) =$$

$$= (\sqrt{2})^n \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) + (\sqrt{2})^n \sin\left[\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + n\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= (\sqrt{2})^n \left(\sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left[\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + n\frac{\pi}{4}\right]\right)$$

$$= (\sqrt{2})^n \, 2 \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{4}\right) \cos\frac{\pi}{4}$$

$$= (\sqrt{2})^{n+1} \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{4}\right),$$

jakož bylo dokázati.

Řešení 2. Zaslal p. *Jaroslav Janko*, stud. VIII. tř. g. v Třebíči.

Transformujeme-li levou stranu relace na základě rovnic

$$sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=cos\, x, \quad sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)=-sin\, x,$$

$$sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right)=-cos\, x, \quad sin\left(x+4\frac{\pi}{2}\right)=sin\, x$$

. . . .

obdržíme výraz

$$sin\, x+\binom{n}{1}cos\, x-\binom{n}{2}sin\, x-\binom{n}{3}cos\, x+\dots$$

Na pravé straně relace můžeme psáti

$$sin\left(x+n\frac{\pi}{4}\right)=cos\, n\frac{\pi}{4}\, sin\, x+sin\, n\frac{\pi}{4}\, cos\, x.$$

Daná relace bude platiti, bude-li

$$1-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\dots=(\sqrt{2})^n cos\, n\frac{\pi}{4}$$

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\binom{n}{7}+\dots=(\sqrt{2})^n sin\, n\frac{\pi}{4}$$

Platnost těchto relací plyne okamžitě ze vzorců

$$cos\, n\,\alpha=cos^n\,\alpha-\binom{n}{2}cos^{n-2}\,\alpha\, sin^2\,\alpha+\dots$$

$$sin\, n\,\alpha=\binom{n}{1}cos^{n-1}\,\alpha\, sin\,\alpha-\binom{n}{3}cos^{n-3}\,\alpha\, sin^3\,\alpha+\dots,$$

klademe-li v nich $\alpha=\frac{\pi}{4}$ a uvážíme, že $sin\frac{\pi}{4}=cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

28.

Dána jest přímka p a mimo ni bod O. Bodem O veďme paprsky až k průsekům s přímkou p: OA libovolně, OB kolmo na OA, OC jakožto osu souměrnosti pravého úhlu AOB a OD kolmo na OC. Stanoviti podmínku, kdy součet AB + CD jest minimální.

Prof. *Ant. Navrátil.*

Řešení. Zaslal pan *K. Moravec*, stud. VII. tř. r. v Praze-I.

Označme d vzdálenost bodu O od přímky p, α úhel OAB; pak bude úhel $ODC = 45^0 - \alpha$, poněvadž v trojúhelníku AOD jest při vrcholu O úhel 135^0. Úhel α možno předpokládati $\leqq 45^0$, poněvadž ostatní případy lze na tento převésti tím, že zaměníme označení bodů A, B, C, D.

Pomocí veličin d a α vyjádříme

$$\overline{AB} = \frac{d}{\sin \alpha \cos \alpha} \qquad \overline{CD} = \frac{d}{\sin (45^0 - \alpha) \cos 45^0 - \alpha)}$$

Pak bude

$$\overline{AB} + \overline{CD} = 2d \left(\frac{1}{\cos 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2\alpha} \right).$$

I vidíme, že jde o určení minima funkce

$$y = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x},$$

kdež $x = 2\alpha$ v intervallu od 0^0 do 90^0.

Snadno určíme

$$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

Pro maxima a minima musí býti $y' = 0$, což vyžaduje

$$\sin^3 x - \cos^3 x = 0,$$

t. j.
$$tg^3 x = 1$$

a tudíž
$$tg\, x = 1$$

a odtud
$$x = 45^0$$

vzhledem k tomu, že x jest omezeno na intervall od 0^0 do 90^0. Abychom rozhodli, nastane-li maximum neb minimum, uvažujme, jaké znamení má pro $x = 45^0$ druhá derivace. Klaďme

$$y' = \frac{u}{v}, \quad u = \sin^3 x - \cos^3 x, \quad v = \sin^2 x \cos^2 x.$$

Pak jest $y'' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ a poněvadž $u = 0$, $v > 0$ stačí určiti znamení při $u' = 3 \sin^2 x \cos x + 3 \cos^2 x \sin x$ a vidíme ihned, že jest $u' > 0$, tedy $y'' > 0$, tak že nastane minimum.

Vidíme tedy, že součet $AB + CD$ jest minimální při úhlu $\alpha = 22\frac{1}{2}^0$.

29.

Dán jest bod M ležící vně pásu dvou rovnoběžek; určiti polohu kolmice obou rovnoběžek tak, aby úsek její mezi rovnoběžkami jevil se z bodu M v úhlu maximálním.

Prof. *Ant. Navrátil.*

Řešení. Zaslal p. *Vilém Lamparter*, stud. VII. tř. gymn. v Třebíči.

Používajíce výsledku úlohy 10., vedeme bodem M rovnoběžku p k oběma rovnoběžkám.

Volme nyní libovolnou kolmici na obě rovnoběžky a najděme udaným způsobem na přímce p bod M_1, z něhož jest úsek mezi rovnoběžkami viděti v úhlu co největším. Pošineme-li nyní bod M_1 do M a s ním podél rovnoběžek celý obrazec, jest úloha řešena.

Z toho vyplývá ještě jednodušší sestrojení:

Veďme symmetrálu pásu. Spusťme z bodu M kolmici MP na tuto symmetrálu a protněme poloměrem MP opsaným kolem P dané rovnoběžky.

Průsečné body stanoví dvě kolmice úloze vyhovující.

30.

Do výseče kruhové AOB, jejíž úhel rovná se 45°, vepsati obdélník s minimální úhlopříčkou, aby jedna strana byla na poloměru OA; určiti velikost této úhlopříčky a poměr stran hledaného obdélníku.

Prof. *Ant. Navrátil.*

Řešení. Zaslal p. *K. Moravec,* stud. VII. tř. reálky v Praze I.

Označme strany obdélníku a, b; pak úhlopříčka

$$u = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Dále označme α úchylku poloměru spojujícího střed s vrcholem obdélníku na oblouku AB od poloměru OA, poloměr

$$OA = OB = r.$$

Poněvadž

$$a = r \sin \alpha, \quad b = r (\cos \alpha - \sin \alpha),$$

jde o to, nalézti maximum funkce

$$u^2 = a^2 + b^2 = r^2 (sin^2 \alpha - sin\, 2\alpha + 1),$$

neboli též maximum funkce

$$y = sin^2 \alpha - sin\, 2\alpha + 1.$$

Snadno nalezneme

$$y' = 2 sin\, \alpha\, cos\, \alpha - 2\, cos\, 2\alpha = sin\, 2\alpha - 2 cos\, 2\alpha$$
$$y'' = 2 cos\, 2\alpha + 4 sin\, 2\alpha.$$

Pro maximum neb minimum musí býti $y' = 0$, t. j.

$$tg\, 2\alpha = 2.$$

Úloze vyhovuje pouze úhel ostrý určený z této rovnice, poněvadž pouze pak bude $\alpha < 45^0$. Pak shledáme, že $y'' > 0$, tak že nastane minimum.

Pak shledáme snadno, že bude

$$u = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} r = r\, tg\, \alpha$$

a dále

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = tg\, \alpha.$$

31.

Dány dvě rovnoběžky a na jejich ose souměrnosti dva body A a B. Bodem A vésti příčku tak, aby úsek její mezi rovnoběžkami jevil se z bodu B pod úhlem 45°.

Prof. *Ant. Navrátil.*

Řešení. Zaslal p *Jaroslav Janko*, stud. VIII. tř. gymn. v Třebíči.

Ježto úsek onen je osou souměrnosti půlen, považujme jej za úhlopříčku rovnoběžníka, v němž průsekem úhlopříček je bod A a druhou úhlopříčkou je $\overline{BD} = 2\overline{AB}$. Úhel toho rovnoběžníka při jedné z rovnoběžek je $\omega = 135^0$, tak že lze nalézti průsek příčky, vedené bodem A, s rovnoběžkou sestrojením kružnice procházející body B, D, a určené odvodovým úhlem 135^0.

Nazveme-li vzdálenost rovnoběžek d, obdržíme podmínku, aby kružnice rovnoběžku protala

$$2\overline{AB}(\sqrt{2}-1) \geqq d, \quad \text{neboli} \quad \overline{AB} \gtrless \frac{d}{2}(\sqrt{2}+1).$$

V případě znamení $>$ jest úloha daná dvojznačná.

V případě rovnosti jest úloha jednoznačná, rovnoběžník se stane kosočtvercem a příčka kolmicí v bodě A.

32.

V pravoúhlé soustavě souřadnic dány body G (r, 0), H (0, r), I ($-r$, 0), K (0, $-r$) a bod P (a, b). Kolem bodu P opsati kružnici, jejíž jeden průsek s osou x jest C, tak aby na ní ležely body A, B takové, že $\overline{AC} = \overline{CB}$ a $\overline{IA} = \overline{GB} = \overline{HC} = \overline{KC}$.

Ing. *Karel Kopecký.*

Řešení. Dle p. autora.

Označme poloměr hledané kružnice R, její střed nechť má souřadnice (a, b). Kružnice ta nechť vytíná na ose x tětivu o délce $2x$.

Nechť jest

$$IA = GB = HC = KC = l.$$

Dále označme p průmět úsečky AC do osy x, q do osy y,
m „ „ CB „ „ „ n „ „ y.

Pak platí tyto vztahy

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 &= m^2 + n^2 \\ x^2 + b^2 &= R^2 \\ (a - x)^2 &= l^2 - r^2 \\ (x + p)^2 + (b - q)^2 &= R^2 \\ (x - m)^2 + (b + n)^2 &= R^2 \\ (a + r - x - p)^2 + q^2 &= l^2 \\ (a - r - x + m)^2 + n^2 &= l^2 \end{aligned}$$

Vylučme z těchto rovnic p, q, m, n, l, R.

I obdržíme pro x rovnici

$$a^2x^3 - a^3x^2 - b^2r^2x - b^4x + ab^4 - ab^2r^2 = 0.$$

Určíme-li x z této rovnice, lze ostatní veličiny již snadno vypočísti. Úloha tato se vyskytuje při řešení lokomotivního rozvodu Walschaertova.

33.

Tvar včelích buněk lze odvoditi z pravidelného šestibokého hranolu tím, že vedeme v horní základně $ABCDEF$ úhlopříčkami AC, CE, EA roviny skloněné v stejném úhlu α k této základně. Tyto tři roviny protnou se v bodě S, takže dno buňky jest tvořeno třemi shodnými kosočtverci, z nichž jeden nechť jest $AGCS$ (G leží na pobočné hraně jdoucí vrcholem B). Měřením úhlu $AGC = \beta$ shledáno, že jest roven přibližně 109^0. Jest ukázati, že úhel tento vyhovuje velmi přibližně podmínce, aby povrch buňky byl při daném objemu co nejmenší. Dále určiti jest úhel BAG. *R.*

Řešení. Zaslal p. *Jaroslav Janko*, stud. VIII. tř. gymn. v Třebíči.

I. Je-li O střed šestiúhelníku, stojí SO kolmo na ACE; spojíme-li O s B a vedeme-li průsekem L přímku SG, bude $SO = BG$, z čehož patrno, že odebraný jehlanec $ABCG$ rovná se přidanému jehlanci $OACS$; proto se nezmění obsah hranolu otupením rohů (B, D, F), ať se stane pod jakýmkoliv úhlem α. Pouze povrch se mění; odpadne totiž $ABCDEF$ a šest stejných trojúhelníků ABG a povstanou tři kosočtverce $AGCS$.

Je-li plášťový povrch hranolu p, jest nový povrch

$$P = p + \frac{3a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\cos\alpha} - tg\,\alpha - \sqrt{3}\right);$$

jako podmínka minima platí tedy rovnice

$$\frac{dP}{d\alpha} = \sqrt{3}\sin\alpha - 1 = 0,$$

z níž jde

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ nebo } tg\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (1)$$

Vztah mezi úhlem α a β pak snadno najdeme z trojúhelníku AGL, ten jest

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\, tg\,\frac{\beta}{2}.$$

Dosadíme-li za $\cos\alpha$ vztah minimální z rovnice (1), obdržíme i minimální hodnotu za $tg\,\frac{\beta}{2}$, a to $tg\,\frac{\beta}{2} = \sqrt{2}$, čemuž odpovídá úhel $109^0 28' 16''$ q e. d.

Uvážíme-li, že $BG = \frac{a}{2}\, tg\, \alpha$, bude $tg \sphericalangle BAG = \frac{BG}{BA} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Odtud vypočteme, že úhel $BAG = 109^0 28' 15''$.

II. Počítáme-li pouze povrch tělesa nad rovinou proloženou třemi vrcholy kosočtverců, jest

$$P = \frac{3a^2}{2} \cdot \frac{3 + \sqrt{3 - tg^2 \frac{\beta}{2}}}{tg \frac{\beta}{2}},$$

kde je již dosazeno

$$sin^2\, \alpha = \frac{3 - tg^2 \frac{\beta}{2}}{3}.$$

Jest tedy nalézti minimum funkce

$$3 + \sqrt{3 - tg^2 \frac{\beta}{2}} = tg \frac{\beta}{2}\, y,$$

píšeme-li
$$y = \frac{2P}{3a^2}.$$

Tu diskriminant

$$D = 36y^2 - 24\,(y^2 + 1) = 12\,(y^2 - 2).$$

Aby nastalo minimum, musí býti

$$y = \sqrt{2}$$

takže pak

$$tg \frac{\beta}{2} = \sqrt{2}.$$

K tomu přísluší úhel $54^0 44' 8''$, takže $\beta = 109^0 28' 16''$, což bylo dokázati.*)

34.

Geometrické místo bodů M té vlastnosti, že trojúhelník ABC tvořený patami normal vedených bodem M k parabole p jest pravoúhlý, jest parabola. Přepona onoho trojúhelníku

---

*) Maraldi určil nejprvé měřením úhel označený β. Na podnět Réammurův zkoumal pak mathematik Samuel König, jaká geometrická zvláštnost úhlu tomu odpovídá, a nalezl výše uvedenou minimální vlastnost.

prochází pevným bodem a druhé dvě strany jsou normálami pevné paraboly.

Má-li trojúhelník ABC býti rovnoramenný, skládá se geometrické místo bodu M z osy paraboly a křivky třetího stupně. *R.*

Řešení. Zaslal p. *K. Moravec*, stud. VII. tř. r. v Praze-I.

Rovnici normály paraboly $\eta^2 = 2p\xi$ v bodě ξ, η lze uvésti na tvar

$$2p\eta x + 2p^2 y - 2p^2\eta - \eta^3 = 0.$$

Aby se normály v bodech B (ξ_1, η_1), B (ξ_2, η_2), C (ξ_3, η_3) na parabole ležících protaly v bodě M (x, y), musí jeho souřadnice vyhovovati současně rovnicím

$$2p\eta_1 x + 3p^2 y - 2p^2\eta_1 - \eta_1^3 = 0 \qquad (1)$$
$$2p\eta_2 x + 2p^2 y - 2p^2\eta_2 - \eta_2^3 = 0 \qquad (2)$$
$$2p\eta_3 x + 2p^2 y - 2p^2\eta_3 - \eta_3^3 = 0, \qquad (3)$$

což vyžaduje, aby

$$\begin{vmatrix} 2p\eta_1, & 2p^2, & -2p^2\eta_1 - \eta_1^3 \\ 2p\eta_2, & 2p^2, & -2p^2\eta_2 - \eta_2^3 \\ 2p\eta_3, & 2p^2, & -2p^2\eta_3 - \eta_3^3 \end{vmatrix} = 0,$$

kteréžto rovnici možno dáti po snadné úpravě tvar

$$\begin{vmatrix} 1, & \eta_1, & \eta_1^3 \\ 1, & \eta_2, & \eta_2^3 \\ 1, & \eta_3, & \eta_3^3 \end{vmatrix} = (\eta_2 - \eta_1)(\eta_3 - \eta_1)(\eta_3 - \eta_2)(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) = 0.$$

Předpokládáme-li, že žádné dva z bodů A, B, C nesplývají, musí býti

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0. \qquad (4)$$

Aby úhel při vrcholu C byl pravý, musí býti splněna podmínka

$$\frac{\eta_2 - \eta_3}{\xi_2 - \xi_3} \cdot \frac{\eta_1 - \eta_3}{\xi_1 - \xi_3} + 1 = 0,$$

a klademe-li

$$\xi_i = \frac{\eta_i^2}{2p}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

obdržíme, že musí býti

$$(\eta_1 + \eta_3)(\eta_2 + \eta_3) = -4p^2$$

nebo-li, užijeme-li (4)

$$\eta_1\,\eta_2 = -4p^2 \tag{5}$$

Abychom určili geometrické místo bodu M, musíme z rovnic (1) až (5) vyloučiti η_1, η_2, η_3.

Odečtením rovnic (1) a (2) obdržíme

$$2px\,(\eta_1 - \eta_2) - 2p^2\,(\eta_1 - \eta_2) - (\eta_1^3 - \eta_2^3) = 0,$$

neboli

$$\begin{aligned} 2px - 2p^2 &= \eta_1^2 + \eta_1\,\eta_2 + \eta_2^2 \\ &= (\eta_1 + \eta_2)^2 - \eta_1\,\eta_2 \end{aligned}$$

a užijeme-li (4) a (5)

$$\eta_3^2 = 2px - 6p^2. \tag{6}$$

Jedná se nyní již jen o to, vyloučiti η_3 z rovnic (3), (6). To lze provésti snadno na př. takto. Klaďme do (3)

$$\eta_3^3 = \eta_3\eta_3^2 = 2p\eta_3 - 6p^2\eta_3.$$

I obdržíme ihned

$$\eta_3 = -\frac{y}{2}$$

a dosadíme-li tuto hodnotu do (6), dostaneme jako rovnici geometrického místa bodu M

$$y^2 = 8p\,(x - 3p).$$

Z toho vidíme, že oním geometrickým místem jest parabola o vrcholu $(3p,\,0)$ a parametru $4p$.

Rovnici přepony možno snadno uvésti na tvar

$$2px + \eta_3 y = 4p^2,$$

z kteréžto rovnice vidíme ihned, že přepona prochází pevným bodem $(2p,\,0)$.

Aby trojúhelník ABC byl rovnoramenný, musí býti $CA = CB$, t. j.

$$(\xi_1 - \xi_3)^2 + (\eta_1 = \eta_3)^2 = (\xi_2 - \xi_3)^2 + (\eta_2 - \eta_3)^2.$$

Odtud obdržíme postupně, užijeme-li rovnice (4)

$$\xi_1^2 - \xi_2^2 - 2\xi_3\,(\xi_1 - \xi_2) + \eta_1^2 - \eta_2^2 - 2\eta_3\,(\eta_1 - \eta_2) = 0$$
$$\eta_1^4 - \eta_2^4 - 2\eta_3^2\,(\eta_1^2 - \eta_2^2) + 4p^2\,(\eta_1^2 - \eta_2^2) + 8p^2\,(\eta_1^2 - \eta_2^2) = 0$$
$$(\eta_1^2 - \eta_2^2)\,(\eta_1^2 + \eta_2^2 - 2\eta_3^2 + 12p^2) = 0$$

a ježto $\eta_1^2 + \eta_2^2 = (\eta_1 + \eta_2)^2 - 2\eta_1\eta_2 = \eta_1^2 - 2\eta_1\eta_2$

$$(\eta_1 - \eta_2)\,(\eta_1 + \eta_2)\,(-\eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 + 12p^2) = 0.$$

Musí tedy býti

buď $$\eta_1 + \eta_2 = 0 \qquad (7)$$

neb $$-\eta_3^3 - 2\eta_1\eta_2 + 12p^2 = 0. \qquad (8)$$

Je-li splněna rovnice (7), plyne z rovnice (4) $\eta_3 = 0$, a dosadíme-li tuto hodnotu do (3), obdržíme jako geometrické místo bodu M přímku $y = 0$, t. j osu x. Je-li splněna rovnice (8), odečtěme rovnice (1) a (2). Tak obdržíme

$$2px(\eta_1 - \eta_2) - 2p^2(\eta_1 - \eta_2) - (\eta_1^3 - \eta_2^3) = 0,$$

a krátíme-li $\eta_1 - \eta_2$

$$\begin{aligned} 2px - 2p^2 &= \eta_1^2 + \eta_1\eta_2 + \eta_2^2 \\ &= (\eta_1 + \eta_2)^2 - \eta_1\eta_2. \end{aligned}$$

Užijeme-li (4) a (8), obdržíme

$$\eta_3^2 = \frac{4p}{3}(x + 2p).$$

Eliminujeme-li η_3 z této rovnice a rovnice (3), obdržíme jako geometrické místo bodu M křivku třetího stupně

$$(x - 7p)^2(x + 2p) = \tfrac{27}{4}py^2.$$

35.

Přímky $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *a* $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ *protínají ellipsu* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *v bodech* P_1, Q_1 *resp.* P_2, Q_2. *Kdy protnou se normály v bodech těch v jediném bodě?*

Jaromír Pilnáček.

Řešení.

Paty kolmic spuštěných z bodu $M(\xi, \eta)$ na ellipsu

$$E = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b = 0$$

leží na rovnostranné hyperbole

$$H = e^2xy + b^2\eta x - a^2\xi y = 0.$$

Aby tedy normály vztyčené v průsečných bodech přímek

$$\begin{aligned} L_1 &= A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ L_2 &= A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{aligned}$$

procházely bodem $M(\xi, \eta)$, musí přímky L_1, L_2 náležeti svazku tvořenému ellipsou E a hyperbolou H, což vyžaduje, aby bylo možno určiti λ, μ, ξ, η tak, aby byla splněna identicky rovnice

$$\lambda E + \mu H = P_1 P_2$$

t. j.

$$A_1 A_2 = \lambda b^2, \; B_1 B_2 = \lambda a^2, \; C_1 C_2 = -\lambda a^2 b^2$$

$$A_1 B_2 + A_2 B_1 = \mu e^2, \; A_1 C_2 + A_2 C_1 = \mu b^2 \eta,$$

$$B_1 C_2 + B_2 C_1 = -\mu a^2 \xi.$$

Musí tudíž koefficienty rovnic daných přímek hověti rovnicím

$$A_1 A_2 : B_1 B_2 : C_1 C_2 = b^2 : a^2 : -a^2 b^2 = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} : -1.$$

b) Z deskriptivní geometrie.

1.

Sestrojiti nárys trojúhelníku rovnostranného, jehož rovina prochází daným bodem, dán-li půdorys.

Josef Klíma, assist. č. techniky.

Řešení. Zaslal p. *Karel Pátek*, stud. VII. tř. reálky v Kladně.

Úlohu tuto převedeme na stanovení roviny kružnice opsané danému trojúhelníku. Výška (těžnice) v rovnostranném trojúhelníku a k ní kolmá příčka, vedená těžištěm s, udávají nám v půdoryse pár sdružených průměrů půdorysu kružnice opsané danému trojúhelníku. Ze sdružených průměrů ustanovme osy půdorysu. Směr hlavní osy udává směr prvé stopy hledané roviny. [Délka průměru na těžnici dána jest vzdáleností vrcholu od těžiště; délku průměru na příčce získáme affinně přidruženou kružnicí. Osou affinity volme tečnu k půdorysu kružnice, t. j. veďme vrcholem trojúhelníku rovnoběžku s protilehlou stranou.]

Položme nyní malou osou ellipsy pomocnou průmětnu kolmou k π, ve které rovina kružnice jeví se co průměr nanesený na obě strany stopy roviny ϱ. Rovnoběžky vedené stranorysem daného bodu jsou rovinami hledanými. Obecně dvě řešení.

Poznámka. Uvedená konstrukce zakládá se na stanovení kruhových řezů na elliptickém válci. Protneme-li elliptický válec koulí, mající svůj střed na ose válce a poloměr roven hlavní poloose, průsekem těchto těles budou dvě kružnice. Roviny jejich stanovíme snadno pomocí nové průmětny vedené osou válce kolmo k velké ose ellipsy.

Jiné řešení zaslal p. *Jan Zubík*, stud. VII. tř. r. v Praze-III.

Volme v kružnici dva k sobě kolmé průměry tak, aby jeden procházel vrcholem c trojúhelníku vepsaného. Potom $P = 2ct$, tedy P_1, průmět $= 2c_1t_1$ (značí-li t těžiště trojúhelníku).

$$P' \parallel \overline{ab},\ mt = \frac{a}{3},\ m \equiv (P'\,\overline{ac});\ \overline{mn} = r - \frac{a}{3}$$

(n průsečík P' s opsanou kružnicí K)

$$\overline{mn} = \frac{a}{3}\sqrt{3} - \frac{a}{3} = \frac{a}{3}(\sqrt{3} - 1).$$

Poměr $\dfrac{\overline{mt}}{\overline{mn}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ zůstává konstantní i v průmětu délky nt, a ježto známe $\overline{m_1t_1} = \dfrac{\overline{a_1b_1}}{3}$, možno vždy sestrojiti bod n. Potom délka sdruženého průměru $P'_1 = 2n_1t_1$. Ze sdružených průměrů sestrojíme osy ellipsy, která je trojúhelníku $a_1b_1c_1$ opsána. Z poměru poloos malé a velké sestrojíme odchylku trojúhelníku rovnostranného od první průmětny. Aby procházela rovina ta daným bodem, vedeme ji tak, aby měla vypočtenou odchylku od průmětny a aby první stopa byla rovnoběžná s hlavní osou ellipsy.

Poznámka. Roviny mající stanovenou odchylku od průmětny určují rotační plochu kuželovou o vrcholu m. Vedeme-li k podstavě jeho tečny $\parallel$ s hlavní osou ellipsy, určují tyto a daný vrchol hledané roviny. Obecně lze vésti dvě takové tečny, jest tedy úloha dvojznačnou.

2.

Sestrojiti kužel rotační, dán-li vrchol, bod na povrchu a podmínka, že průsek s daným kuželem druhého stupně se rozpadá ve dvě kuželosečky. *Týž.*

Řešení 1. Zaslal p. *Miloš Šmejkal*, stud. VIIb. reálky v Praze-III.

Aby průsek dvou kuželů rozpadl se ve dvě kuželosečky, musí oba kužele míti společné roviny tečné. Položme spojnicí vrcholů tečné roviny ke kuželi danému. Tím úloha převedena na úlohu: Sestrojiti kužel rotační, který se dotýká daných rovin, má svůj vrchol na jejich průsečnici a daný bod A na oblině. Sestrojme vepsanou kouli, mající svůj střed na průsečnici (s) roviny symetrálné tečných rovin s rovinou kolmou k povrchové přímce VA v bodě A. Poněvadž tečny z bodu vedené ke kouli jsou stejně dlouhé, opišme v jedné rovině kružnici o poloměru $\overline{AV}$ a středu V. Vztyčme nad ní přímý válec a stanovme průsečíky s s tímto válcem. To jsou středy vepsaných koulí. Poloměry jsou $\overline{SA}$, $\overline{S'A}$. Úloha jest dvojznačná.

Poznámka. Abychom nemuseli stanoviti plochu válcovou, promítněme orthogonálně průsečnici s do tečné roviny, v níž opíšeme kružnici K poloměrem $\overline{AV}$, o středu V. Průsečík K s průmětem s' stanoví body dotyčné hledaných koulí. Středy jejich budou průsečíky přímky s s rovinami kolmými k rovině tečné v bodech dotyku.

Řešení 2. Zaslal p. *Karel Moravec*, stud. VII. r., Praha-I.

Abychom sestrojili osu kužele, vepišme mezi tečné roviny kouli procházející bodem A. Koule ta bude vepsána i kuželi, bude tedy její střed na ose kužele. Kouli sestrojíme na základě podobnosti. Vepišme mezi tečné roviny libovolnou kouli, mající svůj střed na průsečnici s roviny symetrálné s rovinou kolmou na VA v bodě A. Střed podobnosti obou koulí je průsečík P přímky s s přímkou $\overline{VV'} \equiv v$. Stanovme průsečíky přímky $\overline{PA}$ s koulí. Body ty odpovídají danému bodu A. Vedeme-li tedy bodem A rovnoběžky se spojnicemi průsečíků se středem pomocné koule, dostaneme na s body S_1, S_2, které patří ose kužele.

Jiným způsobem řeší touž úlohu p. *M. Dias*, stud. VII. tř. reálky v Kroměříži.

Daný úkol dá se převésti na úkol, sestrojiti rotační kužel, jsou-li dány dvě tečné roviny a jedna povrchová přímka. Veďme daným bodem a kouli o středu V (= vrchol kužele); ta protne rovinu ϱ a σ v kružnicích, k nimž vedené tečné roviny bodem a protínají kužel v kružnicích, jsou tedy kolmé na osu kužele. Poněvadž lze vésti dvě tečné roviny, vyhovují úloze dvě řešení.

3.

Sestrojiti rotační plochu kuželovou danou vrcholem, dvěma body na povrchu a podmínkou, že danou rovinu seče v rovnoosé hyperbole. *Týž.*

Řešení. Zaslal p. *Miloslav Dias*, stud. VII. tř. reálky v Kroměříži.

Vedeme-li vrcholem V rovinu $\sigma \parallel \varrho$, kde ϱ je daná rovina, protne rovina σ kužel ve dvou povrchových přímkách, které v našem případě mají spolu svírati úhel pravý. Veďme vrcholem V co středem libovolnou kouli, která protne povrchové přímky VA, VB (AB jsou dané body na povrchu) v bodech C a D a rovinu σ v kružnici K. Všechny kužele, které mají vrchol v bodě V a protínají rovinu σ v přímkách kolmých, protínají K ve dvou bodech, takže obalovou křivkou spojnic těchto bodů je kružnice soustředná s K, jejíž poloměr je dán délkou kolmice ze středu kružnice na tu spojnici. Veďme nyní tečné roviny přímkou CD k této obalové kružnici. Kolmice spuštěné z vrcholu V na tyto roviny jsou osami kuželů. Obecně lze vésti dvě roviny tečné, úloha je tedy dvojznačná.

4.

Dokázati, že orthogonální průmět vrcholu kužele rotačního na rovinu kolmou k ose kužele jest společným ohniskem orthogonálních průmětů všech řezů rovinných daného kužele do oněch roviny.

Na základě této věty sestrojiti kuželosečku, dáno-li její ohnisko a tři body. *Týž.*

Řešení. Zaslal p. *Hubert Blažek*, stud. VI. tř. č. z. reálky v Kroměříži.

Libovolným poloměrem opišme z bodu F_1 kružnici, kterou pokládáme za podstavu kužele K. Hledaná kuželosečka bude s touto podstavou v perspektivné kollineaci. Najdeme osu kollineace. Spojnice bodů A, B, C s F_1 jsou prvé průměty povrchových přímek kužele. Přidružené body k ABC budou na zvolené kružnici tam, kde ji protínají povrchové přímky $\overline{AF_1}$, $\overline{BF_1}$, $\overline{CF_1}$. Průsečík přímek $\overline{AB} \times \overline{A_1B_1} \equiv 1$ náleží ose kollineace, obdobně $\overline{BC} \times \overline{B_1C_1} \equiv 2$. Body 1 a 2 je kollineační osa dokonale stanovena. Poněvadž dle podmínky je kužel přímý, bude osa kuželosečky kolmá na osu kollineace Koncový bod M_1 spojím s C_1, dostanu na ose bod 3. $\overline{3C}$ stanoví přidružený bod M. Střed dostanu spojením půlícího bodu tětivy $\overline{AB}$ s půlícím bodem tětivy rovnoběžné, t. j. $\overline{CN}$, kterou stanovím pomocí kollineace. Sdružený průměr m protíná osu ve středu S.

Jiné řešení. Zaslal p. *Karel Moravec*, stud. VII. tř reálky v Praze-I.

Opišme kolem F_1 poloměrem nejvzdálenějšího bodu (c) kružnici K_1. Ta leží na rotačním kuželi, jehož vrcholem je F_1. Průsečnice roviny ABC s rovinou kružnice K_1 je kolmá na směr osy kuželosečky. Sestrojme průsečíky povrchových přímek F_1A, F_1B s K_1. Spojnice průsečíků A_1B_1 protíná AB v bodě K, který náleží již kolmici k. Kolmice z F_1 na $k \equiv \overline{KC}$ je osou kuželosečky. Druhé ohnisko určíme tím, že sestrojíme tečnu v bodě B. Tečna ta je průsečnicí roviny (ABC) s tečnou rovinou ke kuželi v bodě B. Stopa roviny (ABC) je k; stopa tečné roviny je tečna t ke kružnici K_1 v bodě B_1. Průsečík $k \times t$ náleží již tečně kuželosečky.

Známe-li osu, ohnisko a tečnu s dotyčným bodem, snadno stanovíme ohnisko druhé.

5.

Rotační plocha kuželová dána jest osou a jednou povrchovou přímkou; sestrojiti rotační plochu válcovou, která by se plochy kuželové dotýkala a měla danou přímku za osu.

Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení. Zaslal p. *Hubert Blažek*, stud. VI. tř. reálky v Kroměříži.

V bodě O sestrojme rovinu ϱ kolmo na o ($\equiv$ osa kužele). Najděme průsečík povrchové přímky p s ϱ bod X. $\overline{OX}$ je poloměr pomocné podstavy. Vrcholem V vedeme $m \parallel o'$ ($\equiv$ osa válce) a hledáme průsečík $m \times \varrho \equiv Y$. Z toho vedeme tečny ku podstavě. Tečna t a vrchol V určují rovinu tečnou $\sigma \parallel o'$. V rovině σ bude ležeti dotyková povrchová přímka válce a dostaneme ji pravoúhlým promítnutím osy o' do σ. Dotykový bod

M obou ploch je průsečík této povrchové přímky s povrchovou přímkou kužele určenou V a dotykovým bodem tečny s podstavou kužele.

6.

V prostoru jsou dány dva shodné trojúhelníky $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$. Sestrojiti přímku, kolem níž by bylo možno jeden trojúhelník tak otočiti, aby byl s druhým souměrný dle roviny.

Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení. Zaslal p. *Hubert Blažek,* stud. VI. tř. reálky v Kroměříži.

Rovina $\varrho \equiv (A_1B_1C_1)$ protíná rovinu $\sigma \equiv (A_2B_2C_2)$ v přímce a. Rovina souměrnosti τ půlí úhel rovin ϱ a σ. Sestrojíme ji takto. V bodě P, ležícím na průsečnici a, sestrojíme k této rovinu kolmou φ. Stopa s_1^φ je spojnicí stopníků 1, 2 průsečnic k, k' rovin ϱ a σ s φ. Průsečnice m roviny souměrnosti τ s φ půlí úhel průsečnic k k' a má svoji první stopu v bodě R_1 na s_1^φ. p_1^τ jde průsečíkem p_1^ϱ a p_1^σ a bodem R_1; n_2^τ bodem P_2. K trojúhelníku $A_1B_1C_1$ sestrojíme souměrný $A'B'C'$ vzhledem k rovině τ, který bude ležeti v σ. Trojúhelníky $A'B'C'$ a $A_2B_2C_2$ otočíme kol stopy roviny σ do některé průmětny. Tím dostaneme v rovině dva shodné trojúhelníky stejného smyslu a pro ty lze stanoviti bod, kol něhož jeden otočen splyne s druhým. Učiňme symetrálu spojnic $[\overline{A'A_2}]$ a $[\overline{B'B_2}]$; tyto se protnou v bodě s, což jest bod hledaný. V bodě s sestrojme přímku kolmou k τ, kteráž přímka je přímkou hledanou, kolem níž možno $\triangle A_2B_2C_2$ tak otočiti, aby byl s $\triangle A_1B_1C_1$ souměrný dle roviny τ.

Poznámka. Rovinu τ sestrojíme pohodlněji, určíme-li půlící body A_0, B_0, C_0 úseček $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$. Promítněme orthogonálně oba dané útvary do roviny τ, Průměty $\triangle A'_1B'_1C'_1$ a $A'_2B'_2C'_2$ jsou trojúhelníky shodné, stejného smyslu. Stanovíme nyní jako v případě předchozím bod s, kolem něhož lze jeden trojúhelník tak otočiti, aby splynul s druhým. Hledaná přímka jde tímto bodem kolmo k rovině τ.

Kdyby body $A_0B_0C_0$ padly do přímky, vedli bychom rovinu souměrnosti touto přímkou kolmo k $(A_1B_1C_1)$, načež průměty trojúhelníků byly by úsečky. Další konstrukce jako v předchozím.

7.

Určiti jest plochu kulovou, známe-li jeden bod, dvě tečné roviny a tečnou přímku v jedné z nich. Prof. *J. Hanuš.*

Řešení 1. Zaslal p. *Jaroslav Janko*, stud. VIII. tř. g. v Třebíči.

Dané roviny buďtež ϱ a σ a přímka p v rovině σ. Místem středů koulí dotýkajících se obou rovin je rovina symetrálná τ (τ'). Místem středů koulí dotýkajících se p je rovina φ kolmá k rovině σ a obsahující přímku p. Jest tedy místem středů koulí dotýkajících se roviny σ v přímce p a roviny ϱ průsečnice $(\tau\,\varphi) \equiv 0$, resp. $(\tau'\,\varphi) \equiv 0'$. Tím známe jeden průměr koule co do polohy. Úloha přechází v následující: Sestrojiti kouli procházející bodem M a dotýkající se přímky p, známe-li jeden průměr co do polohy. Řešení provedeme takto. Otáčí-li se daný bod m kol o, vytvoří povrchovou kružnici plochy kulové. Sestrojme průsečík přímky p s rovinou oné kružnice a veďme z toho bodu tečny ke kružnici. Přeneseme-li délku té tečny od onoho průsečíku na p, dostaneme bod dotyčný T. Průsečík průměru o s rovinou kolmou k p v bodě T stanoví střed S.

Řešení 2. Zaslal p. *Em. Fr. Částka*, stud. VIIa tř. r., České Budějovice.

Úlohu lze převésti na jinou: Sestrojiti plochu kulovou, procházející bodem, dotýkající se dvou tečných rovin a mající svůj střed na průsečnici o. Položme přímkou o rovinu φ kolmou k tečné rovině σ (v našem případě budiž to rovina φ přímky p) a stanovme si průsečnici jejich p. Otočme nyní bod M kol osy o do φ. Máme tedy sestrojiti v rovině φ hlavní kružnici stanovenou tečnou, bodem a podmínkou, že střed jest na dané přímce. Středy těchto kružnic jsou středy hledaných koulí. Úloha má dvojí řešení.

Poznámka. Úloha má dvě reálná řešení, pokud v prvém případě jsou obě tečny kružnice K reálné. Leží-li bod M v jedné z daných rovin, je úloha jednoznačnou. V případě druhém, pokud bod M je v úhlu přímky p s přímkou p' souměrně položenou vzhledem k o.

8.

V rovině σ je parabola daná v půdoryse osou, ohniskem a vrcholem. Sestrojiti přímo vrchol nárysu paraboly.

Prof. *Ant. Navrátil.*

Řešení 1. Zaslal p. *M. Dias*, stud. VII. r. v Kroměříži.

Budiž o_1 osou půdorysu paraboly P. Potom jest přímka o_2 rovnoběžná s osou nárysu paraboly. Vrcholová tečna nárysu v'_2 je kolmá na o_2. Sestrojíme-li v půdoryse tečnu $t_1 \parallel$ s v'_1, jejíž směr jest znám, jest dotyčný bod této bodem hledaným.

Řešení 2. Zaslal *Em. Fr. Částka*, stud. VII. r., České Budějovice.

Sestrojme v první průmětně libovolné dva body půdorysu paraboly $A_1 B_1$ ($A_1 B_1 \perp o_1$) a jimi veďme tečny, které se protnou v bodě S_1 na o_1. Stanovme $A_2 B_2$ a bod S_2. Veďme nyní bodem A_2 kolmici $k_2 \perp \overline{S_2 A_2}$; $k_2 \times o_2 \equiv M_2$; $k'_2 \perp \overline{S_2 B_2}$ v bodě B_2, $k'_2 \times o_2 \equiv N_2$. Průsečík těžnice trojúhelníku $A_2 M_2 S_2$ procházející bodem A_2 s těžnicí trojúhelníku $B_2 N_2 S_2$ procházející vrcholem B_2 je hledaný vrchol nárysu.

c) Z fysiky.

1.

Na obvodu pevné kladky je na vlákně zavěšeno s jedné strany závaží 2 M, s druhé nehmotná kladka, jež nese po obou stranách na nehmotném vlákně dvě stejná závaží M, tak že je soustava v rovnováze. Jaký stav nastane, přidáme-li na závaží 2 M a na jedno ze závaží M po přívažku m?

Prof. *J. Schuster.*

Řešení elementární, podané *autorem.*

Na osu pohyblivé kladky působí výsledný tah závaží, jež se pohybují zrychlením $\gamma = \frac{m}{2M + m} \cdot g$. Tento tah jest

$$T = M(g + \gamma) + (M + m)(g - \gamma) = 2Mg + \frac{2M}{2M + m}\, g.$$

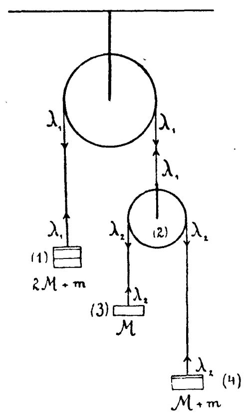
Váha hmoty levé, rovná $(2M + m)\, g$, jež tento tah překonává, jest větší o

$$(2M + m)\, g - T = \frac{m^2 g}{2M + m} = \mu g.$$

Padá tudíž levá hmota dolů zrychlením

$$\frac{\mu g}{(2M + m)\, g + T} \cdot g = \frac{m^2}{8M\,(M + m) + m^2}\, g,$$

se kterýmž stoupá pohyblivá kladka vzhůru.



Řešení úplné, podané žáky gymnasia v Žitné ulici v Praze.

Nazveme si vertikální vzdálenosti hmoty $2M + m$, osy kladky pohyblivé, hmoty M a hmoty $M + m$ pod nějakou horizontální rovinou vztažnou (na př. pod rovinou vodorovnou proloženou osou kladky pevné) postupně z_1, z_2, z_3 a z_4. Pak plynou z neprodlužitelnosti vláken vztahy

$$z_1 + z_2 = const. \qquad (1)$$

$$z_3 - z_2 + z_4 - z_2 = const. \qquad (2)$$

Zveme-li napětí vláken přes pevnou a pohyblivou kladku vedených λ_1 a λ_2, platí

$$\lambda_1 = 2\lambda_2 \qquad (3)$$

K tomu přistupují rovnice pohybové dle vztahu urychlení $\times$ hmota $=$ síle

$$\ddot{z}_1\,(2M + m) = (2M + m)\, g - \lambda_1 \qquad (4)$$

$$\ddot{z}_3\, M = Mg - \lambda_2 \qquad (5)$$

$$\ddot{z}_4\,(M + m) = (M + m)\, g - \lambda_2 \qquad (6)$$

kdež jest psáno $\ddot{z}_1$ za $\frac{dz_1^2}{dt^2}$ atd. Ze vztahu (1) a (2) plyne

$$\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = 0 \tag{1a}$$

$$\ddot{z}_3 + \ddot{z}_4 - 2\ddot{z}_2 = 0. \tag{2a}$$

Máme tedy šest lineárních rovnic o šesti neznámých $\ddot{z}_1$, $\ddot{z}_2$, $\ddot{z}_3$, $\ddot{z}_4$, λ_1 a λ_2, které lze snadno řešiti.

Na př. plyne z rovnice (4) a (3)

$$\ddot{z}_1 \, (2M + m) = (2M + m) \, g - 2\lambda_2,$$

odečteme dle (4)

$$- 2\ddot{z}_3 M = - 2Mg + 2\lambda_2,$$

zbude

$$\ddot{z}_1 \, (2M + m) - 2\ddot{z}_3 M = mg.$$

Tuto rovnici kombinujme s rovnicí, jiež obdržíme odečtouce (6) — (5) a dosadivše za $\ddot{z}_4 = - 2\ddot{z}_1 - \ddot{z}_3$, totiž se

$$\ddot{z}_1 \, . \, 2 \, (M + m) + \ddot{z}_3 \, (2M + m) = - mg.$$

Plyne jako dříve

$$\ddot{z}_1 = \frac{m^2}{8M \, (M + m) + m^2} \, g.$$

Jednoduchým mechanismem početním obdrželi bychom všechna urychlení, vedle $\ddot{z}_1 = - \ddot{z}_2$, také $\ddot{z}_3$ a $\ddot{z}_4$, napětí vláken λ_1 a λ_2 a zatížení osy pevné kladky, jež jest patrně rovno $2\lambda_1$.

2.

Obě vlákna kladky jsou zatížena stejně hmotami $m + \mu$. Na pravo má však přívažek tvar kroužku a je k vláknu zlehka připoután ve výši l nad hmotou m. Přerušíme-li toto spojení, jaký nastane pohyb po nárazu kroužku μ na hmotu m na pravé straně, jsou-li obě hmoty nepružné? Co by nastalo, kdyby byly dokonale pružné? Prof. *J. Schuster.*

Řešení, jež zaslala sl. *Vl. Černíková* ze VII. r. v Příbrami.

Přerušíme-li spojení, vzniknou dva pohyby zrychlené: přívažek μ klesá volně zrychlením g, hmota m stoupá zrychlením γ, daným vztahem

$$\mu g = (2m + \mu) \, \gamma.$$

Srazí se za dobu t, danou rovnicí

$$l = \tfrac{1}{2}gt^2 + \tfrac{1}{2}\gamma t^2.$$

Výsledná rychlost u po rázu počítá se dle vzoru

$$u\,(m_1 + m_2) = m_1 c_1 + m_2 c_2$$

kde

$$m_1 c_1 = \mu g t \qquad m_2 c_2 = -(2m + \mu)\,\gamma t = -\mu g t.$$

Je patrno, že je nullou. Hmoty se zastaví.

Kdyby byly pružné, odrazily by se od sebe rychlostmi týmiž, jaké měly před rázem, a stoupaly, resp. klesaly by znovu do své původní polohy a celý děj by se opakoval. Tělesa kmitala by do nekonečna, srážejíce se v bodě ležícím pod původní polohou přívažku ve vzdálenosti $\frac{1}{2}gt^2$.

3.

Zní-li píšťala vlaku tónem o 600 kmitech za sekundu a míjí-li vlak rychlostí 61·2 $\frac{km}{hod.}$ *pozorovatele vzdáleného o 5 m od trati, jak dlouho se bude výška tónu pozorovatelně měniti, dovede-li pozorovatel určiti sluchem intervall* $\frac{81}{80}$*?*

Prof. *J. Schuster.*

Řešení, jež zaslala sl. *Vl. Černíková* ze VII. r. v Příbrami.

Budiž $c = 340\,\frac{m}{sec}$ rychlost zvuku, $v = 17\,\frac{m}{sec}$ rychlost vlaku. Patu kolmice z pozorovatelova stanoviště na dráhu spuštěné označme O; délka její jest 5 m.

Blíží-li se vlak, slyšíme tóny

$$N' = N \,.\, \frac{c}{c - v\,.\,cos\,\varphi},$$

kdež φ je proměnný úhel mezi směrem rychlosti vlaku a spojnicí vlak-pozorovatel. Předpokládáme, že k rozeznání změny tónu je nutna nejmenší změna za vteřinu $\frac{81}{80}$. Slyšíme-li tedy na počátku vteřiny tón

$$N'_1 = N \,.\, \frac{c}{c - v\,.\,cos\,\varphi_1}, \text{ na konci } N'_2 = N \,.\, \frac{c}{c - v\,.\,cos\,\varphi_2}$$

a je-li $\frac{N'_1}{N'_2} = \frac{81}{80} = \frac{c - v \cos \varphi_2}{c - v \cos \varphi_1}$, je podmínce úlohy vyhověno.

Je-li vzdálenost vlaku od bodu O označena x, je

$\cos \varphi_2 = \frac{x - v}{\sqrt{d^2 + (x - v)^2}}$ a $\cos \varphi_1 = \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}}$. Dosazením do předchozího vztahu plyne rovnice

$$80 \cdot \frac{x - 17}{\sqrt{25 + (x - 17)^2}} - 81 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} + 20 = 0,$$

jež pomocí regulae falsi dává $x \doteq 22 \cdot 5$.

Při vzdalování se vlaku přestává z důvodu symmetrie pozorovatelná změna tónu při téže vzdálenosti, takže trvá celkem po trati 45 m, kterou vlak proběhne za 2·64 vteřiny. Ježto změnu pozorovali jsme teprve koncem prvé vteřiny, trvá doba pozorování změny 1·6 vteřin.

4.

Kyvadlo je složeno ze dvou hmotných bodů m_1 a m_2 spojených tuhou nehmotnou tyčí l. Jest určiti závěs, pro který má kyvadlo kyv nejkratší? Prof. *J. Schuster.*

Řešení, jež zaslala sl. *Vl. Černíková* ze VII. r. v Příbrami.

Doba kyvu složeného kyvadla je $T = \pi \sqrt{\frac{L}{g}}$, kde je g urychlení tíže a L redukovaná délka kyvadla. Čím je tato menší, tím bude menší T. Při tom

$$L = \frac{K}{Mx} = \frac{K_0 + Mx^2}{Mx} = \frac{K_0}{Mx} + x,$$

kde K je moment setrvačnosti kyvadla kolem osy závěsné o x od těžiště vzdálené, K_0 moment setrvačnosti vzhledem k rovnoběžné ose těžištěm procházející a M celková hmota kyvadla. Z podmínek úlohy plyne

$$K_0 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \quad \text{a} \quad r_1 + r_2 = l,$$

kde r_1 a r_2 zveme vzdálenosti hmot m_1 a m_2 od těžiště.

Ve vztahu pro L jest jedinou proměnnou veličinou x; má-li L býti minimem, musí jeho derivace dle x býti nullou, to jest

$$-\frac{K_0}{Mx_0^2}+1=0, \text{ čili } x_0=\sqrt{\frac{K_0}{M}}$$

a redukovaná délka minimální

$$L_{min}=2\sqrt{\frac{K_0}{M}}$$

i minimální doba kyvu

$$T_{min}=\pi\sqrt{\frac{2}{g}\sqrt{\frac{K_0}{M}}}.$$

Vzdálenosti těžiště od hmot m_1 a m_2 jsou

$$r_1=\frac{m_2 l}{m_1+m_2} \text{ a } r_2=\frac{m_1 l}{m_1+m_2},$$

takže

$$K_0=m_1\frac{m_2^2\, l^2}{(m_1+m_2)^2}+m_2\frac{m_1^2\, l^2}{(m_1+m_2)^2}=\frac{m_1\, m_2}{m_1+m_2}\,.\, l^2,$$

z čehož

$$L_{min}=\frac{2\sqrt{m_1\, m_2}}{m_1+m_2}\,.\, l \text{ a}$$

$$T_{min}=\pi\sqrt{\frac{2l\sqrt{m_1\, m_2}}{(m_1+m_2)g}}.$$

5.

Je-li znám vnitřní a vnější průměr trubice skleněné a měří-li se zdánlivý vnitřní průměr na př. kathetometrem, jak lze určiti optickou lomivost skla, z něhož je trubice zhotovena? Do které meze je měření možné? Prof. *J. Schuster.*

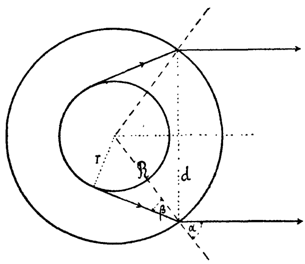
Řešení autorovo.

Do kathetometru vcházejí paprsky rovnoběžné, které vyšedše jako tečné k vnitřní válcové ploše otvoru zlomily se při přechodu do vzduchu dle zákona

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{1}{n},$$

kde n je index lomu skla, a úhly α a β definovány jsou obrazcem. Je-li jejich vzájemná vzdálenost $2d$, poloměr trubice vnější R a vnitřní r platí patrně

$$\sin\beta = \frac{r}{R}, \quad \sin\alpha = \frac{d}{R}, \text{ takže } \frac{d}{r} = n.$$



Měření je možné potud, pokud $R \geqq nr$. Je-li totiž v krajním případě $d = 2R$, takže $\sin\alpha = 1$ je maximálná hodnota β, daná vztahem $\sin\beta = \frac{1}{n}$; pro větší úhly β nastává úplný odraz při přechodu ze skla do vzduchu. Ježto tedy musí $n \sin\beta \leqq 1$, musí $\frac{nr}{R} \leqq 1$.

6.

Ze svítícího bodu vycházející paprsky se lámou na rovinném rozhraní do jiného ústředí. Prodloužíme-li lomené paprsky zpět o jejich dráhu v prvém ústředí, které je geometrické místo virtuálných zdrojů (takto získaných) pro lom a) od kolmice, b) ku kolmici? Jaké jednoduché sestrojení lomených paprsků plyne z této úvahy? Prof. *J. Schuster.*

Řešení autorovo.

Pata O kolmice ze svítícího bodu S na rozhraní spuštěné buď počátkem souřadnic, směr OS osou Y-ovou, směr rozhraní osou X-ovou. Zpětné prodloužení paprsku lomeného MP o délku MS definuje bod T, jehož geometrické místo hledáme. Souřadnice tohoto bodu, ježto

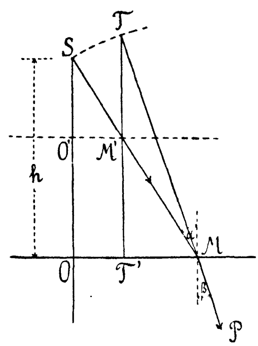
$$MS = MT = \frac{h}{\cos\alpha}$$

jsou

$$OT' = x = \overline{MS} \,.\, \sin\alpha - \overline{MT} \,.\, \sin\beta = h\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - h\,\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$$

a

$$T'T = y = h\,\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$



Vedle toho platí zákon lomu

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n.$$

Úlohou naší jest, z těchto rovnic eliminovati proměnné úhly α a β. Ze vztahu pro $\frac{x}{h}$ vypočteme dosazením $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$

$$tg\,\alpha = \frac{x}{h} \,.\, \frac{n}{n-1}$$

a dosazením do $\frac{y^2}{h^2}$ posléze

$$\frac{y^2}{h^2} - \frac{x^2}{h^2} \cdot \frac{n+1}{n-1} = 1.$$

Geometrickým místem bodů T při lomu ku kolmici jest tedy hyperbola.

Za lomu od kolmice nastupuje za n převratná hodnota $\frac{1}{n}$, takže rovnice geom. místa jest

$$\frac{y^2}{h^2} + \frac{x^2}{h^2} \cdot \frac{n+1}{n-1} = 1.$$

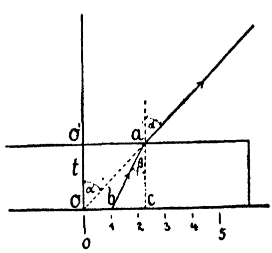
Jest jím tedy ellipsa, jež má s dřívější hyperbolou obě osy společné. Obě křivky ovšem procházejí svítícím bodem S, jak je nutno; vyhovujeť jim bod $x = 0$, $y = h$.

Konstrukce lomeného paprsku dá se na základě naší úvahy provésti následovně: V bodě O', jenž leží na OS ve vzdálenosti $OO' = n \,.\, OS = nh$ (při paprscích lomených od kolmice ovšem $OO' = \frac{h}{n}$) veďme rovnoběžku s rozhraním. V bodě M', v němž ji protíná paprsek SM, k němuž hledáme lomený, vztyčme kolmici k rozhraní a protněme ji kruhem o středu M a poloměru MS v bodě T. Spojnice TM udává směr lomeného paprsku.

7.

Určete index lomu desky planparallelní známé tloušťky t z pošinutí obrazu. Deska budiž položena na stolek goniometru, na němž je naznačena osa děleného kruhu, tak, že částečně přikrývá dílky měřítka millimetrového. Měřítko je položeno tak, aby jedna jeho dělící čárka se ztotožnila s osou. Štěrbinou alhidady pozorujme nejprvé kolmo k desce a pak ji stáčejme tak dlouho, až znovu dílek střední nalezne pokračování uvnitř deštičky skleněné. Je-li potřebné otočení α, čemu je rovno n?

Prof. *J. Schuster.*



Řešení autorovo.

Otočení α jest dáno úhlem, pod nímž jest nutno pozorovati desku, aby prvý dílek měřítka při chodu paprsku deskou se ztotožnil se středním dílkem o při chodu paprsku vzduchem.

Přitom jest $ob = 1$ $\quad ac = oo' = t$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n.$$

Jak z obrazce patrno, je

$$oc = t \,.\, tg\,\alpha \qquad bc = t \,.\, tg\,\beta$$

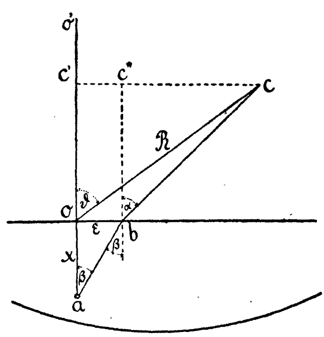
$$ob = 1 = oc - bc = t\,(tg\,\alpha - tg\,\beta).$$

Eliminací úhlu β dle $sin\,\beta = \frac{sin\,\alpha}{n}$ plyne

$$\frac{1}{t} = tg\,\alpha - \frac{sin\,\alpha}{\sqrt{n^2 - sin^2\,\alpha}} \quad \text{čili} \quad n^2 = sin^2\,\alpha + \frac{sin^2\,\alpha}{\left(tg\,\alpha - \frac{1}{t}\right)^2}.$$

8.

V čočce plankonvexní je kazová tečka. Určete její hloubku a index lomu skla goniometrem a to následovně: Rovinná stěna čočky se ztotožní s rovinou stolku goniometru; na ni se položí měřítko a toto i tečka se nařídí na osu děleného kruhu. Měří se dva úhly, kdy totiž prvý a druhý millimetr se po otočení alhidady kryje s tečkou. Úhly ty jsou α_1, α_2 a poloměr alhidady R mm. Prof. *J. Schuster.*



Řešení autorovo.

Budiž hloubka kazu a pod rovinou skla $oa = x$, vzdálenost $ob = \varepsilon$, poloměr děleného kruhu $oc = R$. Označení úhlů je patrno z obrazce. Dle zákona Snelliova platí

$$\frac{sin\,\alpha}{sin\,\beta} = n.$$

Úhly α a β musíme vyjádřiti známými veličinami:

$$\sin\alpha = \frac{c'c''}{cb} = \frac{cc' - c'c''}{cb} = \frac{R \sin\delta - \varepsilon}{\sqrt{R^2 + \varepsilon^2 - 2R\varepsilon \sin\vartheta}}$$

$$tg\,\beta = \frac{\varepsilon}{x}, \quad \sin\beta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}}.$$

Dosazením plyne

$$\frac{R^2 \sin^2\vartheta + \varepsilon^2 - 2R\,\varepsilon \sin\vartheta}{R^2 + \varepsilon^2 - 2R\,\varepsilon \sin\vartheta} = n^2 \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + x^2}.$$

Měříme-li dva úhly ϑ pro dvě různá ε, obdržíme dvě rovnice pro n a x. Označme si numerickou hodnotu levé strany pro ε_1 a ϑ_1 písmenou A, pro ε_2 a ϑ_2 písmenou B. Pak ježto

$$A = n^2 \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1^2 + x^2} \quad \text{a} \quad B = n^2 \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_2^2 + x^2}$$

jsou žádané veličiny

$$x^2 = \frac{(A - B)\,\varepsilon_1^2\,\varepsilon_2^2}{B\varepsilon_1^2 - A\varepsilon_2^2} \quad \text{a} \quad n^2 = \frac{AB\,(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)}{B\varepsilon_1^2 - A\varepsilon_2^2}.$$

9.

Vysvětlete mechanismus užívaný při některých vývěvách, kde přímý pohyb pístu v botě jest způsoben tím, že konec táhla jest kloubovitě připevněn k obvodovému bodu ozubeného kola, které se pohybuje po vnitřním obvodu jiného ozubeného kola o dvojnásobném poloměru. Prof. *M. Haas.*

Řešení autorovo.

Střed velikého kola označme v obrazci, který čtenář sám snadno si zhotoví, písmenou O, střed malého S. V poloze základní dotýká se bod A, ve kterém je táhlo k obvodu vnitřního kola připevněno. většího kola uvnitř na př. v nejnižším bodě. Pošine-li se střed menšího kola do nové polohy S', dotýkají se obě kola v bodě B a bod A zaujal polohu A' uvnitř většího kola. Poněvadž

$$arc\ AB = arc\ A'B$$

a poloměry oblouků se mají k sobě $\frac{SA}{OA} = \frac{1}{2}$, platí pro úhly

středové $\quad \sphericalangle AOB : \sphericalangle A'S'B = 1 : 2$

čili $\quad \sphericalangle A'S'B = 2 \,.\, \sphericalangle AOB.$

Úhel $A'OB$ jest obvodový k středovému úhlu $A'S'B$ a tudíž platí

$$\sphericalangle A'OB = \tfrac{1}{2} \sphericalangle A'S'B$$

čili

$$\sphericalangle A'OB = \sphericalangle AOB.$$

Z toho plyne, že při libovolném pošinutí menšího kola splývá přímka $A'O$ s poloměrem AO, t. j. bod A' při svém pohybu zůstává stále na přímce AO maje za svou dráhu průměr většího kola.

10.

Po vnitřní ploše rotačního paraboloidu, jehož rotační osa má polohu svislou, vrhneme kuličku tak, aby opisovala kruhovou dráhu. Dokažte, že doba oběhu nezáleží na poloměru kruhové dráhy. Prof. *M. Haas.*

Řešení, jež zaslala sl. *Vl. Černíková* ze VII. tř. reálky v Příbrami.

Rotační paraboloid vznikl otočením paraboly $x^2 = 2py$ kolem svislé osy Y-ové. Kulička opisuje kruh poloměru x, jehož rovina stojí kolmo na ose Y-ové. Na kuličku hmoty m působí směrem osy Y-ové dolů tíže silou mg a směrem osy Y-ové odstředivá síla $\frac{mv^2}{x}$. Nemá-li kulička ani stoupat ani klesat, nýtéž opisovat kružnici, musí výslednice obou sil rušiti se odporem paraboloidu, t. j. státi na jeho ploše kolmo, ve směru normály. Sestrojíme-li tedy rovnoběžník sil a prodloužíme výslednici až k průsečíku s osou Y-ovou, obdržíme pravoúhlý trojúhelník, jenž má za jednu odvěsnu subnormálu p, za druhou pak poloměr x kruhové dráhy. Z podobnosti tohoto trojúhelníka a trojúhelníka sil plyne

$$mg : \frac{mv^2}{x} = p : x.$$

Subnormála p paraboly má hodnotu stálou. Rychlost kuličky je dle napsané úměry

$$v = x \sqrt{\frac{g}{p}}$$

a doba oběhová

$$T = \frac{2\pi x}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{p}{g}}.$$

Nezávisí tudíž doba T na poloměru dráhy x.

Řešení úloh zaslali:

P. *Blažek Hubert*, VI. r. v Kroměříži
m. 7., 15., 16., d. 1., 4., 5, 6.,
p. *Bořkovec Pavel*, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—5., 8., 26., 31., d. 4., f 2., 5., 7., 10.,
p. *Cipro František*, VIII. r. g. v Praze-II., v Křemencově ul.
m. 1., 3., 15., 17., 19., 26.,
p. *Částka Frant. Emanuel*, VIIa r. v Čes. Budějovicích
m. 3.—6., 8.—11., 13.—18., 20.—23., 26., 28., 29., 31.,
d. 1.—5., 7., 8.,
sl. *Černíková Vlasta*, VII. r. v Příbrami
f. 1.—10.,
p. *Čižinský A.*, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—4.. 6., 8., 15., 16., 28., 29., 31., f. 1., 2., 5., 7., 10.,
p. *Dias Mil.*, VII. r. v Kroměříži
m. 1.—6., 8.—15., 17, 19.—23., 26., 28.—31., 35., d. 1.
až 8.,
p. *Drlík Josef*, VII. r. v Příboře
m. 3.—7., 10., 14., 15., 23., 25., 26., 28.—31., d. 1., 5.,
p. *Dvořák Jaroslav*, VI. r. v Bučovicích
d. 3., 5., 7.,
p. *Hak J.*, Va r. v Brně
d. 3., 4., 5., 7.,
p. *Hlaváček Václav*, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—6., 8, 11., 13., 15.—18., 21., 26.—31., f. 1.—10.,
p. *Holubář Josef*, VII. r. v Kostelci n. Orl.
m. 3., 10., 14., 15., 17., 28., d. 2., 5., 7., 8.,
p. *Horák Mojmír*, VIII. g. v Kroměříži
m. 1.—10., 15., 22., 23., 25.—27., 29.—31., f. 1., 2., 5.,
7., 9., 10.,

p. *Hůla Břetislav*, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 2., 4., 11., 16., 18., 26., 27., 29.—31., f. 2., 4. až 7., 10.,
p. *Charvát Ant.*, VII. r. na Kladně
m. 1., 3.—5., 15., 16., 26.—31.,
p. *Jakubův Jaroslav*, VIIa r. na Král. Vinohradech
m. 11.—13., 15.,
p. *Janko Jar.*, VIII. g. v Třebíči
m. 1.—35., d. 4., 7., f. 1., 2., 4.—6., 9., 10.,
p. *Jíra Václav*, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—5., 8., 11., 13., 15., 16., 18., 26.—30., f. 1.—7., 10.,
p. *Koerner Jul.*, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—4., 8., 11., 15., 16., 18., 26., 27., 29.—31., f. 1., 2., 4.—7., 10.,
p. *Kolenatý Lad.*, V. r. v Rakovníce
m. 1., 10., 11., 15., 19., 20.—22., 28.—30.,
p. *Kopal Lad.*, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—4., 6., 8., 11., 13., 15.—18., 26.—31., f. 1.—7., 10.,
p. *Kostrouch František*, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 3., 4., 6., 15., 28., 29., 31.,
p. *Kozák Josef*, VI. r. v Pardubicích
d. 2., 3., 5.,
p. *Král Karel*, VII. r. v Novém Městě na Moravě
m. 9., d. 1., 5., 8.,
p. *Kučera Karel*, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—4., 6., 8., 11., 13., 15.—18., 26.—31., f. 1.—7., 10.,
p. *Lamparter Vilém*, VIII. g. v Třebíči
m. 1.—[illegible].,
p. *Látal Štěpán*, VII. r. v Olomouci
m. 1., 3.—6., 8., 10.—12., 15., 20., 31.,
p. *Libra Josef*, VI. r. v Novém Městě
m. 10., 30.,
p. *Mastný Theodor*, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—21., 23., 24., 26.—32., f. 1.—10.,
p. *Mašín Jan*, Vb r. v Praze-VII.
m. 9.—11., 15., 20.,
p. *Materna Miloš*, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—5., 8., 11., 13., 15., 16., 18., 26.—29., 31., 32.,

p. *Mayer Jar.*, VI. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—6., 8.—11., 15., 26., 27., 29., 31.,
p. *Moravec Čestmír*, VI. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 8., 16.,
p. *Moravec K.*, VII. r. v Praze I.,
m. 1.—6., 8.—23., 25.—31., 33.—35., d. 1.—5., 7.,
p. *Ouřada Emil*, VI. r. v Příbrami
m. 1., 26., f. 2.,
p. *Pantoflíček Ctibor*, VI. r. v Telči
m. 1., 3., 15., 18.,
p. *Pátek K.*, VII. r. v Kladně
d. 1., 5.,
p. *Pazourek Jiří*, VI. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 10., 15., 16.,
p. *Pírko Viktor*, VII. g. v Českých Budějovicích
m. 1.—6., 8., 10.—16., 20., 21., 25.—27., 29.,
p. *Plichta J.*, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—4., 6., 8., 11., 13., 15.—18., 26.—31., f. 1., 2., 4. až 7., 10.,
p. *Pohonka Karel*, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 8., 10., 15., 16.,
p. *Pošíval Frant.*, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—4., 6., 8., 15., 26., 28., 29., 31., f. 1., 2., 7.,
p. *Pudil S.*, VII. r. v Litovli
m. 1.—7., 9.—26., 28., 29., 32.,
p. *Roubíček Josef*, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 2., 4., 15., 29., 31.,
p. *Řeřábek Alois*,
m. 10., 11., 14., 18., 29., d. 1., 5., 7.,
p. *Schneider Jaroslav*, VII. r. v Olomouci
m. 1., 3.—6., 8.—12., 15., 17.—20., 26., 28.—32., 35.,
p. *Sitko Jan*, VII. g. v Kroměříži
m. 1., 4., 5., 6., 9.,
p. *Sklenář J.*, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—5., 8., 15., 16., 26.—31., f. 7.,
p. *Soukup Ferd.*, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—5., 8., 11., 13., 15., 17., 18., 26.—31, f. 1., 2., 4. až 7., 10.,

p. *Soukup Frant.*, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—5., 8., 11., 13., 15.—18., 26.—31., f. 1., 2., 4.—7., 10.,
p. *Ševeček Viktor*, VII. g. v Přerově
m. 15., 20.,
p. *Šimečka Josef*, VI. r. v Příboře
m. 3.—6., 10., 14., 15., 23., 25., 26., 29.—31.,
p. *Šlégl Jos.*, VIIb r. v Karlíně
d. 1., 3., 5., 6., 7.,
p. *Šmejkal Miloš*, VIIb r. v Praze III.
m. 10., 11., 14., 15., 17., 19.—31., d. 1.—5., 7.,
p. *Štěpánek Václav* VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 3.—5., 15., 26., 28.,
p. *Šubert Miroslav*, VII. g. v Něm. Brodě
m. 15.,
p. *Tesař V.*, VI. r. v Praze II.
m. 3., 11., 12., 13., 15., 27., 29.,
p. *Vašata Jar.*, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 3., 4., 15., 16., 26., 27., f. 2., 5., 6., 7.,
p. *Velkoborský Jiří*, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—4., 6., 8., 11., 13., 15.—18., 26.—31., f. 1.—7., 10.,
p. *Veverka Josef*, VII. r. v Novém Městě na Moravě
m. 1., 3., 9., 14., 15., 28., 31., d. 1., 5., 7.,
p. *Vocel Josef*, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 3., 4., 15., 26.,
p. *Votruba Karel*, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 3., 4., 16., 26., 27., f. 1.—7, 10.
p. *Žabík Jan*, VII. r. v Praze III.
m. 1.—35., d. 1.—5., 7.

Udělení cen.

Z mathematiky:

Redakce úloh, přihlížejíc nejen k počtu, ale i k jakosti řešení, přisoudila těmto pp. řešitelům ceny vypsané výborem „Jednoty Českých Mathematiků“.

Ceny první:

Cástka Emanuel Fr., VIIa r v Českých Budějovicích.
Dias Miloslav, VII. r. v Kroměříži.
Janko Jaroslav, VIII. g. v Třebíči.
Lamparter Vilém, VIII. g. v Třebíči.
Mastný Theodor, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
Moravec Karel, VII. r. v Praze I.
Pudil S., VII r. v Litovli.
Zubík Jan, VII. r. v Praze III.

Spis: Dr. F. J. Studnička: Úvod do analytické geometrie v rovině (Sborník J. Č. M. VII.) obdrží pánové *J. Janko* a *K. Moravec*.

Ceny druhé:

Hlaváček Václav, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
Horák Mojmír, VIII. g. v Kroměříži.
Jíra Václav, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
Kopal Ladislav, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
Kučera Karel, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
Mayer Jaroslav, VI. g. v Praze, v Žitné ul.
Pírko Viktor, VII. g. v Českých Budějovicích.
Plichta J., VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
Schneider Jar., VII. r. v Olomouci.
Velkoborský Jiří, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.

Ceny třetí:

Drlík Josef, VI. r. v Příboře.
Hůla Břetislav, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
Charvát Antonín, VII. r. v Kladně.
Koerner Julius, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
Kolenatý Ladislav, V. r. v Rakovníce.
Látal Štěpán, VII. r. v Olomouci.
Materna Miloš, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
Pošíval František, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
Sklenář J., VIII. g. v Praze, v Žitné ul.

Soukup Ferdinand, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
Soukup František, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
Šimečka Josef, VI. r. v Příboře.

Z deskriptivní geometrie:

Spis: Zahradník: O plochách druhého stupně obdrží pánové:

Blažek Hubert, VI. r. v Kroměříži.
Částka Emanuel Fr., VIIa r. v Čes. Budějovicích.
Dias Miloslav, VII. r. v Kroměříži.
Moravec Karel, VII. r. v Praze I.
Šlegel Josef, VIIb r. v Karlíně.
Šmejkal Miloš, VIIb - Praze III
Zubík Jan, VII. r. v .. ze III.

Mimo to obdrží pánové *Karel Moravec* a *Fr. Emanuel Částka* spis: Jarolímek: Deskriptivní geometrie pro vyšší školy reálné, I., II., III.

Z fysiky:

Spis Dr. V. Strouhal - Dr. B. Kučera: Mechanika, 2. vyd., sl. *Vlasta Černíková* ze VII. r. v Příbrami.

Spis Strouhal: Ocel a její vlastnosti galvanické a magnetické, obdržel p. *Mojmír Horák* z VIII. g. v Kroměříži.