Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bohuslav Hostinský

Příspěvek k differenciální geometrii jednodílného hyperboloidu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 5, 567--571

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122084`

Protože determinant této soustavy obsahuje v prvním sloupci samé jednotky, vyjde patrně $E_1 = 1$, kdežto

$$E_2 = E_3 = \ldots = E_m = 0$$

a tudíž identicky

$$f(x) = 1.$$

Odsud však vyplývá, že také rovnice

$$u(x) + v(x) = 1$$

jest splněna identicky a že tedy průběhem neomezeně dlouhé hry jeden z obou hráčů *jistě bude ruinován.*

Podstatu tohoto důkazu tvoří ta okolnost, že rovnice pro α má vždy jeden kořen jednotkový. Důkaz vedl by se obdobně, když by hra nebyla spravedlivá aneb když by hráč teprve při zadlužení považován byl za ruinovaného.

Příspěvek k differenciální geometrii jednodílného hyperboloidu.

Napsal **Bohuslav Hostinský.**

Zvolme na jednodílném hyperboloidu libovolnou povrchovou přímku p, na ní bod α, a sestrojme křivku t, která prochází bodem α a protíná orthogonálně všechny povrchové přímky soustavy Σ, do níž náleží p. Trajektorie t jest transcendentní křivka, která protíná p v nekonečně mnoha bodech; označíme je, jak na p jeden po druhém následují, když se v určitém směru pohybujeme po t vycházejíce z bodu α, písmenami

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$$

Budiž α' libovolný bod na p mezi α a β. Bodem α' prochází jistá orthogonální trajektorie t' soustavy Σ; nejbližší její průsek s p označme písmenou β'.

Dle známé věty o orthogonálních trajektoriích povrchových přímek*) jest

$$\overline{\alpha\alpha'} = \overline{\beta\beta'}, \quad \overline{\alpha'\beta} = \overline{\beta'\gamma}$$

a proto též

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{\beta\gamma} = \overline{\gamma\delta} = \ldots = l.$$

---

*) Viz na př. *Scheffers*: Einführung in die Theorie der Flächen (1902) p. 217.

Každá orthogonální trajektorie soustavy Σ protíná tedy přímku p v řadě ekvidistantních bodů; vzdálenost dvou sousedních bodů takové řady jest jistá konstantní úsečka l, jejíž délka nezávisí na volbě přímky p ani na volbě bodu α.

Následující výpočet vede k jednoduchému vzorci (13), kterým se vyjadřuje l na základě reálních period elliptického integrálu prvního a druhého druhu.

Abychom obdrželi rovnice povrchových přímek i orthogonálních trajektorií ve formě co možná jednoduché a elliptické integrály v normálním tvaru Weierstrassově, vyjdeme z rovnice hyperboloidu

$$\frac{x^2}{a+\lambda}+\frac{y^2}{b+\lambda}+\frac{z^2}{c+\lambda}=1 \tag{1}$$

a budeme předpokládati

$$a > b > 0;\; a+b+c=0;\; -b < \lambda < -c \tag{2}$$

Rovnice (1) jest vzhledem k λ 3. stupně; mimo kořen λ vyhovující podmínce (2) má další dva kořeny λ_1, λ_2, které jsou v mezích

$$-a \leqq \lambda_1 \leqq -b, \quad -c \leqq \lambda_2 \leqq +\infty. \tag{3}$$

Rovnice (1) představuje, píšeme-li v ní λ_1 n. λ_2 místo λ, dvojdílný hyperboloid resp. ellipsoid konfokální s hyperboloidem jednodílným. Dle rovnice (2) jest

$$\left.\begin{aligned} f(\lambda) &= 4(a+\lambda)(b+\lambda)(c+\lambda) = 4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3 \\ g_2 &= 4(a^2+ab+b^2), \quad g_3 = 4ab(a+b). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

λ_1 a λ_2 zvolíme za elliptické souřadnice na hyperboloidu (1) a dle známé theorie obdržíme pro kvadrát differenciálu oblouku na (1)

$$\left.\begin{aligned} & ds^2 = E\, d\lambda_1^2 + G\, d\lambda_2^2 \\ & E = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda)}{f(\lambda_1)}, \quad G = \frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda)}{f(\lambda_2)} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Zaveďme nyní nové proměnné u, v rovnicemi

$$\int_\infty^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} = u, \quad \int_\infty^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} = v,$$

tedy

$$\lambda_1 = p(u), \quad \lambda_2 = p(v).$$

Předpokládejme na př., že

$$\frac{1}{\sqrt{f(0)}} = + i\sqrt{g_3},$$

a ustanovme, že integrační čára nemá vybočiti z hořejší půlroviny. Poloviční periody ω, ω' (ω reální, ω' ryze imaginární) funkce $p(u)$ jsou dány integrály

$$\omega = \int_{\infty}^{-c} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} = \int_{-a}^{-b} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} > 0, \quad \frac{\omega'}{i} = \frac{1}{i} \int_{-a}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} =$$

$$= \frac{1}{i} \int_{-b}^{-c} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} > 0. \tag{6}$$

Proměnné u a v omezíme takto (ϱ, σ reální):

$$u = \varrho - \omega', \quad 0 \leqq \varrho \leqq \omega$$
$$v = \sigma, \qquad 0 \leqq \sigma \leqq \omega;$$

každému páru hodnot (u, v) odpovídá pár elliptických souřadnic (λ_1, λ_2) v mezích (3) t. j. jediný reální bod v (libovolném) oktantu hyperboloidu a naopak.

Differenciální rovnice povrchových přímek jest pak

$$du \pm dv = 0\text{*)}; \tag{7}$$

hořejší znamení odpovídá jedné soustavě, dolejší druhé. Odpovídá-li na př. horní znamení soustavě Σ, obdržíme integrací rovnici přímek Σ:

$$u + v = k; \tag{8}$$

eliminace v z vzorce pro ds^2 vede k výsledku

$$ds = [p(u) - p(k - u)]\, du$$

aneb

$$l = \zeta(u_\alpha) - \zeta(u_\beta) - \zeta(u_\alpha - k) + \zeta(u_\beta - k) \tag{9}$$

Tato formule udává délku úsečky $\alpha\beta$ omezené dvěma body přímky (8), v nichž u nabývá hodnot u_α resp. u_β.

Funkce $\zeta(u)$ souvisí, jak známo, s $p(u)$ rovnicí

$$-d\zeta = p\, du = \frac{p\, dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}.$$

*) Viz *F. Klein*: Einleitung in die höhere Geometrie I. p. 61.

Differenciální rovnice pro orthogonální trajektorie přímek (7) jest

$$E\,du \pm G\,dv = 0$$

aneb

$$p(u)\,du \pm p(v)\,dv - \lambda(du \pm dv) = 0.$$

Integrujme pro soustavu Σ (horní znamení); vychází

$$F(u, v) = \zeta(u) + \zeta(v) + \lambda(u + v) = \gamma_1. \tag{10}$$

Představme si přímku p, jež má rovnici (8) a na ní bod α v 1. oktantu a supponujme pro jednoduchost, že orthogonální trajektorie t soustavy Σ protíná p postupně v bodech $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ jež leží všecky v 1. oktantu; t má spirálovitý tvar a závit mezi body α a β prochází nejprve prvním oktantem, pak druhým ($x > 0$, $y < 0$), třetím ($x < 0$, $y < 0$), čtvrtým ($x < 0$, $y > 0$) a konečně zase prvním. Stále jest $z > 0$. V n-tém oktantu má t rovnici

$$F(u, (-1)^{n+1} v) = \gamma_n;$$

pro okolí bodu α platí $n = 1$, pro okolí bodu β jest však vzíti $n = 5$.

Podle rovnic (8), (9) a (10) jest

$$F(u_\alpha, v_\alpha) - F(u_\beta, v_\beta) = l = \gamma_1 - \gamma_5. \tag{11}$$

Abychom určili l, označme (u_n, v_n) souřadnice bodu, v němž t opouští n-tý oktant. Patrně jest

$$u_1 = u_3 = -\omega' + \omega,\quad u_2 = u_4 = -\omega'.$$

K výpočtu bude třeba užíti známých vztahů

$$\zeta(u) = -\zeta(-u),\quad \zeta(u + 2\omega) = \zeta(u) + 2\eta,\quad \zeta(u + 2\omega') = \\ = \zeta(u) + 2\eta',$$

kde η, η' jsou integrály druhého druhu:

$$\left.\begin{aligned} \eta = \zeta(\omega) &= \int_{-b}^{-a} \frac{p\,dp}{\sqrt{gp^3 - g_2 p - g_3}} > 0 \\ \eta' = \zeta(\omega') &= \int_{-c}^{-b} \frac{p\,dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Vyjádřeme, že bod (u_1, v_1) leží na konci oblouku trajektorie t v 1. oktantu a na začátku oblouku v 2. oktantu a sečtěme obě rovnice. Tak obdržíme

$$F(u_1, v_1) + F(u_1, -v_1) = \gamma_1 + \gamma_2 = 2(\eta - \eta') + 2\lambda(\omega' - \omega).$$

Zcela podobně najdeme další tři rovnice

$$\gamma_3 + \gamma_4 = \gamma_1 + \gamma_2,$$
$$\gamma_2 + \gamma_3 = \gamma_4 + \gamma_5 = 2\eta' + 2\lambda\omega'.$$

Z těchto čtyř rovnic lze ustanoviti rozdíl $\gamma_1 - \gamma_5$; dosadíme-li do (11), máme výsledek

$$l = 4(\eta + \lambda\omega); \tag{13}$$

ω a η jsou dány formulemi (6) a (12), invarianty g_2, g_3 formulemi (4).

Degeneruje-li hyperboloid na fokální ellipsu

$$(\lambda = -c = a + b),$$

přejde Σ v soustavu tečen této ellipsy a t v její evolventu. Úsečka l rovná se pak obvodu O fokální ellipsy a máme

$$O = 4\eta + 4(a + b)\,\omega;$$

poloosy fokální ellipsy jsou $\sqrt{2a + b}$, $\sqrt{2b + a}$.

Vedení elektřiny v hustých plynech.

Elementárná theorie a měrné methody.

Napsal prof. Dr. **Bohumil Kučera** v Praze.

(Dokončení.)

O velikosti iontového náboje.

§ 47. Z rovnice (25) § 41., jež zněla

$$pu_1 = D_1\left(\frac{dp}{dx} + n_1\, eF\right),$$

lze učiniti zajímavé a důležité konkluse. Platí ovšem rovnice ta i tehdy, je-li koncentrace iontů všude táž, t. j. $\frac{dp}{dx} = 0$; přejde ve tvar

$$pu_1 = D_1\, n_1\, eF \quad \text{čili} \quad u_1 = D_1\, e \,.\, \frac{n_1}{p}\, F.$$

Podíl počtu iontů v cm^3 a tlaku $\frac{n_1}{p}$ můžeme však dle zákona