Josef Langr

Trisekce úhlu zvláštním pravítkem

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 5, 617--620

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122083

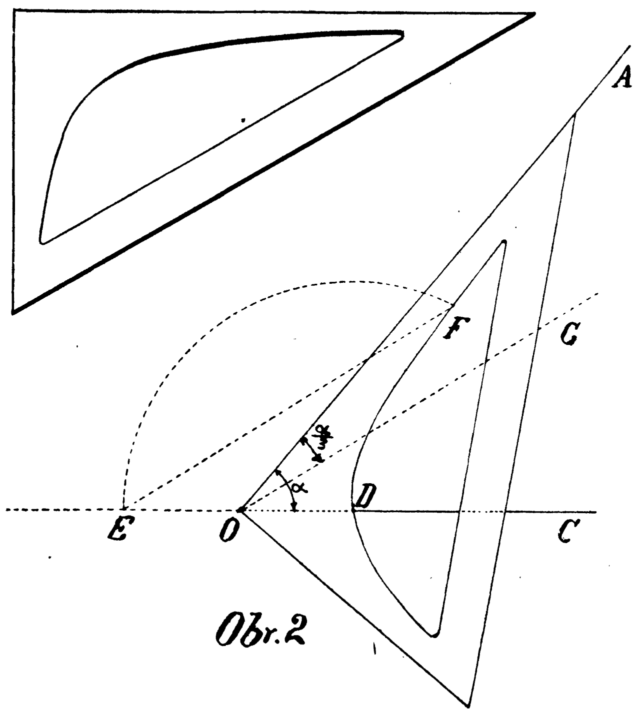
Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

Trisekce úhlu zvláštním pravítkem.

Podává Ing. **Josef Langr.**

V nasledujících řádcích popíšeme způsob, jak možno rozděliti daný úhel na 3 stejné díly užitím zvláštního pravítka.

Obr. 1



Obr. 2

Tvar pravítka toho je vyznačen v obr. 1. Jest to, jak vidno, pravítko trojúhelníkové s úhly 30, 60 a 90°. Vnitřní výřez je stanoven přímkou rovnoběžnou s přeponou a rovnoosou hyperbolou, jejímiž asymptotami jsou obě odvěsny trojúhelníku.

Máme-li na př. rozděliti úhel $AOC = \alpha$ (obr. 2.) na 3 stejné díly, pokračujeme následovně: Přiložíme pravítko na úhel tak, že vrchol pravého úhlu se kryje s vrcholem O a jedna odvěsna se kryje s ramenem OA. Potom narýsujeme dle pravítka zmíněnou hyperbolu, která nám protne rameno OC v bodě D. Pravítko odsuneme, rameno OC prodloužíme, učiníme

$$\overline{OD} = \overline{OE}$$

a z bodu D co středu opíšeme kruhový oblouk poloměrem DE. Oblouk protíná hyperbolu v bodě F. Vrcholem O vedeme $OG \parallel EF$. Pak jest $\sphericalangle AOG = \frac{1}{3}\alpha$.

Konstrukce tato vyplývá z následující věty: *V trojúhelníku o vrcholech na rovnoosé hyperbole a základně jdoucí středem hyperboly jest přímka půlící úhel při vrcholu rovnoběžna s asymptotou hyperboly.* K důkazu této věty mysleme si rovnoosou hyperbolu danou rovnicí

$$xy = a^2.$$

Osy soustavy ztotožňují se s asymptotami hyperboly. (Obr. 3.) Mysleme si nyní $\triangle DEF$ s vrcholy na hyperbole. Základna DE procházejž středem hyperboly. Souřadnice vrcholů buďtež:

$$D(x_1, y_1), \quad E(-x_1, -y_1), \quad F(\xi, \eta).$$

Rovnice obou ramen trojúhelníku jsou:

$$DF \equiv y - y_1 = \frac{y_1 - \eta}{x_1 - \xi}(x - x_1),$$

$$EF \equiv y + y_1 = \frac{-y_1 - \eta}{-x_1 - \xi}(x + x_1).$$

Poněvadž souřadnice vrcholů trojúhelníku vyhovují rovnici hyperboly, jest

$$\frac{y_1 - \eta}{x_1 - \xi} = \frac{y_1 - \eta}{\frac{a^2}{y_1} - \frac{a^2}{\eta}} = -\frac{\eta y_1}{a^2}$$

a

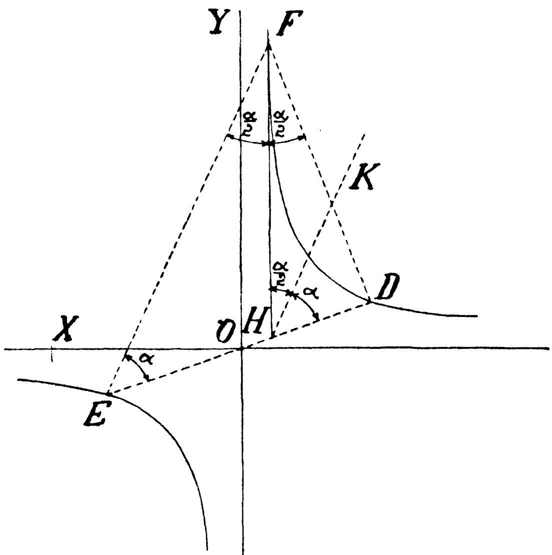
$$\frac{-y_1 - \eta}{-x_1 - \xi} = \frac{y_1 + \eta}{\frac{a^2}{y_1} + \frac{a^2}{\eta}} = \frac{\eta y_1}{a^2}.$$

Lze tedy psáti rovnice obou ramen:

$$DF \equiv y - y_1 = -\frac{y_1\eta}{a^2}(x - x_1),$$

$$EF \equiv y + y_1 = \frac{y_1\eta}{a^2}(x + x_1).$$

Z těchto rovnic vychází, že obě ramena svírají s osou X úhly



Obr. 3

výplňkové. Proto přímka rovnoběžná s osou Y a jdoucí vrcholem F půlí $\sphericalangle DFE$.

Jestliže jest současně $DF = DE$, jest

$$\sphericalangle FED = \sphericalangle EFD = \alpha.$$

Pak jest

$$\sphericalangle FHD = \sphericalangle FED + \sphericalangle EFH = \tfrac{3}{2}\alpha.$$

Je-li $HK \parallel EF$, jest

$$\sphericalangle KHF = \sphericalangle EFH = \frac{\alpha}{2} = \tfrac{1}{3} \sphericalangle FHD.$$

Tím jest vlastně již podán důkaz konstrukce. Neboť: Je-li v obr. 3. $\sphericalangle$ YOD úhel, jejž máme rozděliti na 3 stejné díly, jest hyperbolová hořejší větev táž, jak ji lze obdržeti užitím pravítka. Rameno OD seče hyperbolu v bodě D, $OD = OE$, z D jest opsán oblouk poloměrem $DE = DF$ a potom vedeno $HK \parallel EF$, při čemž $\sphericalangle FHK = \frac{1}{3} FHD$.

Vzhledem na omezenou velikost hyperboly v trojúhelníkovém pravítku nelze všechny ostré úhly přímo, jak popsáno, děliti na 3 stejné díly.

Při úhlech, které se blíží úhlu pravému, nevystačíme-li s pravítkem, třeba úhel rozpůliti a polovinu děliti na 3 stejné díly. Při úhlech velmi malých pokračujeme tím způsobem, že volíme úhel doplňkový, ten rozpůlíme a polovici dělíme na 3 stejné díly. Dvě třetiny tohoto úhlu odečteny od 30^0 dávají hledaný výsledek.

Při úhlech tupých dělíme výplňkové úhly na 3 stejné díly a odečítáme vyšetřené třetiny úhlové od 60^0. Poněvadž při těchto konstrukcích úhly 60^0 a 30^0 hrají důležitou roli, bylo z praktických důvodů popsané pravítko trojúhelníkové — jak již svrchu řečeno — voleno o 60^0 a 30^0 a lze ho pak při dělení úhlů velmi malých nebo blížících se 90^0 s prospěchem použíti.

Zmíněné pravítko má také tu praktickou stránku, že ho lze mimo vlastní účel také jako obyčejného trojúhelníkového pravítka použíti ku všem konstrukcím. Hyperbolová křivka umožňuje jeho eventuelní použití též co křivítka

---

Příspěvek ku konstruktivnímu dělení a násobení rovinných obrazců.

Napsal Dr. **Petr Pecl.**

Nelze upříti, že konstruktivní úlohy planimetrické náležejí k nejobtížnějším a zároveň k nejinteressantnějším úlohám geometrickým. Méně vycvičenému v podobném řešení zdají se býti na prvý pohled některé z úloh konstruktivně téměř neřešitelnými. Z té příčiny předchází řešení počtářské řešení geometrickému, ač jest toto mnohem elegantnější a důvtipnější.