Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Václav Jeřábek; Jan Roháček

Pseudo-versiera

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 1, 4--6

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122039

Pseudo-versiera.

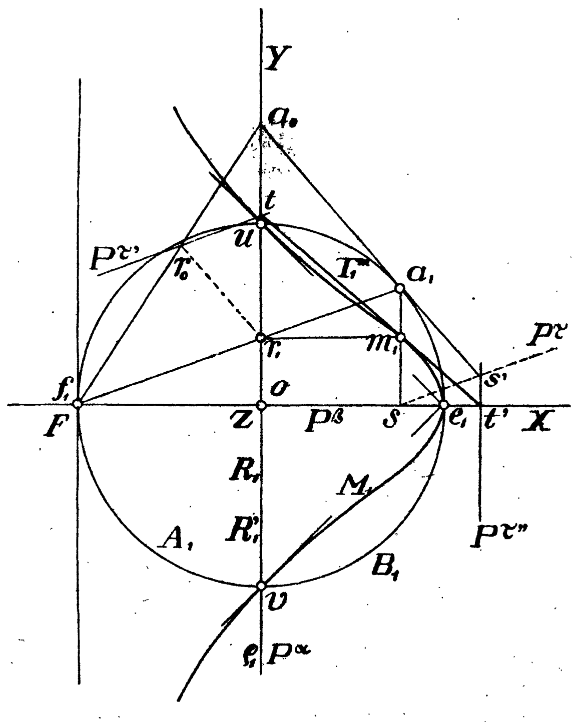
V. Jeřábek a dr. *J. Roháček*.

V průmětně π daná kružnice A_1 s kolmými průměry $uv \perp e_1 f_1$, budiž považována za průmět elipsy A, jejíž vedlejší osa uv leží v π a její rovina α, majíc svou stopu $P^\alpha \equiv uv$, je od průmětny π odkloněna o úhel $\varphi = 45^0$. Pak přímkou F, postavenou kolmo na π v bodě f_1, elipsou A a průmětnou je určen konoid $K(F, A, \pi)$. Průmětem jedné jeho površky budiž $f_1 a_1$. Rovina $\varrho \perp \pi$, jdoucí přímkou uv, seče konoid v křivce R, jejíž jedním bodem je bod r, mající průmět r_1 v průsečíku přímek $a_1 f_1$, $uv \equiv \varrho_1$. Křivkou R proložený válec $V(R)$ rovnoběžný se směrem $e_1 f_1$ a rovina elipsy α, protínají se v křivce M, jejíž jeden bod m je ve společném bodě površky válce $rm \parallel r_1 m_1 \parallel e_1 f_1$ a hlavní přímky $am \parallel a_1 m_1 \parallel P^\alpha$ roviny α. Průmět m_1 bodu m je v průsečíku průmětů příslušných přímek $rm \parallel e_1 f_1$ a $m_1 a_1 \parallel uv$.

Tečnu $T_1{}^m$ křivky M_1 v bodě m_1 sestrojíme průmětem průsečnice tečné roviny válce $V(R)$ v bodě m s rovinou α. Rovina tečná k válci v bodě m je určena površkou mr a tečnou rt řídící křivky R v bodě r. Abychom stanovili stopu t této tečny, položme podél přímky ra konoidu $K(FA\pi)$ orthog. hyp. paraboloid, určený přímkou F, tečnou aa_0 elipsy A v bodě a a průmětnou π. Jeho tečná rovina τ' v bodě r je dána površkami ar, rr_0 obou soustav, z nichž průmět $r_1 r_0$ površky rr_0 druhé soustavy je rovnoběžný s $a_1 a^0$ a má svoji stopu r_0 na stopnici $f_1 a_0$ hyp. paraboloidu. Stopa $P^{\tau'}$ roviny τ' jde bodem $r_0 \parallel a_1 r_1$ a protíná stopu roviny ϱ křivky R v bodě t; a poněvadž bod t leží též v rovině α, je spojnice tm tečnou T_m křivky M v bodě m a přímka tm_1 průmětem $T_1{}^m$ hledané tečny křivky M_1 v bodě m_1.

Křivka M_1 je též průmětem společné křivky jiných dvou prostorových útvarů. Za tím účelem budiž daný kruh $B_1 \equiv A_1$ v průmětně π považován za řídící křivku orth. válce $V(B)$. Středem o kružnice B_1 veďme přímku R', jejíž průmět $R'_1 \equiv R_1$ je kolmý na průměr $e_1 f_1$. Odchylka přímky R' od π budiž $\varphi = 45^0$. Přímkami F, R' a průmětnou π stanoven je orth. hyp. paraboloid (F, R', π), který protíná válec $V(B)$ v křivce B, promítající se do kružnice B_1. Jedním bodem křivky B je bod a společný válci a površce $ra \parallel r\,a_1$ hyp. paraboloidu. Proložíme-li nyní křivkou B válcovou plochu směru uv, jejíž jedna površka, jdoucí bodem a, je $am \parallel a_1 m_1 \parallel uv$ a přímkou R' rovinu β, jejíž stopa P^β jde bodem o kolmo na uv, protínají se tyto útvary v křivce M, jejímž průmětem je křivka M_1. Hlavní přímka roviny β $rm \parallel r_1m_1$ protíná površku am válce $V(B)$ v bodě m křivky M a průměty jejich r_1m_1 a a_1m_1 sečou se v průmětu m_1, náležející křivce M_1.

Rovina tečná τ'' válce $V(B)$ v bodě m a rovina β protínají se v tečně $T^m \equiv mt'$ křivky M v bodě m. Za účelem stanovení stopy t' této tečny je vedena v bodě a hyp. paraboloidu (F, R', π) tečná ro-



vina τ, jejíž stopa $P^\tau \parallel r_1a_1 \parallel ra$ prochází stopou s přímky as, patřící druhé soustavě površek hyp. paraboloidu. Průsečík stop P a (a_1a_0) dává stopu s' tečny as' křivky B v bodě a. Tečná rovina τ'' má tudíž svou stopu $P^{\tau''}$ procházející bodem s' rovnoběžně s $a_1m_1 \parallel am$. $P^{\tau''}$ protíná stopu roviny β v bodě hledaném t'. Spojnice $t'm_1$ stanoví pak hledanou tečnu T_1^m křivky M_1 v bodě m_1. Tečny v bodech u, v, jimiž křivka M_1 prochází, jdou bodem e_1, což ze druhého určení křivky a z postupu sestrojování tečen přímo vysvítá. Křivka M_1, jak následovně dokážeme, je *pseudo-versiera.*

Rovnice křivky M_1. Zvolme soustavu souřadnou pravoúhlou $X \equiv e_1f_1$, $Y \equiv uv$, $Z \equiv o$; pak při prvém určení křivky M_1 je

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \text{kde} \quad r = \overline{oe},$$

rovnice kruhu $A_1 \equiv B_1$.

Rovnice konoidu $K(F, A, \pi)$

$$\left(\frac{r+x}{y}\right)^2 = \frac{r+z}{r-z},$$

klademe-li $\overline{os} = \overline{aa_1} = z$. Pak rovnice válce $V(R)$ je

$$\frac{r^2}{y^2} = \frac{r+z}{r-z} \tag{1}$$

Rovina α má rovnici $x = z.$ (2)

Vyloučením z z rovnic (1), (2) plyne rovnice křivky M_1:

$$\frac{r^2}{y^2} = \frac{r+x}{r-x}$$

čili

$$y^2(r+x) = r^2(r-x),$$

což je rovnice pseudo-versiery.*)

Při druhém vytvoření křivky je

$$\frac{z}{r} = \frac{y}{r+x}$$

rovnicí hyp. paraboloidu (F, R', π) a

rovnicí válce orthogon. $x^2 + y^2 = r^2$

Válec $V(B)$ má pak rovnici

$$z^2 = \frac{r^2(r^2 - x^2)}{(r+x)^2} \tag{3}$$

a rovina β $y = z;$ (4)

vyloučením z z rovnic (3) a (4) dostáváme, jako dříve

$$y^2(r+x) = r^2(r-x).$$

*

Sur la pseudoversière.

(Extrait de l'article précédent.)

Une ellipse A, dont l'axe latéral est situé dans le plan de projection et dont l'axe principal fait avec ce plan un angle égal à 45°, se projette sur ce plan suivant une circonférence. Par cette ellipse, par la droite menée par un sommet principal de l'ellipse perpendiculairement au plan de projection et par ce plan lui-même, est déterminé un conoïde de Plücker. Le plan ϱ, contenant l'axe latéral et perpendiculaire au plan de projection, coupe ce conoïde en une courbe. Le cylindre contenant cette courbe et dont les génératrices sont perpendiculaires à ϱ, coupe le plan de l'ellipse considérés en une courbe, dont la projection est une pseudoversière. L'auteur donne une seconde construction, basée, de même, sur des considérations des figures d'espace.

---

*) Dr. G. Loria: Ebene Kurven, str. 82.