Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička
Příspěvek ku grafickému rozboru kubických rovnic

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 2, 81--87

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122046`

Příspěvek ku grafickému rozboru kubických rovnic.

Podal prof. dr. **F. J. Studnička.**

Jakož známo,*) jsou kořeny rovnice stupně třetího

$$x^3 + 3px + 2q = 0 \tag{1}$$

vyjádřeny vzorci jednoduchými

$$x_1 = u + v, \tag{2}$$

$$x_2 = -\frac{u+v}{2} + i\frac{u-v}{2}\sqrt{3}, \tag{3}$$

$$x_3 = -\frac{u+v}{2} - i\frac{u-v}{2}\sqrt{3}, \tag{4}$$

zavedeno-li označení

$$u = -\sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 + p^3}}, \tag{5}$$

$$v = -\sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}}. \tag{6}$$

Pokud jest $p > 0$, značí odmocnina druhá z výrazu**)

$$R = q^2 + p^3$$

veličinu *reální*; jakmile však $p < 0$, rovnice (1) tedy jest

$$x^3 - 3px + 2q = 0, \tag{7}$$

vyjadřuje se příslušný výraz rozdílem

$$R = q^2 - p^3,$$

*) Viz *M. Pokorný* „Determinanty a vyšší rovnice" pag. 46.

**) O pojmu diskriminantním netřeba se tu zmiňovati.

$$\text{kterýž jest} \begin{cases} \textit{positivním} \text{ pro } q^2 > p^3 \\ \textit{nullou} \quad \text{"} \quad q^2 = p^3 \\ \textit{negativním} \quad \text{"} \quad q^2 < p^3; \end{cases}$$

takže v případě posledním vytčená svrchu odmocnina značí veličinu *imaginární.*

Abychom pak graficky znázornili všecky případy zde možné, zobrazme kubickou parabolu, jejíž rovnice v pravoúhlých souřadnicích jest

$$y = x^3 - 3px + 2q.$$

Především tu patrno, dáme-li rovnici tvar

$$y = x^2 \left[x - \frac{3p}{x} + \frac{2q}{x^2} \right],$$

že pro $x = -\infty$ bude $y = -\infty$,

pro $x = +\infty$ bude $y = +\infty$,

z čehož soudíme, jelikož naše funkce jest naskrze *spojitou*, že průběh paraboly jde z $-\infty$ do $+\infty$ *nullou,* že tedy jeden kořen rovnice (7) jest *reální.* *)

Abychom pak posoudili, kdy jsou i ostatní dva kořeny reální, zobrazme si křivku tuto na základě dané jednotky a určitých hodnot p a q, jež zvolme tak, aby q bylo positivní a značně větší nežli p.

Především si zjednejme polohu vrcholův a obratníku známým způsobem, řešíce totiž rovnice

$$\frac{dy}{dx} \equiv 3x^2 - 3p = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \equiv 6x = 0,$$

takže z první plyne dvojí hodnota, a to

$$x = \sqrt{p}, \quad x = -\sqrt{p},$$

z druhé pak hodnota jediná

*) Viz *Bolzano* „Ryze analytický důkaz poučky, že mezi dvěma hodnotami, jež poskytují opačně označené výsledky, leží nejméně jeden reální kořen rovnice.“ Časop. IX., pag. 1. et seqq.

$$x = 0;$$

podlé toho bude tedy *maximalní* y neboli

$$y_a = 2(q + p\sqrt{p}),$$

minimalní pak y neboli

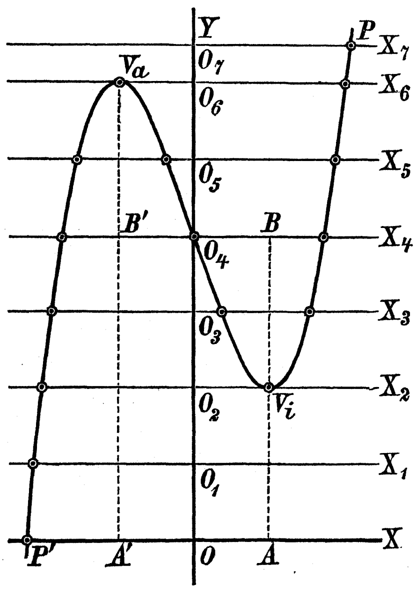
$$y_i = 2(q - p\sqrt{q})$$

a *obratníkové* y neboli

$$y_0 = 2q = {}^1/_2\,(y_i + y_a),$$

kdežto současně jest, jakož snadno se pozná, příslušná derivace první

$$y'_0 = -3p.$$



Zvolíme-li na př. určitou parabolu

$$y = x^3 - 3x + 4, \tag{8}$$

kdež tedy jest $p = 1$, $q = 2$, zjednáme si podlé vzorců předcházejících

$$y_a = 6, \quad y_i = 2, \quad y_0 = 4$$

a sestrojíme pak pomocí těchto hodnot část křivky na obraze vedlejším tahem P′P vyznačenou.

A tu patrno, že protíná osu úseček jenom v bodě P′, takže

$$x = -\mathrm{OP}'$$

představuje reální kořen této zvláštní rovnice, an jest zároveň *negativní*; ostatní dva kořeny jsou pak soujemné, čemuž nasvědčuje i náš výraz

$$\mathrm{R} = 8 - 1 = 7 .$$

Zmenšíme-li v naší rovnici obě strany o α, takže bude

$$y - \alpha \equiv \eta = x^3 - 3x + 4 - \alpha ,$$

což znamená, že pošineme osu úseček do rovnoběžné polohy rovnicí

$$y = \alpha$$

vyznačené, nastane podlé toho, jak velké zvolíme α, celá řada různých případů zvláštních, a to:

I. *Všeobecně*:

1. Jestli $\alpha < y_i$, tedy na př. $\alpha = \mathrm{OO}_1$, bude nová osa úseček míti polohu $\mathrm{O}_1\mathrm{X}_1$, již naše parabola protíná opět v jediném jen bodě reálním, takže kubická rovnice příslušná má jen jeden kořen reální.

2. Jestli $y_0 > \alpha > y_i$, tedy na př. $\alpha = \mathrm{OO}_3$, bude nová osa úseček míti polohu $\mathrm{O}_3\mathrm{X}_3$, již naše parabola protíná ve třech bodech reálních, takže příslušná rovnice bude míti všechny kořeny reální a to jeden negativní a dva positivní.

3. Jestli $y_0 < \alpha < y_a$, tedy na př. $\alpha = \mathrm{OO}_5$, bude nová osa úseček míti polohu $\mathrm{O}_5\mathrm{X}_5$, z čehož pak soudíme, že příslušná rovnice bude míti opět všechny kořeny reální, avšak dva negativní a jeden positivní.

4. Jestli konečně $\alpha > y_a$, tedy na př. $\alpha = \mathrm{OO}_7$, bude nová osa úseček míti polohu $\mathrm{O}_7\mathrm{X}_7$, z čehož jde na jevo, že příslušná rovnice má jen jeden kořen reální a to positivní, kdežto druhé dva jsou soujemné.

II. *Zvláště* pak bude:

5. Jestli $\alpha = y_i = \mathrm{OO}_2$, splynou oba positivní průseky paraboly s osou úseček v jedno, takže příslušná rovnice bude míti,

jako v případě 2., jeden kořen negativní a dva positivní a to stejné.

6. Jestli $\alpha = y_0 = OO_4$, protne parabola osu úseček ve třech bodech reálních, z nichž jeden jest obratníkem jejím, takže příslušná rovnice bude míti jeden kořen hodnoty 0, pak jeden positivní a jeden stejně velký negativní. Týž výsledek plyne arci přímo z rovnice, ana tu má tvar

$$x^3 - 3px \equiv x(x^2 - 3p) = 0,$$

poskytující kořeny

$$x_1 = 0, \quad x_2 = +\sqrt{3p}, \quad x_3 = -\sqrt{3p}.$$

7. Jestli $\alpha = y_a = OO_6$, splynou oba negativní kořeny případu 3. v jeden, takže rovnice bude míti jeden kořen positivní a dva negativní a to stejné.

Představíme-li si tedy, že by se α nepřetržitě zvětšovalo, seznáme, jaký budou míti průběh příslušné průseky paraboly s pošinující se osou úseček.

Sestavíme-li všechny tyto výsledky v jednoduché schema, obdržíme tento přehledný obraz souměrný:

Podmínka	Kořeny		
	reální		soujemné
	posit.	negat.	
$\alpha < y_i$	—	1	2
$\alpha = y_i$	2 stej.	1	0
$y_i < \alpha < y_0$	2 nest.	1	0
$\alpha = y_0$	1 0	1	0
$y_0 < \alpha < y_a$	1	2 nest.	0
$\alpha = y_a$	1	2 stej.	0
$\alpha > y_a$	1	—	2

Poznámka 1. Ze zvláštních případů vyniká, co číslem 5. a 7. vytčeno, kde jsou dva kořeny stejné. Příslušný bod V_a, V_i jest vrcholem křivky, jeho analytickou podmínkou jest tedy, že derivace první jest hodnoty nullové, z čehož plyne, že tu diskri-

minant se rovná též nulle, jakož naopak je vždy nullou, obsahuje-li příslušná forma binární nějaký faktor kvadratický; zároveň pak patrno, nazveme-li kořeny rovnice (7) krátce x_1, x_2, x_3, že jest

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = -3p,$$
$$x_1 x_2 x_3 = -2q,$$

a tedy ve zvláštním případě, kde $x_1 = x_2$, bude

$$x_3 = -2x_1, \tag{9}$$
$$x_1^2 = p, \tag{10}$$
$$x_1^3 = q, \tag{11}$$

což se i obdrží z rovnice naší přímo, snížíme-li stupeň, takže vznikne její pomocí kořenového faktoru $x + 2x_1$ na druhý,*)

$$x^2 - 2x_1 x + 4x_1^2 - 3p = 0,$$

kdež oba kořeny vyjadřuje vzorec

$$x = x_1 \pm \sqrt{3(p - x_1^2)},$$

z něhož patrno, že budou stejnými, jakmile dvojznačná odmocnina stane se nullou.

V tomto případě promění se naše rovnice (7) v

$$x^3 - 3x_1^2 x + 2x_1^3 = 0, \tag{12}$$

což se také přímo rozloží v

$$(x^2 - 2x_1 x + x_1^2)(x + 2x_1) = 0$$

a poskytuje dvě rovnice, totiž

$$x + 2x_1 = 0,$$
$$x^2 - 2x_1 x + x_1^2 \equiv (x - x_1)^2 = 0,$$

mající vytčené tři kořeny realné.

Poznámka 2. Souvislosť vrcholů křivky naší parabolické

*) Tohoto jednoduchého prostředku užívá se všude, kde se jiným spůsobem, nežli jest vyznačen vzorcem (2), dospěje ku poznání jednoho kořene rovnice (1), takže netřeba pak ani vzorců (3) a (4).

s existencí dvou stejných kořenův a zmizení hodnoty diskriminantní, objasňuje i převedení příslušné rovnice kubické na tvar kanonický.*)

Jestiť tu Hesse-ho kovariant

$$H \equiv px^2 - qx + p^2,$$

takže má-li rovnice kvadratická

$$x^2 - \frac{q}{p} x + p = 0$$

kořeny α, β, a tedy levou stranu její nahraditi možná součinem

$$(x - \alpha)(x - \beta),$$

obdržíme podlé známého postupu

$$A(x - \alpha)^3 + D(x - \beta)^3 = x^3 - 3px + q,$$

kdež poměr neznámých dosud koëfficientův A : D určí se podmínkou z této stejniny plynoucí, totiž

$$A\alpha + D\beta = 0,$$

takže pak naše rovnice bude

$$\beta(x - \alpha)^3 = \alpha(x - \beta)^3,$$

což vede ke tvaru

$$x^3 - 3\alpha\beta x + \alpha\beta(\alpha + \beta) = 0,$$

z něhož konečně plyne, je-li $\alpha = \beta$, opět rovnice (12).

Je-li na př. řešiti rovnici

$$x^3 - 27x + 54 = 0,$$

uvažme, že tu platí

$$p = 9 = 3^2,$$
$$q = 27 = 3^3,$$

načež poznáme, že kořeny její jsou

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -6.$$

*) Viz *Salmon-Fiedler* „Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen." II Aufl. pag. 196 et seqq.